

Erkenntnisgewinnung im Mathematik- und Physikunterricht.

- Ein Vergleich im Rahmen eines Projektes zum fachdidaktisch-verbindenden Lehren und Lernen in den Lehramtsstudiengängen -

Ina Militschenko*, Frederik Dilling⁺

*Didaktik der Physik, Universität Siegen, Adolf-Reichwein-Straße 2, 57068 Siegen

⁺Didaktik der Mathematik, Universität Siegen, Herrngarten 3, 57072 Siegen

militschenko@physik.uni-siegen.de, dilling@mathematik.uni-siegen.de

Kurzfassung

Im Zusammenhang mit dem internationalen Projekt Inter-Tetra unter der Beteiligung der Mathematik- und Physikdidaktik der Universität Siegen sowie den entsprechenden Instituten der Hanoi National University of Education wird unter anderem ein Modul zum fachdidaktisch-verbindenden Lehren und Lernen in den Lehramtsstudiengängen Mathematik und Physik in Vietnam implementiert. Die inhaltliche Gestaltung der Modulveranstaltungen zeichnet sich durch den fachdidaktischen Vergleich der beiden Unterrichtsfächer aus. Ein für den Vergleich ausgewählter Inhalt ist die Erkenntnisgewinnung. In der Mathematik sowie im Mathematikunterricht ist der Beweis das zentrale Element der Erkenntnisgewinnung. In der physikalischen Erkenntnisgewinnung nimmt die experimentelle Methode bzw. im Physikunterricht das Experiment einen wichtigen Platz ein. In den letzten Jahren werden im Mathematikunterricht zunehmend auch experimentelle Arbeitsweisen eingesetzt. Entsprechend legt man im Physikunterricht im Zuge der Kompetenzorientierung großen Wert auf das Argumentieren. Aus diesen Synergien entsteht ein spannendes Forschungsfeld der Mathematik- und Physikdidaktik, welches in diesem Vortrag vorgestellt werden soll.

1. Das Projekt InterTetra

InterTetra ist eine Abkürzung für ein internationales Projekt mit der vollständigen Bezeichnung „Cooperation between the Universities of Siegen and Hanoi for developing and implementing an Interdisciplinary Teacher Training (Ma + Phy) as a Contribution to a Competency-related Curriculum in Vietnam“. Am Projekt sind vier Institutionen beteiligt, nämlich die Mathematikdidaktik und Physikdidaktik der Universität Siegen sowie entsprechende Institute der Hanoi National University of Education [1].

Eines der Ziele des Projektes ist die Entwicklung und Implementierung eines Moduls in der Mathematik- und Physiklehrerausbildung zu kompetenzbasiertem fächerverbindenden Lehren. Das innovative an diesem Ansatz für Vietnam ist, dass dort die Ausbildung nur in einem Unterrichtsfach erfolgt, sodass eine über das eigene Fach hinausgehende Perspektive in der Phase der Ausbildung gänzlich fehlt. Zukünftig ist jedoch zusätzlich zu den einzelnen Fächern die Einführung eines sogenannten MINT-Faches geplant, sodass in der Praxis fächerverbindende Ansichten vorausgesetzt werden. Um dieser Diskrepanz entgegenzuwirken soll ein Modul in der Lehrerausbildung, eine entsprechende Lehrerfortbildung und ein Lehrbuch konzipiert, erprobt und evaluiert werden.

Der Schwerpunkt des geplanten Moduls sowie des Lehrbuchs liegt auf der vergleichenden Diskussion didaktischer Theorien der beteiligten Fächer. Die Basis für diesen Vergleich stellt eine Lehrbuchanalyse

dar [2]. Ein für den Vergleich ausgewählter Inhalt ist die Erkenntnisgewinnung, die die Erkenntnismethoden der beiden Fachdisziplinen sowie die wichtigsten unterrichtsbezogenen Kompetenzen der Erkenntnisgewinnung beinhaltet.

Im Folgenden sollen zuerst die Erkenntnismethoden der Physik als Disziplin sowie die Erkenntnisgewinnung im Rahmen des Unterrichtsfachs Physik umrissen werden. Nachfolgend wird eine entsprechende Kurzanalyse für die Mathematik bzw. für den Mathematikunterricht vollzogen, um zum Schluss einen Vergleich zu ziehen und Folgerungen für die Lehrerausbildung abzuleiten.

2. Erkenntnismethoden der Physik

In einigen Werken werden induktive und deduktive Vorgehensweisen als naturwissenschaftliche Methoden dargestellt: Unter der induktiven Vorgehensweise im naturwissenschaftlichen Bereich versteht man zumeist den Weg von experimentell gewonnenen Erkenntnissen zu den allgemeinen Gesetzen und Theorien [3]. Der deduktive Weg zeichnet sich dadurch aus, dass die Erkenntnisgewinnung mit einer Antizipation bzw. einer Hypothese beginnt, aus der anschließend konkrete Sätze abgeleitet und mit anderen Sätzen auf logische Beziehungen geprüft werden [4]. Diese beiden Vorgehensweisen beschreiben die Methodologie der Physik jedoch nur unzureichend [3, 5, 6, 7, 8].

Kuhn [6] führt eine geschichtliche Analyse der Physik durch und unterscheidet auf ihrer Basis zwischen folgenden methodischen Konzepten: In der klassischen Physik - Galileis „metodo compositivo“ und Newtons axiomatische Methode; In der modernen Physik - Einsteins Modell der Theoriekonstruktion („EJASE-Prozess“). Schwarz [9] bezeichnet die von Galilei gegründete „metodo compositivo“ als „experimentelle Methode“ und misst dieser methodischen Vorgehensweise die zentrale Bedeutung in der Physik bei. Diese Methode beinhaltet zusätzlich zum Experiment den theoretischen Rahmen, in dem dieses eingebettet ist. Schwarz [10] beschreibt die experimentelle Methode wie folgt: „Unter dieser Methode versteht man bekanntlich das Wechselspiel zwischen Theorie und Experiment, bei dem eine zuvor im Rahmen von Modellüberlegungen und theoretischen Vorhersagen geplante Versuchsanordnung darüber entscheiden soll, ob die prognostizierten Entitäten, Zusammenhänge oder Phänomene in der Natur tatsächlich vorhanden sind“ [10, S. 3].

Die Theorie und das Experiment in der Physik sind also auf dem Weg zur Erkenntnis auf eine gewisse Weise miteinander verknüpft, die als Wechselspiel angesehen werden kann. Kuhn [11] schreibt dazu: „Naturwissenschaftliche Erkenntnisse basieren zwar auf Naturbeobachtungen, aber sie werden nicht rein empirisch gewonnen. Das Experiment ist eine gezielte theoriegeleitete Beobachtung. Es dient der Prüfung von Hypothesen über den vermuteten Zusammenhang der Naturvorgänge. Dementsprechend gibt es keinen direkten Weg von den Sinneswahrnehmungen zu physikalischen Begriffen.“ [11, S. 2]

Im Unterricht kann die experimentelle Methode in der hier definierten Form aus vielerlei Gründen (wie zeitlichen, lerntheoretischen, didaktisch-methodischen sowie aufgrund ihrer Komplexität) nur in seltenen Fällen vom Lehrer als Erkenntnisweg initiiert werden. Den Lernenden sollte jedoch keineswegs vorenthalten werden, was hinter dieser physikalischen Methode zu verstehen ist. Empfehlenswert ist es hierfür auf Galilei zurückzugreifen und seine Vorgehensweise bei der Herleitung der Gesetzmäßigkeiten einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung aus historischer Perspektive zu betrachten [12,13].

Auch Kircher ist der Meinung: „[...] physikalische Methoden sind nicht a priori für den Physikunterricht qualifiziert“ [3, S. 794]. Wodurch zeichnet sich dann die Erkenntnisgewinnung im Unterrichtsfach Physik aus?

3. Erkenntnisgewinnung im Physikunterricht

Die Wege, mit welchen sich Schülerinnen und Schüler im Unterricht das physikalische Wissen aneignen, sind mit den Methoden, mit denen Wissenschaftler zu ihren physikalischen Erkenntnissen gelangen, nicht identisch. Dies liegt unter anderem darin begründet, dass Wissenschaftler über ganz andere Problemlöse-

fähigkeiten, Vorkenntnisse und Techniken als Lernende verfügen. Der Physikunterricht kann also den physikalischen Methoden nicht ohne Weiteres folgen [3].

Die Bausteine und Tätigkeiten der naturwissenschaftlichen Arbeitsmethoden sind jedoch auch die typischen Merkmale des naturwissenschaftlichen Unterrichtes und somit des Physikunterrichtes. Die Techniken und Tätigkeiten, die also in einem engen Zusammenhang mit dem Erkennen physikalischer Sachverhalte stehen, wie beispielsweise Beobachten, Messen und Experimentieren, Modelle und Analogien anwenden, Theorien und Begriffe verstehen, werden daher der unterrichtsbezogenen Kompetenz „Erkenntnisgewinnung“ zugeordnet [14].

Aus kapazitiven Gründen wird im Folgenden nur auf das Experimentieren als dominierende Vorgehensweise bei der Erkenntnisgewinnung im Physikunterricht näher eingegangen:

3.1. Experimentieren im Physikunterricht

Das Experiment ist das wesentliche Merkmal des naturwissenschaftlichen Arbeitens und hat daher eine zentrale Stellung im Physikunterricht. Kircher [3] misst dem Experiment im Unterricht aus vielerlei Überlegungen eine herausragende Bedeutung bei. Dabei führt er Gründe wie die Nachfolgenden auf: Ein Experiment ist ein unverzichtbarer Bestandteil der physikalischen Methodologie; viele Unterrichtsziele sind mit dem Schülerexperiment eng verknüpft usw.

Das Experimentieren als eine der grundlegenden Fähigkeiten der Schülerinnen und Schüler im naturwissenschaftlichen Unterricht wird als sogenannte „experimentelle Kompetenz“ bezeichnet. Zur Beschreibung der experimentellen Kompetenz werden unterschiedliche Modelle herangezogen, die diese Fähigkeit in Teilkompetenzen zerlegen. So wird im Modell von Hammann [15] zwischen drei Teilkompetenzen unterschieden: (i.) das Suchen und Aufstellen von Hypothesen, (ii.) die Planung und Durchführung von Experimenten sowie (iii.) die Analyse der experimentellen Ergebnisse. Auch bei Schreiber, Theyßen und Schecker [16] findet man ein darauf basierendes Modell vor (Tabelle 1), wobei die Hypothesenbildung und Entwicklung von Fragestellungen der Komponente Planung zugeordnet werden.

Aus diesem Modell wird ersichtlich, dass das Experimentieren viel mehr als die bloße Durchführung eines Experimentes beinhaltet: Zur ersten Komponente des Experimentierens, nämlich zur Planung, werden bereits mehrere Teilschritte gezählt: Fragestellungen entwickeln, Fragestellungen klären, Hypothesen bilden und Erwartungen formulieren. Nach Meinung von Schreiber, Theyßen und Schecker [16] wird der Hypothesenbildung im Unterricht, in Anlehnung an das wissenschaftliche Arbeiten, jedoch zu viel Bedeutung beigemessen, denn das wissenschaftliche Experimentieren und das Experimentieren im Rahmen des

Unterrichtes unterscheiden sich trotz ähnlicher Strukturierung. Der Entwurf eines Versuchsplanes, zu dem auch die Parameterkontrolle gehört, wird in diesem Modell als ein eigenständiger Schritt zwischen Planung und Durchführung angesehen. Da die Parameterkontrolle sowohl bei der Planung als auch bei der Durchführung des Experimentes berücksichtigt werden soll, kann der experimentelle Aspekt „Versuchsplan“ in diesem Modell nicht eindeutig zugeordnet werden [16].

Planung	<ul style="list-style-type: none"> • vorgegebene Fragestellung klären • Fragestellung entwickeln • Erwartungen formulieren • Hypothese bilden 	Versuchsplan entwerfen
Durchführung	<ul style="list-style-type: none"> • Geräte zusammenstellen • Versuchsanordnung aufbauen • Messungen durchführen • Messungen dokumentieren 	
Auswertung	<ul style="list-style-type: none"> • Messdaten aufbereiten • Messdaten verarbeiten • Ergebnis interpretieren 	Umgang mit Problemen und Fehlern

Tab. 1: Modell der experimentellen Kompetenz nach [15]

Zur Komponente „Durchführung des Versuches“ gehören nach diesem Modell vier Teilschritte: (i.) Zusammenstellung der Geräte, (ii.) Aufbau der Versuchsanordnung, (iii. - iv.) Messwertaufnahme und –dokumentation. Die Auswertung, als der letzte Schritt des Modells, beinhaltet die Aufbereitung von Daten (beispielsweise tabellarisch oder grafisch) und ihre Verarbeitung (z.B. Untersuchung der Zusammenhänge zwischen Größen) sowie die Interpretation der Ergebnisse bezüglich der eingangs formulierten Fragestellungen. Ein weitere Teilschritt „Umgang mit Problemen und Fehlern“ ist nach diesem Modell eine Schnittstelle zwischen Durchführung und Auswertung [16].

3.2. Didaktisch-methodische Anmerkungen zum Experimentieren als Methode der Erkenntnisgewinnung im Physikunterricht

Muckenfuß [17] warnt davor, das hypothesengeleitete Experimentieren im Unterricht mit dem in der Wissenschaft zu vergleichen und folgert aus didaktischer Sicht: „Für den Physikunterricht erscheint [in diesem Licht] das Zelebrieren eines angeblichen Standardweges zu physikalischer Erkenntnis nach dem Schema „Problemfrage“ → „Vermutung“ → „Versuchsplanung“ → „Experiment“ → „Beobachtung“ → „Schlussfolgerungen“ nicht als der Weisheit letzter Schluss“ [17, S.5].

Er begründet seine Aussage damit, dass es sich im Unterricht in der Regel um eine stark verkürzte Variante des wissenschaftlichen hypothesengeleiteten Experimentierens handelt, da Experimente im Vorfeld von Lehrmittelherstellern sowie von Lehrpersonen sorgfältig vorbereitet bzw. entwickelt werden. Die theoretische Vorüberlegung, die zur experimentellen Methode gehört, „steckt in den Konstruktionsmerkmalen des speziellen Lehrgerätes und in der sorgfältigen Vorbereitung des Versuches durch die Lehrkraft“ [17]. An der Planung des Experimentes sind die Schülerinnen und Schüler demnach nur oberflächlich beteiligt. Im Unterricht geht es in den meisten Fällen um „die anschauliche und attraktive Vermittlung der Theorie und nicht um authentisches hypothesengeleitetes Experimentieren“ [17, S.18]. Auch Höttecke [18] warnt davor die Schülerexperimente als Beispiel für die Arbeitsweise von Wissenschaftlern hinzustellen. Demnach erfüllen Experimente in der Wissenschaft andere Funktionen als die Experimente im Unterricht.

3.3. Funktionen des Experimentes im Unterricht

Wie bereits erwähnt, ist das Experiment im Unterricht stark mit den unterrichtlichen Zielen verknüpft und kann daher zu verschiedenen Zwecken eingesetzt werden. Die Funktionen des Experimentes, wie beispielsweise die „Demonstration eines Phänomens“ sind sehr vielfältig. Diese werden in Anlehnung an Girwidz [19] im Folgenden erläutert. Aus Gründen der Übersichtlichkeit werden die von Girwidz aufgeführte Funktionen zusätzlich in drei Kategorien eingeteilt:

(i) *An physikalische Arbeitsweise angelehnte Experimente*: Zu dieser Kategorie werden hier Experimente gezählt, die dem Zweck dienen, Gesetzmäßigkeiten erfahrbar zu machen, theoretische Aussagen zu prüfen, Gesetze quantitativ zu überprüfen, naturwissenschaftliches Arbeiten im unterrichtlichen Rahmen zu ermöglichen sowie Meilensteine unserer Kulturgeschichte kennenzulernen (Tabelle 2).

Diese Kategorie soll am Beispiel der Funktion „Gesetze quantitativ überprüfen“ erläutert werden: Theoretische Aussagen bzw. Gesetze, die aus Theoriebetrachtungen gewonnen oder axiomatisch aufgestellt wurden, werden auch im Unterricht, in Anlehnung an die wissenschaftliche Vorgehensweise, durch Experimente darauf geprüft, wie sinnvoll diese bei der Beschreibung von Naturereignissen sind. Die Überprüfung kann qualitativ oder quantitativ erfolgen. Ein Beispiel zur qualitativen Überprüfung einer theoretischen Aussage ist das Vakuumrohr-Experiment zum freien Fall, in dem eine Feder genauso schnell fällt wie ein Stein.

Unter der Kategorie (ii) *Experimente zum Aufbauen von Grunderfahrungen und Konzepten*: werden hier unter anderem Experimente verstanden, die dem

Zweck dienen, physikalische Konzepte zu verdeutlichen, Grunderfahrungen aufzubauen, etc. (Tabelle 2).

So lassen sich beispielsweise physikalische Konzepte und Modelle im Rahmen von Experimenten auf die folgende Art und Weise deutlich machen: Das Konzept der geradlinigen Ausbreitung des Lichtes bzw. das Modell „Lichtstrahl“ kann verdeutlicht werden, indem ein Laserstrahl mit Hilfe von Kreidestaub sichtbar gemacht wird. Dies visualisiert die Geradlinigkeit der Lichtausbreitung und schafft eine Vorstellung von Lichtstrahlen [18].

Experimente die die Motivation und das Interesse wecken, Schülervorstellungen prüfen und nachhaltig Eindrücke vermitteln, werden hier zur Kategorie (iii) *Berücksichtigung weiterer lernpsychologischer Aspekte* zusammengefasst. Experimente, die zu diesem Zwecke eingesetzt werden, verfolgen nicht primär das Ziel der Erkenntnisgewinnung, sie sind jedoch für erfolgreiche Wissensvermittlung aus lernpsychologischer Sicht von hoher Bedeutung.

Funktionen von Experimenten	an physikalische Arbeitsweise angelehnte Experimente	<ul style="list-style-type: none"> • Gesetzmäßigkeiten erfahrbar machen • theoretische Aussagen prüfen • Gesetze quantitativ überprüfen • naturwissenschaftliches Arbeiten im unterrichtlichen Rahmen ermöglichen • Meilensteine unserer Kulturgeschichte kennenlernen
	Experimente zum Aufbauen von Grunderfahrungen und Konzepten	<ul style="list-style-type: none"> • physikalische Konzepte verdeutlichen • ein Phänomen zeigen • Grunderfahrungen aufbauen • Denkanstöße geben • physikalische Vorstellungen aufbauen • Physik in Technik und Alltag aufzeigen
	Experimente zur Berücksichtigung weiterer lernpsychologischer Aspekte	<ul style="list-style-type: none"> • Motivation und Interesse wecken • Schülervorstellungen prüfen • nachhaltig Eindrücke vermitteln

Tab. 2: Übersicht über die Funktionen des Experimentes nach Girwidz [19], eingeteilt in drei übergeordnete Kategorien

3.4. Weitere mit der Erkenntnisgewinnung verwandte Arbeitsweisen und Kompetenzen im Physikunterricht

Die mit Erkenntnisgewinnung eng verknüpften Tätigkeiten wie Experimentieren, Messen, Beobachten, Theorien- und Begriffsbildung nachvollziehen etc., sollten im Unterricht nicht isoliert betrachtet werden. Sie sind Komponenten im Gesamtgefüge auf dem Weg zum Erwerb physikalischer bzw. naturwissenschaftlicher Bildung. So trägt beispielsweise die Kompetenz „Beherrschen der Fachsprache“, zweifelsfrei auch zur Erkenntnisgewinnung bzw. zum Verständnis der physikalischen Theorien im Unterricht bei. Auf alle wichtigen Kompetenzen kann im Rahmen dieses Artikels nicht gesondert eingegangen werden. Eine Fähigkeit, nämlich die des Argumentierens (z.B. im Rahmen eines Experimentes für oder gegen die aufgestellte Hypothese) scheint in Anbetracht der aktuellen didaktischen Forschungsergebnisse jedoch von großer Bedeutung zu sein, da sie in besonderer Weise zur Erkenntnisgewinnung beisteuert [20].

Naturwissenschaftliches Argumentieren ist eine Arbeitsweise, die mit den Tätigkeiten wie Modellieren und hypothesengeleitetes Experimentieren eng verknüpft ist. Argumente werden im Physikunterricht dann eingesetzt, wenn beispielsweise alternative Lösungen eines physikalischen Problems vorliegen, wenn es gegensätzliche theoretische Ansätze gibt oder allgemein bei Widersprüchen und kognitiven Konflikten [21].

Gromadecki [22] plädiert für die Förderung der argumentativen Fähigkeiten von Lernenden im Physikunterricht. Sie begründet ihre Forderung damit, dass es sich beim Argumentieren um eine naturwissenschaftliche Arbeitsweise handelt und beleuchtet die Wichtigkeit des Argumentierens aus verschiedenen Perspektiven:

Aus naturwissenschaftlicher Sicht hat diese Arbeitstechnik eine besondere Bedeutung, da Argumentieren das Kernstück des kritischen und folgerichtigen Denkens bildet (wie auf Platon und Sokrates zurückzuführen ist, zitiert nach [22]). Um ein adäquates Bild von der Fachwissenschaft im Unterricht zu vermitteln, sollte die sogenannte Metastruktur der Physik diskutiert und gelernt werden. Unter der Metastruktur ist die physikgeschichtliche, die wissenschaftsethische, die gesellschaftliche und die politische Komponente der Physik zu verstehen [3]. Werden Fragestellungen aus diesen Themenbereichen diskutiert, so spielt die argumentative Vorgehensweise eine außerordentlich wichtige Rolle. Nicht zuletzt ist der argumentative Teil bei der Kommunikation unter den Wissenschaftlern auf Tagungen und Konferenzen von großer Bedeutung, da neue Erkenntnisse unter Wissenschaftlern auch verbal ausgehandelt werden.

Aus der Perspektive der naturwissenschaftlichen Methodik verweist Gromadecki auf McComas [23] und erläutert, dass der Prozess der Erkenntnisgewinnung

erst durch entsprechende Argumente abgerundet wird. Weitere Gründe, die von Gromadecki [22] zur Legitimation der besonderen Beachtung der Argumentation im Unterricht aufgeführt werden, sind die Ausbildung von prozeduralen Fähigkeiten und die Zugehörigkeit der Argumentation zur naturwissenschaftlichen Grundbildung.

4. Erkenntnismethoden der Mathematik

Bei der formalen Mathematik handelt es sich um eine Wissenschaft zur Untersuchung abstrakter Strukturen. Die Untersuchung erfolgt dabei mit Hilfe spezifizierter Schlussregeln. Harro Heuser beschreibt dies in seinem bekannten Lehrwerk zur Analysis wie folgt:

„Es versteht sich heutzutage von selbst, daß jede Darstellung der Analysis gemäß der axiomatischen Methode zu erfolgen hat: Der ganze Bestand analytischer Aussagen muß streng deduktiv aus einigen Grundeigenschaften reeller Zahlen entfaltet werden. Jede mathematische Disziplin verdankt ihre Sicherheit, ihre Überzeugungskraft und ihre Schönheit dieser Methode. Zu sehen, wie der reiche Teppich der Analysis mit seinen unendlich mannigfaltigen Farben und Figuren aus wenigen Fäden (den Axiomen über reelle Zahlen) enger und enger geknüpft wird – das ist eine geistige Erfahrung höchsten Ranges, um die kein Student betrogen werden darf.“ [24], (S.5)

Das zentrale Element der Mathematik ist somit der Beweis, der die deduktive Herleitung eines mathematischen Satzes nach bestimmten Schlussregeln aus Axiomen und zuvor bereits bewiesenen Sätzen darstellt. Es lassen sich verschiedene Beweisarten unterscheiden wie der direkte und der indirekte Beweis, die vollständige Induktion oder die vollständige Fallunterscheidung.

Auch wenn die Absicherung von Sätzen in der Mathematik deduktiv durch einen formalen Beweis geschieht, sind empirische Arbeitsweisen bei der Generierung von Hypothesen durchaus etabliert. So kann es sinnvoll sein, eine Vermutung zunächst an einzelnen Beispielen oder Klassen von Beispielen auszuprobieren. Dies stellt allerdings in der Mathematik keinesfalls eine Verifikation dieser Aussagen dar.

Eine solche formale Auffassung von Mathematik wird insbesondere an Universitäten vermittelt. Die Darstellung der Mathematik im Schulunterricht unterscheidet sich hiervon insbesondere in Bezug auf die Wege der Erkenntnisgewinnung teilweise stark [25], wie es im Folgenden aufgezeigt wird.

5. Erkenntnisgewinnung im Mathematikunterricht

Im Gegensatz zu einer formalen Darstellung der Mathematik ist das mathematische Wissen von Kindern empirisch-gegenständlicher Art ([26], [27]). Es wird im Unterricht insbesondere durch den Umgang mit

realen Phänomenen entwickelt, sodass eine ontologische Bindung des mathematischen Wissens mit Bezug auf gewisse empirische Referenzobjekte entsteht. Damit sind die Untersuchungsgegenstände der Schulmathematik in weiten Teilen keine abstrakten Objekte, sondern konkrete empirische Objekte. Dieses Phänomen wird durch den vermehrten Einsatz digitaler Technologien noch einmal verstärkt [28].

Damit ist auch die Rolle des Beweises in der Schulmathematik eine andere als in der Mathematik als Fachwissenschaft. Jahnke und Ufer (2015) beschreiben dies folgendermaßen:

„Es besteht ein weitgehender Konsens, dass sich ein axiomatisch-deduktives Vorgehen im allgemeinbildenden Mathematikunterricht verbietet. Vom Beweisen bleibt dann der Anspruch übrig, dass Aussagen auf Gründe zurückgeführt werden sollen. Welche Gründe als akzeptabel gelten, hängt vom Entwicklungsniveau der Schülerinnen und Schüler ab und ist letztlich Sache des in einer Lerngemeinschaft vorgefundenen „geteilten Wissens“.“ [29], (S.333f.)

Somit gibt es neben dem formalen Beweis weitere Beweisformen, die im Mathematikunterricht verwendet werden. Wittmann und Müller [30] unterscheiden diesbezüglich drei Formen des Beweises:

Experimentelle Beweise

Experimentelle Beweise sind Verifikationen von Aussagen an einzelnen Beispielen. Dies umfasst „Veranschaulichungen, Plausibilitätsbetrachtungen, empirische Verifikationen und an Beispielen erläuterte Regeln, die bestimmte Aufgabenfelder erschließen“ ([30], S.248). Experimentelle Beweise verlangen weder logische Schlussfolgerungen noch das formale Formulieren eines Zusammenhangs. Sie bieten allerdings auch keine abschließende Sicherheit bezüglich der Allgemeingültigkeit. Ein Beispiel für diese Beweisform ist das Abreißen und Aneinanderlegen von Dreiecksecken zur Begründung des Innenwinkelsummensatzes.

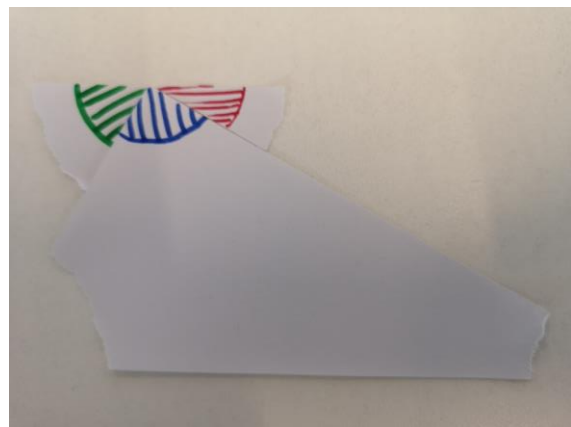


Abb. 1: Begründung des Innenwinkelsummensatzes am Dreieck durch Abreißen von Papierecken

Inhaltlich-anschauliche Beweise

Inhaltlich-anschauliche Beweise sind mehr als das Zeigen der Gültigkeit einer Aussage an einzelnen Beispielen. Sie stützen sich auf „Konstruktionen und Operationen, von denen intuitiv erkennbar ist, dass sie sich auf eine ganze Klasse von Beispielen anwenden lassen und bestimmte Folgerungen nach sich ziehen“ ([30], S.249). Es handelt sich bei inhaltlich-anschaulichen Beweisen um eine Kette korrekter Schlüsse – diese müssen allerdings nicht formal formuliert sein und dürfen explizit auf empirische Objekte Bezug nehmen. Ein Beispiel für einen inhaltlich-anschaulichen Beweis bildet die Begründung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung auf der Basis eines Integraphen – ein mechanisches Instrument zum Zeichnen einer Integralkurve [28].

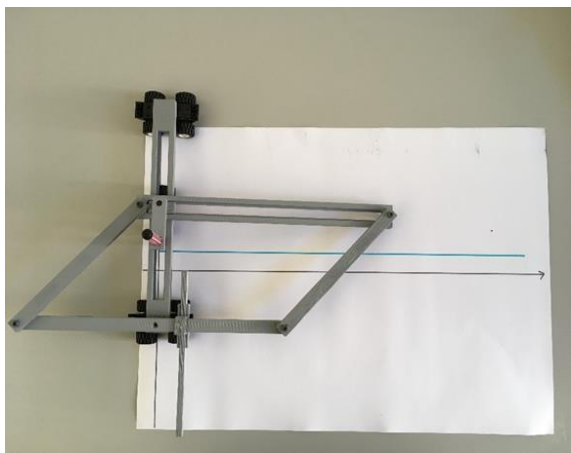


Abb. 2: Integraph zum inhaltlich-anschaulichen Beweisen des Hauptsatzes der Analysis ([31])

Formal-deduktive Beweise

Der formal-deduktive Beweis entspricht dem wissenschaftlichen Beweis, bei dem eine Aussage in einem strengen logischen Prozess aus einer anderen Aussage abgeleitet wird. Das Ziel ist die Darstellung als logische Beweiskette in möglichst kurzer Form. Dabei wird stets eine formale algebraische Sprache verwendet.

Neben den von Wittmann und Müller [30] aufgestellten Beweisarten lassen sich weitere Formen unterscheiden, die allerdings aus Kapazitätsgründen an dieser Stelle nicht ausgeführt werden können. Es bleibt dabei die Frage, welche Beweisform für den Mathematikunterricht angemessen ist. So genügt es auf der einen Seite sicherlich nicht, sämtliche mathematischen Sätze, die vom Wesen her Allaussagen darstellen, nur noch an Einzelbeispielen zu überprüfen. Auf der anderen Seite ist die ausschließliche Verwendung formaler Beweise für Schülerinnen und Schüler schwer zugänglich. Ein differenzierender Mathematikunterricht stellt verschiedene Beweise zur Verfügung, sodass die Art der Begründung angepasst an den individuellen Wissensstand vom Lernenden gewählt werden kann. Auf diese Weise können die Schülerinnen und Schüler schrittweise zu formalen Beweisen geführt werden.

Im Mathematikunterricht sind neben der Verifikation einer Aussage weitere Intentionen mit dem Beweisen verbunden. De Villier [32] nennt sechs Funktionen des Beweises im Mathematikunterricht:

- Verifikation: Festlegung der Gültigkeit einer Aussage
- Erklärung: Warum ist die Aussage wahr?
- Systematisierung: Organisation verschiedener Sätze in einem logischen Zusammenhang
- Entdeckung: Erzeugen neuer Ergebnisse
- Kommunikation: Vermittlung mathematischen Wissens
- Intellektuelle Herausforderung: Selbstverwirklichung durch die Entwicklung eines Beweises

Diese verschiedenen Beweisfunktionen finden im Mathematikunterricht Berücksichtigung und prägen den empirisch-gegenständlichen Charakter der Schulmathematik.

6. Folgerungen**6.1. Vergleich der Erkenntniswege**

Die vorangegangenen Ausführungen haben gezeigt, dass sich die Erkenntniswege in der Mathematik und der Physik in zahlreichen Punkten unterscheiden (Tabelle 3). Dies liegt insbesondere an den verschiedenen untersuchten Objekten. In der Mathematik werden einerseits konstruierte abstrakte Objekte betrachtet. Dies schließt natürlich nicht aus, dass mathematische Erkenntnisse auf reale Objekte übertragen werden können. Andererseits untersucht die Physik explizit reale Objekte und Situationen mit Hilfe der Mathematik. Dabei werden aber auch theoretische Überlegungen einbezogen.

Ein weiterer wichtiger Unterschied zwischen den beiden Wissenschaften ist die Qualität der Schlussfolgerungen. Aussagen in der Mathematik können entweder wahr oder falsch sein – andere Möglichkeiten gibt es nicht. Grundlage dafür ist der mathematische Beweis, bei dem Aussagen deduktiv aus Axiomen abgeleitet werden. So bleibt das einmal verifizierte Wissen für immer erhalten - mathematische Aussagen sind daher zeitunabhängig. In der Physik werden Aussagen auf der Grundlage von Modellen der Realität untersucht. Da die Modelle nicht der Realität selbst entsprechen, kann man nur sagen, ob es sich um eine gute oder schlechte Beschreibung handelt. Diese Eignung wird durch ein physikalisches Experiment überprüft. So kann es immer eine bessere Beschreibung geben – deshalb können physikalische Aussagen nicht unabhängig von der Zeit gesehen werden.

Die Rolle der Theorie und der Empirie ist daher in der Mathematik und Physik sehr unterschiedlich. In der Mathematik erfolgt die Überprüfung einer Aussage ausschließlich durch formales Beweisen und damit auf rein theoretischer Ebene. Die Generierung von Hypothesen kann jedoch empirisch erfolgen. Auch in

der Geschichte der Mathematik können verschiedene Beispiele mathematischer Theorien mit einem starken Bezug zur Empirie angeführt werden – so genannte empirische Theorien ([26], [27]). In der Physik müssen Aussagen über reale Sachverhalte mit empirischen Objekten überprüft werden. Diese werden durch das physikalische Experiment empirisch verifiziert. Physikalische Theorien beinhalten aber auch theoretische Elemente, so genannte theoretische Begriffe (z.B. Kraft), die keine direkten empirischen Referenzobjekte besitzen.

In der Mathematik und der Physik als Schulfächer verschwimmen diese recht strengen Grenzen – und das steht nicht im Gegensatz zu einer adäquaten Theorieentwicklung. Schülerinnen und Schüler im Mathematikunterricht entwickeln das Wissen weitgehend auf der Grundlage von empirischen Objekten. Dazu gehören viele ikonische und enaktive Darstellungen sowie außermathematische Anwendungen, z.B. aus der Physik. Wie aus den obigen Ausführungen hervorgeht, sind neben dem formalen Beweis auch andere informelle experimentelle Beweisarten möglich, die nicht den Anforderungen der Mathematik als Wissenschaft entsprechen. Dennoch können sie eine sinnvolle Grundlage für die Entwicklung des Wissens der Schüler bilden. Im Physikunterricht verwenden jüngere Schüler vor allem empirische Argumente, um Theorien zu entwickeln und zu begründen. In höheren Klassen werden zunehmend theoretische Elemente aus der Mathematik in die Theorieentwicklung einbezogen.

6.2. Folgerungen für die Lehrerbildung

Der Umgang mit den Erkenntniswegen der Mathematik und Physik kann für Lehramtsstudierende und ausgebildete Lehrkräfte beider Fächer einen interessanten Diskussionsgegenstand darstellen. So kann die Beschäftigung mit der Thematik für die Präzisierung der Eigenschaften des eigenen Faches im Sinne der Konzepte „Nature of Science“ und „Auffassungen von Mathematik“ sorgen. Diese Einnahme einer Metaperspektive in Bezug auf das Argumentieren, Begründen, Experimentieren oder Beweisen kann dann zu einem reflektierten Umgang mit empirischen und theoretischen Elementen im Unterricht führen.

	Mathematik	Physik
Untersuchungsgegenstand	Konstruierte abstrakte Objekte	Reale Objekte oder Sachverhalte
Wahrheitsbegriff	Wahre / falsche Aussagen	Gute / schlechte Beschreibungen
Verifikation	Überprüfung der inneren Konsistenz	Passung an die Realität (und Überprüfung der inneren Konsistenz)
Theorie	Erkenntnis-sicherung durch deduktives Schließen	Einbezug theoretischer Begriffe
Empirie	Hypothesenentwicklung mit empirischen Herangehensweisen	Erkenntnis-sicherung durch empirische Überprüfung

Tab. 3: Vergleich der Erkenntnismethoden der Mathematik und der Physik

7. Literatur

- [1] Kraus, S., Krause, E., Dilling, F. (2018): InterTeTra - A German-Vietnamese project combining physics and mathematics didactics. In: Vietnam Journal of Education, 2 (5), S. 1-8.
- [2] Dilling, F., Holten, K., Krause, E. (2019, online first): Explikation möglicher inhaltlicher Forschungsgegenstände für eine Wissenschaftskollaboration der Mathematik- und Physikdidaktik – Eine vergleichende Inhaltsanalyse aktueller deutschsprachiger Handbücher und Tagungsbände. In: *Mathematica Didactica*.
- [3] Kircher, E., Girwidz, R., Häussler, P. (2010): Physikdidaktik. Theorie und Praxis. Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum.
- [4] Popper, K.R. (1976): Logik der Forschung. Tübingen: J.C.B. Mohr.
- [5] Feyerabend, P. (1986): Wider den Methoden-zwang. Frankfurt: Suhrkamp.
- [6] Kuhn, W. (1983): Das Wechselspiel von Theorie und Experiment im physikalischen Erkenntnisprozess. In: Praxis der Naturwissenschaften - Physik. 83 (12).
- [7] Kuhn, T.S. (1976): Die Struktur wissenschaftlicher Revolutionen. Frankfurt: Suhrkamp.
- [8] Lakatos, I. (1974): Falsifikation und Methodologie wissenschaftlicher Forschungsprogramme. In: Lakatos, I., Musgrave, A. (Hrsg.), Kritik und Erkenntnisfortschritt. Braunschweig: Vieweg, S. 89–189.
- [9] Schwarz, O. (2009): Die Theorie des Experiments. Aus der Sicht der Physik, der Physikgeschichte und der Physikdidaktik. In: Geographie und Schule, 31 (180), S. 15-21.

- [10] Schwarz, O. (2016): Vorwort zu Kuhn, W.: Ideengeschichte der Physik. Eine Analyse der Entwicklung der Physik im historischen Kontext. Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum.
- [11] Kuhn, W. (1990): Ziel und Struktur der Physikalischen Theorien. Praxis der Naturwissenschaften - Physik 39 (2), S. 2–9.
- [12] Kuhn, W. (2016): Ideengeschichte der Physik. Eine Analyse der Entwicklung der Physik im historischen Kontext. Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum.
- [13] Militschenko, I., Kraus, S. (2017): Entwicklungslinien der Mathematisierung der Physik. Die Rolle der Deduktion in der experimentellen Methode. In: *Der Mathematikunterricht* 63 (5), S. 21–29.
- [14] Kultusministerkonferenz (2005): Bildungsstandards im Fach Physik für den Mittleren Schulabschluss (Jahrgangsstufe 10). Beschluss vom 16.12.2004. online verfügbar unter: https://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen_beschluesse/2004/2004_12_16-Bildungsstandards-Physik-Mittleren-SA.pdf. (abgerufen am 15.01.2019)
- [15] Hammann, M. (2004): Kompetenzentwicklungsmodelle: Merkmale und ihre Bedeutung – dargestellt anhand von Kompetenzen beim Experimentieren. In: *Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht*, 57 (4), S.196–203.
- [16] Schreiber N., Theyßen, H., Schecker, H. (2009): Experimentelle Kompetenz messen?! In: *Physik und Didaktik in Schule und Hochschule*. PhyDidA, 8 (3), S. 92–101.
- [17] Muckenfuss, H. (2010): Experimentieren und Versuche machen. Erkenntnistheoretische Aspekte der Sachbegegnung im naturwissenschaftlichen Unterricht. Veröffentlichung im Rahmen des 23. Karlsruher Didaktik-Workshops. Online verfügbar unter: http://www.physikdidaktik.uni-karlsruhe.de/tagungen/didaktik-workshop10/01_muckenfuss_text.pdf (abgerufen am 15.01.2019).
- [18] Höttecke, D. (2008): Fachliche Klärung des Experimentierens. In: Höttecke, D. (Hrsg.): Kompetenzen, Kompetenzmodelle, Kompetenzentwicklung. Gesellschaft für Didaktik der Chemie und Physik, Jahrestagung in Essen 2007. Münster: Lit-Verlag.
- [19] Girwidz, R. (2010): Medien im Physikunterricht. In Kircher, E., Girwidz, R., Häussler, P. (Hrsg.), *Physikdidaktik. Theorie und Praxis*. Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum.
- [20] Ludwig, T. (2017): Argumentieren beim Experimentieren in der Physik. Die Bedeutung personaler und situationaler Faktoren. Online verfügbar unter: <https://edoc.hu-berlin.de/bitstream/handle/18452/19085/ludwig.pdf?sequence=6&isAllowed=y> (abgerufen am 15.01.2019).
- [21] Gromadecki, U., Mikelskis-Seifert, S. (2005): Argumentieren als naturwissenschaftliche Arbeitsweise. In: Pitton, A. (Hrsg.), *Beiträge zur GDCP-Tagung 2005 in Paderborn*, Nr. L. 26, Münster: Lit-Verlag.
- [22] Gromadecki, U. (2008): Argumente in physikalischen Kontexten. Welche physikalischen Geltungsgründe halten Physikanfänger für überzeugend? Berlin: Logos.
- [23] McComas, W. F. (1998): *The Nature of Science in Science Education*. Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publisher.
- [24] Heuser, H. (2009): *Lehrbuch der Analysis Teil 1*. Wiesbaden: Vieweg + Teubner.
- [25] Dilling, F., Witzke, I. (2019, angenommen): Epistemological Beliefs about Mathematics. Challenges and Chances for Mathematical Learning: Back to the Future. In: *ESU-8 Proceedings*.
- [26] Burscheid, H. J., Struve, H. (2010): *Mathematikdidaktik in Rekonstruktion: Ein Beitrag zu ihrer Grundlegung*. Hildesheim, Berlin: Franzbecker.
- [27] Witzke, I. (2009): *Die Entwicklung des Leibnizschen Calculus: Eine Fallstudie zur Theorieentwicklung in der Mathematik*. Hildesheim, Berlin: Franzbecker.
- [28] Dilling, F. (2019). *Der Einsatz der 3D-Druck-Technologie im Mathematikunterricht: Theoretische Grundlagen und exemplarische Anwendungen für die Analysis*. Wiesbaden: Springer Spektrum.
- [29] Jahnke, H. N., Ufer, S. (2015): Argumentieren und Beweisen. In: Bruder, R., Hefendehl-Hebeker, L., Schmidt-Thieme, B. & Weigand, H.-G. (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik*. Berlin, Wiesbaden: Springer Spektrum, S. 331–355.
- [30] Wittmann, E. C., Müller, G. (1988): Wann ist ein Beweis ein Beweis? In: Bender, P. (Hrsg.), *Mathematikdidaktik: Theorie und Praxis*. Berlin: Cornelsen, S. 237–257.
- [31] Dilling, F., Witzke, I. (2018): The Use of 3D-printing Technology in Calculus Education. In: *Vietnam Journal of Education*, 2 (5), S. 54–58.