Prozentgenaue Messung des Verhältnisses von Astronomischer Einheit und Lichtgeschwindigkeit

Thomas Hebbeker

III. Physikalisches Institut A, RWTH Aachen
hebbeker@physik.rwth-aachen.de

Kurzfassung

Der von der Erde aus gut zu beobachtende Jupitermond Io umrundet seinen Planeten mit einer Periode von 42,5 Stunden. Durch das regelmäßige Eintauchen des Mondes in den Jupiterschatten stellt dieses System eine Uhr dar. Im 17. Jahrhundert hat der Astronom Ole Rømer erkannt, dass sich die Zeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden Verfinsterungen im Laufe einiger Monate ändert, das Uhrsignal also manchmal zu früh oder zu spät beobachtet wird. Grund ist der variierende Abstand zwischen Jupiter und Erde in Verbindung mit der Endlichkeit der Lichtgeschwindigkeit, welche mit dieser Methode zum ersten Mal demonstriert werden konnte. Im Folgenden wird gezeigt, wie man der Rømerschen Idee folgend mit modernen und einfachen Mitteln das Verhältnis von Astronomischer Einheit, also des mittleren Abstandes Erde-Sonne, und Lichtgeschwindigkeit mit einer Genauigkeit von etwa ein Prozent messen kann. Bei vorgegebener Lichtgeschwindigkeit kann die Astronomische Einheit, die fundamentale Längenskala im Sonnensystem, entsprechend präzise bestimmt werden.

1. Motivation

Der mittlere Abstand zwischen Sonne und Erde heißt Astronomische Einheit (AE), gleichzeitig ist dies auch die große Halbachse der Erdbahn. Sie stellt die charakteristische absolute Längenskala im Sonnensystem dar, die nicht einfach zu bestimmen ist. Alle anderen Planetenabstände, genauer gesagt die großen Halbachsen a, können dann aus den gemessenen Umlaufperioden P, relativ zum Erdjahr J, mit dem dritten Keplerschen Gesetz bestimmt werden:

$$\left(\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{J}}\right)^2 \sim \left(\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{AE}}\right)^3 .$$

Das Newtonsche Gravitationsgesetz erlaubt ferner die Messung der Sonnenmasse M, wenn auch die Gravitationskonstante G bekannt ist:

$$\left(\frac{\mathrm{P}}{2\pi}\right)^2 = \frac{\mathrm{a}^3}{\mathrm{G\,M}} .$$

Das Rømersche Messverfahren bestimmt die Änderung der Lichtlaufzeit mit dem variierenden Abstand Erde-Jupiter, indem die Ankunftszeiten der „Uhrsignale“ der Jupitermonde gemessen werden. Die Methode liefert das Verhältnis T = AE/c von AE und Vakuumlichtgeschwindigkeit c; die Größe T hat also die Dimension Zeit. Da c aber sehr genau im Labor gemessen wurde, und im internationalen Einheitensystem ja inzwischen zur Definition der Längeneinheit Meter eingesetzt wird, bekommt man aus T sofort AE.

Die hier präsentierte Methode eignet sich sowohl für Schulen als auch für Astronomiepraktika an Universitäten. Man benötigt lediglich ein kleineres Teleskop einschließlich Montierung und eine Digitalkamera. Man lernt viel über Physik, Astronomie und geschichtliche Zusammenhänge. Man arbeitet im Team und führt eine statistische quantitative Datenauswertung durch. Schließlich ist mit den nächtlichen Beobachtungen sicher auch ein gewisser Reiz, aber auch eine Herausforderung verbunden.

2. Messprinzip

Die Idee für diese Messung geht auf Ole Rømer zurück, der im 17. Jahrhundert damit zum ersten Mal zeigen konnte, dass die Lichtgeschwindigkeit endlich ist (Rømer 1676). Sein Resultat betrug T = 11 Minuten, das ist die Zeit, die das Licht benötigt, die Strecke AE zurückzulegen. Der heutige Wert beträgt etwa 500 Sekunden, also gut 8 Minuten.

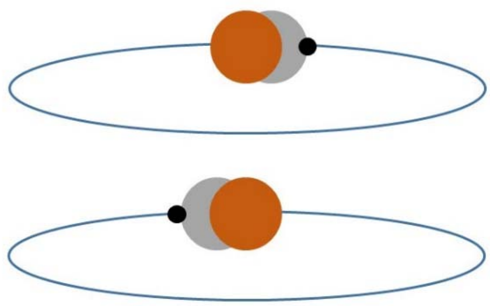

Abb. 1: Ein- und Austritt eines Mondes in den bzw. aus dem Jupiterschatten

Der Astronom Rømer beobachtete den inneren der vier galileischen Jupitermonde, Io, der in 1.77 Erdtagen Jupiter einmal umrundet. Da die Bahnebene der

Jupitermonde nur wenig von der Ekliptik abweicht, sehen wir Io periodisch hinter Jupiter verschwinden und auf der anderen Seite wieder auftauchen. Da Jupiter sehr viel heller ist als Io, ist der Mond direkt ne-

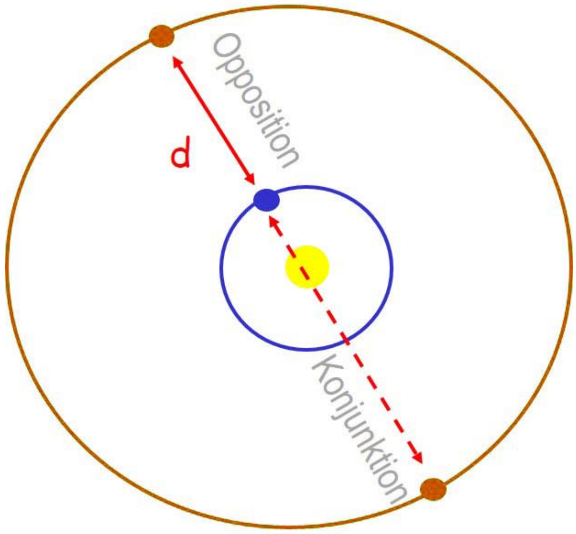

Abb. 2: Relative Stellung von Sonne, Erde und Jupiter bei Konjunktion und Opposition

ben der sehr hellen Jupiterscheibe aber nicht gut beobachtbar. Besser ist es, als „Uhrsignal" das Eintauchen in den (bzw. das Hervortreten aus dem) Jupiterschatten zu vermessen, siehe Abb. 1, dann gibt es einen kleinen Winkelabstand zwischen den beiden Himmelskörpern. Der Schatten des Planeten ist allerdings nur nutzbar, wenn Jupiter *nicht* genau in Opposition zur Sonne steht, siehe Abb. 2. In der Konjunktionsphase kann man natürlich ohnehin nicht beobachten, da die Sonne dann alles überstrahlt. Wenn man den im Laufe von Monaten variierenden Abstand d zwischen Jupiter und Erde, in Einheiten von AE, kennt, und die bei Änderung Δd von d auftretende Verspätung (oder Verfrühung) Δt der Ankunftszeit des Io-Signals misst, erhält man T aus

$$T = \frac{AE}{c} = \frac{\Delta t}{\Delta d/AE} = \frac{\Delta(t_M - t_0)}{\Delta d/AE} \quad .$$

Dabei bezeichnet t_M die gemessenen Ankunftszeiten und t_0 ist der entsprechende erwartete Wert bei unendlich großer Lichtgeschwindigkeit.

3. Messgenauigkeit

Eine naive Abschätzung der erreichbaren Genauigkeit für T geht so: Zwischen Konjunktion und Opposition von Jupiter variiert der Abstand Δd um einen Erdbahndurchmesser, also um etwa zwei AE, siehe Abb. 2. Die entsprechende Ankunftszeitvariation beträgt mit AE = 150 Millionen km und c = 300 000 km/s also ungefähr Δt = 1000 Sekunden. Kennt man Δd präzise, und misst Δt auf eine Sekunde genau, käme man auf eine relative Messgenauigkeit für T von 1 Promille! So funktioniert das aber leider nicht, man muss nämlich folgende Schwierigkeiten beachten und meistern:

- Erstens kann man weder bei Konjunktion noch bei Opposition messen, siehe obige Bemerkungen, die beobachtbaren Abstandsvariationen sind also kleiner als 2 AE.
- Schlimmer noch, die Verdunklung von Io beim Eintritt in den Jupiterschatten (und entsprechend das Ende der Verfinsterung) erfolgt nicht instantan, sondern dauert wegen der Größe des Mondes mehrere Minuten! Man muss also das Uhrsignal genauer definieren und entsprechend messen. Die Lösung besteht in der Messung der Lichtkurve, also der Io-Helligkeit über einige Minuten, während des Eintauchens in den Jupiterschatten (bzw. beim Auftauchen). Den Referenzzeitpunkt definieren wir dann dadurch, dass die halbe Maximalhelligkeit erreicht wird, der Mond also (ungefähr) halb von der Sonne beleuchtet ist.
- Vielleicht gänzlich unerwartet ist die „Ungenauigkeit" des periodischen zeitlichen Auftretens der Jupitermondsignale, unabhängig von den Lichtlaufzeiten. Dieser Effekt passt nicht zu unserer naiven Vorstellung von „astronomischer Genauigkeit"! Er kommt dadurch zustande, dass sich die Monde Io, Europa und Ganymed gegenseitig gravitativ beeinflussen, sie bilden eine „Laplace-Resonanz". Dadurch weichen die Mond-"Uhren" deutlich vom einfachen periodischen Verhalten ab. Eine Simulationsrechnung zeigt wie groß dieser Effekt ist, siehe Abb. 3. Selbst bei Io beträgt die Zeitverschiebung $\pm$ 30 s, das ist nicht vernachlässigbar.

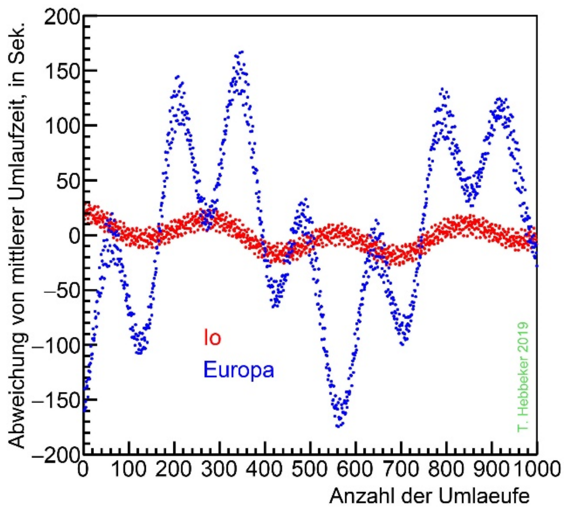

Abb. 3: Zeitliche Abweichung von der mittleren Umlaufzeit für die Jupitermonde Io und Europa, als Funktion der Zahl der Umläufe. Simulationsrechnung.

Um eine prozentgenaue Messung von AE/c zu erreichen, muss man folgendermaßen verfahren:

- Messung der Zeitpunkte t_M der halben Mondhelligkeit auf wenige Sekunden genau.
- Berechnung der erwarteten Zeitpunkte t_0 *ohne* Lichtlaufzeiteffekte und der Abstandsänderungen Δd mit einem Planetariumsprogramm wie „Redshift“ oder „Stellarium“.

Der zweite Punkt mag unbefriedigend erscheinen, aber eine eigene genaue Rechnung all dieser sich gegenseitig gravitativ beeinflussenden Bewegungen ist für ein Projekt an Schule oder Hochschule zu aufwendig.

4. **Beobachtungen / Messungen.**

Um T zu bestimmen, muss man mindestens zwei Io-Schatten-Ereignisse vermessen, bei möglichst großem Δd. Besser ist es natürlich, mehr Ereignisse einzubeziehen, um die Genauigkeit zu erhöhen, und um die Konsistenz der Ergebnisse zu überprüfen. In einem größeren Team kann man die nächtlichen Messkampagnen entsprechend aufteilen.

Abb. 4: Foto von Io (links, kurz nach dem Austritt aus dem Jupiterschatten), Jupiter und Europa (rechts), vom 25. Juni 2018. Vergrößerter Ausschnitt.

Ich habe von meinem Standort Neu-Moresnet in Belgien (observatory code K85), in der Nachbarschaft von Aachen, in insgesamt 21 Nächten gemessen, im Zeitraum Februar 2016 bis Juni 2018. Die ungefähren

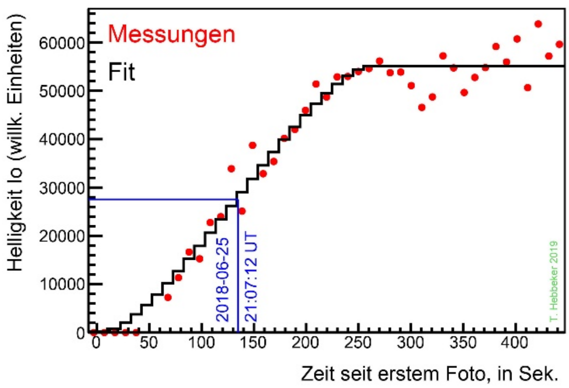

Abb. 5: Am 25. Juni 2018 gemessene Lichtkurve für den Jupitermond Io, zusammen mit einem Fit. Die halbe Maximalhelligkeit wird um 21:07:12 UT erreicht.

Zeitpunkte der Io-Mondereignisse (Anfang bzw. Ende der Verfinsterung durch den Jupiterschatten) habe ich einer Astronomiezeitschrift entnommen. Meine Ausrüstung besteht aus einer Montierung vom Typ 10Micron GM 1000 HPS, einem Spiegelteleskop Celestron C8 Edge HD und einer Digitalkamera Canon EOS 70D. Ich habe jeweils eine Serie von etwa 40 Fotos im Abstand von 10 Sekunden aufgenommen, bei einem Iso-Wert von 100 und einer Belichtungszeit von typisch nur 0.5 Sekunden – die Monde sind hell! Abb. 4 zeigt ein solches Foto. Ich habe sowohl bei Eintritt als auch bei Austritt aus dem Schatten Messungen durchgeführt.

5. **Auswertung der Lichtkurven**

Um die Helligkeiten des Mondes Io zu bestimmen, habe ich das Astronomieprogramm „IRIS“ eingesetzt. Man verschiebt dazu im Foto einfach einen kleinen kreisförmigen Cursor bis er den Mond symmetrisch umschließt. Auf diese Weise habe ich im gleichen Bild auch die Helligkeit für einen zweiten Mond, zum Beispiel Europa, bestimmt. Diesen Wert habe ich zur Kalibration benutzt, um auf Helligkeitsschwankungen, aufgrund atmosphärischer Effekte, während einer Aufnahmeserie zu korrigieren. Eine absolute Helligkeitsbestimmung von Io ist nicht erforderlich. Abb. 5 zeigt exemplarisch die für den 25. Juni 2018 erhaltene Lichtkurve, beim Austritt aus dem Jupiterschatten. Die roten Messpunkte streuen deutlich, aber aufgrund der Vielzahl der Einzelmessungen gibt sich ein klarer Verlauf, der mit einer einfachen Funktion angepasst werden kann. Letztere modelliert die geometrischen Verhältnisse beim Passieren der Schattengrenze durch den runden Mond. Man kann dann auch den Referenzzeitpunkt, bei dem die halbe Maximalhelligkeit erreicht ist, ablesen bzw. aus dem Fit berechnen, hier 21:07:12 UT, mit einer Unsicherheit von etwa fünf Sekunden. Zu diesem Zeitpunkt betrug der Abstand Erde-Jupiter 4,70 AE. Bei unendlicher Lichtgeschwindigkeit wäre der Austritt aus dem Jupiterschatten schon um 20:28:07 UT auf der Erde zu beobachten gewesen.

6. **Resultate**

Abb. 6 fasst die Ergebnisse aller 21 Beobachtungsnächte zusammen. Die gemessenen Zeiten t_M, zusammen mit den zugehörigen für unendlich große Lichtgeschwindigkeit vorhergesagten Zeiten t_0, ergeben die Verspätungen Δt, die positiv oder negativ sein können. Offenbar liegen die 21 Messpunkte alle auf einer Linie, was unsere Modellannahmen bestätigt. Ein Geradenfit liefert die Steigung

$$T = \frac{\mathrm{AE}}{c} = (498{,}4\ \pm 4{,}2\ \pm 2{,}8)\ \mathrm{s} = (498{,}4\ \pm 5{,}0)\ \mathrm{s}\,.$$

Die erste der angegebenen Unsicherheiten von 4,2 s ergibt sich aus der Genauigkeit der Zeitmessungen, der Beitrag von 2,8 s berücksichtigt Ungenauigkeiten im Planetariumsprogramm und die Vernachlässigung der Mondphasen, die auch bei den Jupitermonden auftreten, allerdings ist dieser Effekt klein. Die erzielte Genauigkeit von insgesamt $\pm$ 5 Sekunden beträgt also ein Prozent.

Mit dem bekannten Wert der Lichtgeschwindigkeit von 299 792 km/s folgt für die Astronomische Einheit:

$$AE = (149{,}4\ \pm 1{,}5)\ \cdot\ 10^6\ \text{km}$$

in Übereinstimmung mit dem „offiziellen" Zahlenwert von 149,598. Schließlich kann man auch noch die Sonnenmasse M berechnen, wenn man den bekannten Wert für die Gravitationskonstante G benutzt:

$$M = (1{,}98\ \pm 0{,}06) \cdot\ 10^{30}\ \text{kg}$$

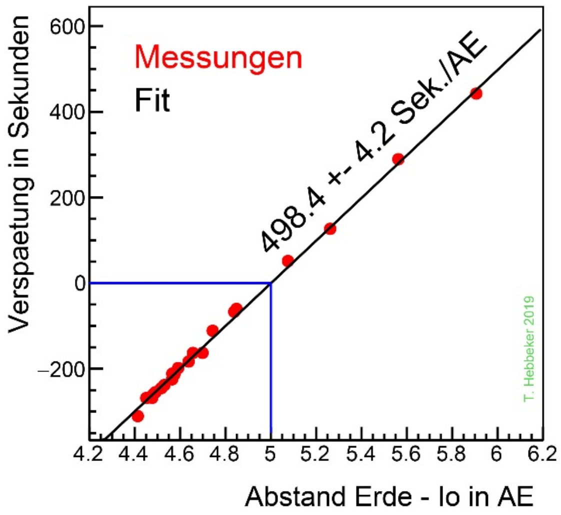

Abb. 6: Gemessene Zeitverschiebung des Io-Uhrensignals als Funktion des Abstandes d. Der Nullpunkt der Zeitskala ist hier willkürlich für d = 5 AE festgelegt, er ist ohne Bedeutung. Der Geradenfit ergibt das Verhältnis AE/c.

Insgesamt sind das schöne Ergebnisse, wenn man bedenkt, dass man diese mit vergleichsweise einfachen Mitteln erzielen konnte.

7. Literatur

Rømer, Ole (1676): Démonstration touchant le mouvement de la lumière trouvé par M. Rømer de l'Académie Royale des Sciences. Le Journal des Sçavans. Paris 1676, 233–236