

## Vektoren in der mathematik- und physikdidaktischen Forschung

- Stoffdidaktischverbindende Ansätze zwischen linearer Algebra und klassischer Mechanik -

Frederik Dilling\*

\*Universität Siegen, Herrngarten 3, 57072 Siegen  
dilling@mathematik.uni-siegen.de

### Kurzfassung

Der Vektorbegriff stellt einen zentralen Begriff des Mathematik- und Physikunterrichts dar. Aus diesem Grund wird der Umgang mit Vektoren in den Fachdidaktiken Mathematik und Physik in vielfältiger Weise untersucht. Der vorliegende Beitrag stellt die wichtigsten Erkenntnisse beider Didaktiken im Rahmen eines stoffdidaktischverbindenden Forschungsanliegens gegenüber und erläutert, wie sich diese im Unterricht sowie in der Forschung nutzen lassen.

### 1. Der Begriff des stoffdidaktischverbindenden Forschens

Der Begriff des stoffdidaktischverbindenden Forschens baut auf dem von Witzke (2015) geprägten und in Holten und Witzke (2017) weiterentwickelten Begriffs des fachdidaktischverbindenden Forschens und Lehrens auf. Darunter wird eine interdisziplinäre Kooperation verschiedener Fachdidaktiken verstanden, die einem übergeordneten gemeinsamen Ziel folgt. Das stoffdidaktischverbindende Forschen ist somit eine Sonderform des fachdidaktischverbindenden Forschens, in der die stoffdidaktischen Erkenntnisse bei verwandten Inhalten der Fächer verglichen und gemeinsam weiterentwickelt werden.

Im Folgenden soll ein stoffdidaktischer Austausch am Beispiel des Vektorbegriffs in der Mathematik- und Physikdidaktik skizziert werden.

### 2. Relevanz des Austausches zum Vektorbegriff

Der Vektorbegriff und die Vektorrechnung sind zentrale Sachverhalte der modernen Mathematik sowie Thema der Schulmathematik der Sekundarstufe II. Filler & Todorova (2012) schreiben hierzu:

„Der Vektorbegriff gehört zu den zentralen Strukturbegriffen der Mathematik und besitzt mannigfaltige Anwendungen.“ (S.47)

Die entscheidende Bedeutung erlangte der Vektorbegriff nach Wittmann (1996) aber durch seine Anwendung in der Physik:

„[...] seine wesentliche Legitimation gewinnt der Vektorbegriff aber vor allem aus dem fächerübergreifenden Bezug zum Physikunterricht. [...] Diese Verbindung zum Fach Physik [muss] gesucht und betont werden.“ (S.97)

Filler (2011) betont die historische Entwicklung des Vektorbegriffs sowohl aus geometrischen als auch physikalischen Anforderungen heraus:

„Die Vektorrechnung entstand in einem langen historischen Prozess vor allem aufgrund des Bedürfnisses nach einem geometrischen Kalkül sowie aus den Anforderungen der Physik heraus.“ (S.85)

Da der Vektorbegriff einer der zentralen Begriffe der Schulphysik und –mathematik ist, scheint ein stoffdidaktischer Austausch in diesem Bereich besonders fruchtbar zu sein. Die wichtigsten stoffdidaktischen Erkenntnisse der Mathematik- und Physikdidaktik zum Vektorbegriff sollen im Folgenden dargestellt und für einen Austausch aufbereitet werden.

### 3. Vektoren in der mathematikdidaktischen Forschung

In der Mathematikdidaktik werden unterschiedliche Herangehensweisen an den Vektorbegriff diskutiert. Filler & Todorova (2012) unterscheiden die Zugänge über Pfeilklassen, n-Tupel sowie Vektorraumaxiome. Sie sind in Abb.1 gegenübergestellt.

Beim Zugang über Pfeilklassen werden Vektoren als gleich lange und gleich gerichtete Pfeile definiert. Die geometrische Herangehensweise habe eine große Bedeutung für das Begriffsverständnis der Schüler. Eine Schwierigkeit ergebe sich allerdings in der Identifikation von Vektoren mit einzelnen Pfeilen oder konkreten Objekten (Fehlvorstellung „Vektor=Pfeil“).

Malle (2005a) kritisiert den Zugang über Pfeilklassen stark. Er sei „unbrauchbar“ für die analytische Geometrie, da man in Punkten und Pfeilen, aber nicht in Pfeilklassen denken würde, sowie „unbrauchbar“ für die Physik, da fast alle in der Physik vorkommenden Vektoren keine Pfeilklassen seien. Weitere Schwierigkeiten ergeben sich in der undurchsichtigen Unterscheidung zwischen Klasse und Repräsentant sowie in der aufwändigen Einführung der Rechenoperationen. Auch aus diesen Gründen werde das Pfeilklassenmodell im Unterricht selten konsequent angewendet.

Ein großes Problem sehen Henn & Filler (2015) in der Verwendung des Hilfskonstrukts „Ortsvektor“ zur Vermeidung der Unterscheidung einer Vektoraddition und einer Punkt-Vektoraddition. Punkte auf einmal in einer anderen Form zu schreiben sei für Schüler unnatürlich. Die Assoziation des Ortsvektors mit einem konkreten Pfeil erschwere die Entwicklung des Vektorbegriffs und beschränke die Idee des Koordinatisierens. Die Verwendung in Geradengleichungen Sorge zudem dafür, dass diese nicht mehr als Punktmenge verstanden werden.

Der Zugang über n-Tupel verwendet Vektoren als n-Tupel reeller Zahlen. Diese werden dann im weiteren Unterrichtsverlauf für geometrische Anwendungen genutzt. Dies berge häufig die Schwierigkeit, dass diese arithmetische Auffassung mit der Zeit verblasst. Bender (1994) kritisiert an diesem Zugang die Rolle der Linearen Algebra als „Trivialisierer“. Geometrische Aspekte seien zum Aufbau tragfähiger Grundvorstellungen besonders wichtig. Deshalb solle der Transfer zwischen einem arithmetischen und einem geometrischen Vektormodell im Unterricht geübt werden. Malle (2005a) empfiehlt, Vektoren als n-Tupel einzuführen und anschließend geometrisch als Punkte und Pfeile, nicht jedoch als Pfeilklassen, zu deuten. Für die Punkte und Pfeile werden keine Rechenoperationen definiert.

Ein dritter möglicher Zugang zum Vektorbegriff geht über Vektorraumaxiome. Dieser Ansatz wurde in Schulen vor allem in den 1970er Jahren verwendet und ist heutzutage meist nur noch Teil der universitären Linearen Algebra. Filler & Todorova (2012) bezeichnen diese Methode als fachlich elegant, didaktisch allerdings kaum zu rechtfertigen.

Malle (2005b) untersucht verschiedene Schwierigkeiten von Schülern mit Vektoren. Vielfach trete, insbesondere bei einer geometrischen Einführung des Vektorbegriffs, eine Interpretation von Vektoren als Einzelpfeile auf. Auch falle es Schülern schwer, Vektoren algebraisch aufzufassen. Demnach werden Vektoren von einigen Schülern generell geometrisch gedeutet. Die Angabe von Pfeilen durch einzelne Zahlenpaare wird von vielen Schülern nicht akzeptiert, es sei die Angabe eines Anfangs- und eines Endpunkts nötig. Nullvektoren werden von den Schülern nur als Punkte, nicht aber als Pfeile, interpretiert.

Weitere Probleme entstehen durch ein Unverstandenes Anwenden (Standardaufgaben können gerechnet werden, ohne dass das Verfahren verstanden wird), beim Aufstellen von Formeln mit Vektoren (das Problem wird verstanden, kann aber nicht korrekt in eine Formel überführt werden) und beim Umgang mit Ortsvektoren (Vektoren werden generell als Ortspfeile mit dem Anfangspunkt im Ursprung dargestellt).

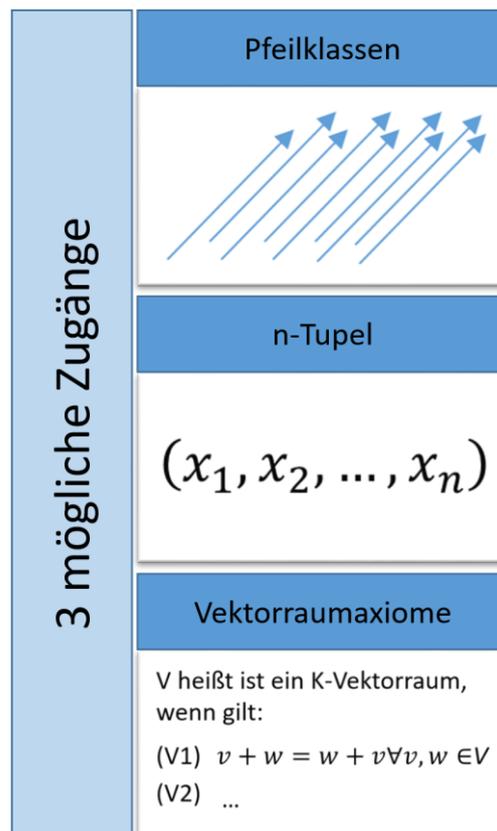


Abb.1: Drei Zugänge zum Vektorbegriff nach Filler & Todorova, (2012)

#### 4. Vektoren in der physikdidaktischen Forschung

Nach Boczianowski (2012) kommen Schüler mit vielfältigen Alltagserfahrungen zu Pfeilen in den Physikunterricht. Die häufige Verwendung von Pfeilen liege insbesondere an der Eingängigkeit des Pfeilsymbols. Die Erfahrungen der Schüler können zu Problemen bei der Begriffsbildung führen, da für Pfeile im Physikunterricht meist andere Regeln gelten als für alltägliche Pfeile oder Pfeildarstellungen in anderen Fächern. Einige Beispiele für Pfeile aus dem Alltag und dem Physikunterricht sind in Abb.2 dargestellt.

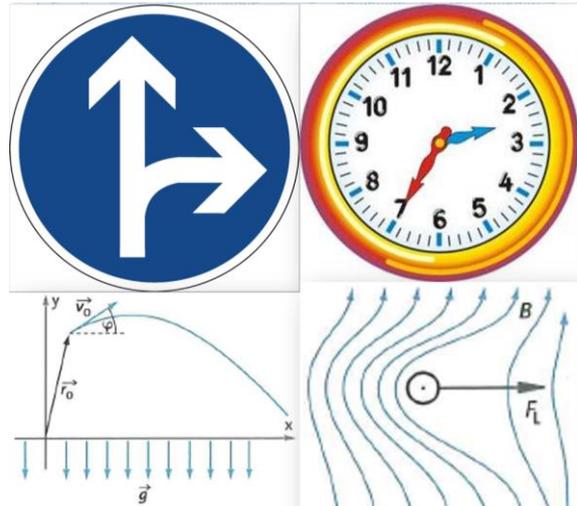
Die häufigste Verwendungssituation von Pfeilen im Physikunterricht ist die Darstellung von gerichteten Größen als Vektorpfeile. Die Pfeillänge gibt dabei den Betrag der Größe an, die Pfeilrichtung die entsprechende Richtung in welche die Größe wirkt. Dies ermögliche, so Boczianowski (2012), ein Modellieren physikalischer Phänomene ohne Arithmetisierung von Vektoren. Das Operieren mit Pfeilen sei anschaulich, übersichtlich und stelle keine Black-Box dar. Grenzen ergeben sich bei der Einführung von Variablen, da diese nicht durch feste Pfeile darstellbar sind. Als „übergeordnetes mentales Werkzeug“ können Vektorpfeile in verschiedenen Themenbereichen konsequent verwendet werden. Die Entwicklung eines einheitlichen Formalismus habe ein unterrichtsinhalte-verbindendes Potential.

Beim Lesen von Darstellungen mit Vektorpfeilen sowie mit Pfeilen generell treten bei Schülern nach

Kraus (2016) unterschiedliche Probleme auf. In Schulbüchern werden manchmal einzelne Vektorpfeile nicht dargestellt, um andere zu betonen. Ein Beispiel für eine solche Aspektauswahl ist das Auslassen der Gegenkraft, obwohl diese nach dem dritten newtonschen Axiom immer entsteht. Probleme entstehen auch, wenn Vektorpfeile mit unterschiedlichen Bedeutungen ähnlich dargestellt werden. Ein Beispiel für die sogenannte Polysemie sind in einem Diagramm dargestellte Orts-, Geschwindigkeits-, Beschleunigungs- und Kraftvektorpfeile, die lediglich durch unterschiedliche Farben voneinander abgegrenzt sind. Zudem werden im Verlauf des Unterrichts Modelle mit Pfeilen zunehmend mit weiteren Bedeutungen versehen (Bedeutungsaufladung). Auch werden Pfeile von Schülern oft als zeitliche Veränderung gelesen, selbst wenn dies wie z.B. bei Vektorpfeilen nicht der Fall ist.

Reusch (2012) betont, dass vielen Schülern die Unterscheidung zwischen gerichteten und ungerichteten Größen schwerfällt. Dies liege vor allem an der häufigen Beschränkung auf eindimensionale Fälle, wodurch der Unterschied zwischen Vektor, Vektorkomponente und Betrag nicht offensichtlich werde. Um auftretende Probleme zu verhindern, sei eine frühzeitige Behandlung gerichteter Größen in Pfeildarstellungen und eine gezielte Thematisierung der Änderung bei gerichteten und ungerichteten Größen nötig.

Die Mechanik nimmt in Bezug auf den Vektorbegriff im Physikunterricht eine besondere Rolle ein, da die Schüler hier meist das erste Mal mit einer Vielzahl unterschiedlicher gerichteter Größen in Kontakt kommen. Boczianowski (2012) beschreibt die Behandlung von Verschiebungs-, Geschwindigkeits- und Kraftpfeilen. Bei Verschiebungspfeilen steht der Schaft des Pfeils für den zurückgelegten Weg. Bei Geschwindigkeiten ist der Pfeil in Bewegungsrichtung ausgerichtet und die Länge steht für den momentanen Geschwindigkeitsbetrag. Für Schüler sei dieser Unterschied häufig nicht präsent, was zu einer Vermischung von Orts- und Geschwindigkeitsraum führe. Daher sollten Skizzen mit Orts- und Geschwindigkeitspfeilen immer separat angefertigt werden. Kraftpfeile seien häufig die einzige Anwendung im Physikunterricht, in denen Pfeildarstellungen verwendet werden. Dabei ist der Pfeil in Krafrichtung ausgerichtet, die Länge steht für den Kraftbetrag und der Fußpunkt gibt den Angriffspunkt der Kraft an. Einiges spreche allerdings dafür, auf eine Festlegung des Fußpunktes als Angriffspunkt zu verzichten. Dadurch sei die Behandlung komplexerer und sinnhafterer Aufgaben möglich.



**Abb.2:** Darstellungen mit Pfeilen im Alltag und in der Physik (Quellen: www.grundschulmaterial.de, www.dvr.de, D. Kähler (2012): Fit fürs Abi. Oberstufenwissen Physik. Braunschweig: Schroedel)

## 5. Fazit

Es hat sich gezeigt, dass die Mathematik- und Physikdidaktik unterschiedliche Facetten des Umgangs mit Vektoren beleuchten. Ein stoffdidaktischer Austausch kann somit zu einem für Fachdidaktiker relevant sein, die die Forschung zum Vektorbegriff ergänzen und erweitern möchten, zum anderen ist er für Lehrkräfte der Fächer Mathematik und Physik von Bedeutung. So kommen Schüler häufig zum ersten Mal im Physikunterricht mit Vektoren in Kontakt. Daher sind grundlegende Kenntnisse über Zugänge zum Vektorbegriff sinnvoll. Im Mathematikunterricht wird im Zuge der Vektorrechnung häufig auf physikalische Beispiele zurückgegriffen. Aus diesem Grund sollte der richtige Umgang mit diesen Anwendungen bekannt sein. Ein reflektierter und die Besonderheiten des anderen Faches beachtender Mathematik- und Physikunterricht kann die Bildung isolierter Begriffe verhindern.

## 6. Literatur

- Bender, P. (1994): Probleme mathematischer Begriffsbildung diskutiert am Beispiel der Vektor-Addition. *mathematica didactica* 17 (1), S. 3–27.
- Boczianowski, F. (2012): Pfeile als themenübergreifendes Symbolsystem im Physikunterricht. In: *PdN Physik in der Schule* 61 (4), S. 5–10.
- Filler, A. (2011). *Elementare Lineare Algebra. Linearisieren und Koordinatisieren*. Heidelberg: Springer Spektrum.
- Filler, A. & Todorova, A. D. (2012). Der Vektorbegriff. Verschiedene Wege zur Einführung. *mathematik lehren* (174), S. 47–51.
- Henn, H.-W. & Filler, A. (2015). *Didaktik der Analytischen Geometrie und Linearen Algebra. Algebraisch verstehen - geometrisch veranschaulichen und anwenden*. Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum.

- Holten, K. & Witzke, I. (2017). Chancen und Herausforderungen fachdidaktischverbindender Elemente in der Lehramtsausbildung. *Beiträge zum Mathematikunterricht 2017*, 457-460.
- Kraus, M. E. (2016): Pfeile in der Physik: Die Schwierigkeiten beim ikonischen Modellieren. *PdN Physik in der Schule* 65 (6), S. 25–32.
- Malle, G. (2005a). Neue Wege in der Vektorgeometrie. *mathematik lehren* (133), S. 8–14.
- Malle, G. (2005b): Schwierigkeiten mit Vektoren. *mathematik lehren* (133), S. 16–19.
- Reusch, W. (2012): Nicht nur wie schnell, sondern auch wohin? Notwendigkeit und Möglichkeiten der differenzierten Behandlung ungerichteter und gerichteter Größen im Physikunterricht. In: *PdN Physik in der Schule* 61 (4), S. 11–17.
- Wittmann, G. (1996). Eine Unterrichtssequenz zum Vektorbegriff in der Sekundarstufe I. *mathematica didactica* 19 (1), S. 93–116.
- Witzke, I. (2015). Fachdidaktischverbindendes Lernen und Lehren im MINT-Bereich. *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*, 1008-1011.