The yet really very Simplest Representation of the Lorentz Transformation with and without GAALOP

Die aber auch allereinfachste Darstellung der Lorentz-Transformation mit und ohne GAALOP

– Extended Bilingual English and German version of paper [1], presented at the annual meeting of the Society of Mathematics Education (GDM) 2018 in Paderborn –

Martin Erik Horn

HWR – Hochschule für Wirtschaft und Recht Berlin / BSEL – Berlin School of Economics and Law
Badensche Str. 52 (Fach Nr. 63), D – 10825 Berlin / Germany
e_hornm@doz.hwr-berlin.de & mail@martinerikhorn.de

English Abstract

Enjoy your sandwich! Arbitrary Lorentz transformations can be thought and depicted as spacetime rotations. Arbitrary rotations can be thought and depicted as two successive reflections. And arbitrary reflections can be thought and depicted as simple sandwich products.
Therefore it will be shown in this paper, how arbitrary Lorentz transformations can be understood and discussed in an exceptionally simple way based on Geometric Algebra.
As arithmetic abilities of students will not always be sufficient in these days of unlimited access to pocket calculators, computing arbitrary Lorentz transformations by hand will be supplemented by solution strategies using the program tool GAALOP (Geometric Algebra Algorithms Optimizer). The use of GAALOP will make it possible to discuss and compute Lorentz transformations even in classes with students of restricted arithmetical and mathematical knowledge.

Kurzfassung

Enjoy your Sandwich! Beliebige Lorentz-Transformationen können als raumzeitliche Rotationen gedacht und dargestellt werden. Beliebige Rotationen können als Hintereinanderfolge zweier Reflexionen gedacht und dargestellt werden. Und beliebige Reflexionen können als einfache Sandwich-Produkte gedacht und dargestellt werden.
Im Beitrag wird deshalb gezeigt, wie beliebige Lorentz-Transformationen auf der Grundlage der Geometrischen Algebra in außerordentlich einfacher Art und Weise verstanden und diskutiert werden können.
Da im Zeitalter der unumschränkten Taschenrechnerverfügbarkeit die rechnerischen Fähigkeiten von Lernenden nicht immer zufriedenstellend sind, wird neben die Berechnung von beliebigen Lorentz-Transformationen per Hand die Nutzung des Programm-Tools GAALOP (Geometric Algebra Algorithms Optimizer) vorgestellt, um auch bei Lerngruppen mit beschränkten Mathematik-Vorkenntnissen Lorentz-Transformationen erfolgreich thematisieren und berechnen zu können.

1. Simplicity and easiness

Subject matter will appear simple and easily accessible, if the subject has been practiced and finding solution strategies has been exercised. And subject matter will appear complicated, if it has not been practiced and the search of solution strategies has not been exercised.

Therefore representing Lorentz transformations in the very simplest way will depend decisively on what students already have learned and practiced and which previous knowledge they already have achieved

In the first part of this paper Lorentz transformations will be discussed form the premise that we

1. Einfachheit und einfache Zugänglichkeit

Einfach und leicht zugänglich erscheint meist, was bereits eingeübt ist. Einfach und leicht zugänglich erscheinen Lösungsstrategien, die oft angewandt wurden. Und kompliziert erscheint, was nicht eingeübt und nicht oft angewandt wurde.

Die aber auch allereinfachste Darstellung der Lorentz-Transformation wird deshalb entscheidend davon abhängen, welche Vorkenntnisse die jeweilige Zielgruppe mitbringt und was von den Lernenden zuvor eingeübt wurde.

Im ersten Teil dieses Beitrags werden Lorentz-Transformationen unter der Prämisse betrachtet, live in a world without algebra – e.g. in the world of the old Babylonians who exercised excellent mathematics before Diophantus had created algebra.

2. The geometry of Lorentz transformations

What would have happened if Einstein and Minkowski had been born into an actual mathematical civilization knowing nothing about algebra? Of if a fictitious Einstein or Minkowski had lived at Old-Babylonian times? Would they have been able to discuss and to understand spacetime and Lorentz transformations mathematically?

Yes, they would. In a world without algebra the representation of Lorentz-Transformations can only be purely geometrically. Merely the geometry of simple rotations then is required. And these spacetime rotations can be modeled by simple reflections.

In a first step a spacetime coordinate system with a time-like ct-axis and a spatial x-axis can be transformed into a second, now primed spacetime coordinate system with ct'-axis and x'-axis (see left side of figure 1) by reflecting at the angle bisecting vector between the two time axes into ct- and ct'-directions.

The result of this first reflection now shows a correct time axis, as the ct-axis will then point into the former direction of the ct'-axis (see middle of figure 1). But the orientation of the coordinate system has changed: The x-axis does not point into the expected direction.

dass wir in einer Welt ohne Algebra leben – beispielsweise in der Welt der frühen Babylonier, die herausragende Mathematik betrieben, bevor Diophantus die Algebra erschuf.

2. Die Geometrie von Lorentz-Transformationen

Was wäre passiert, wenn Einstein und Minkowski in eine Menschheit hineingeboren worden wären, die die Algebra nicht erfunden hätte? Oder wenn sie tatsächlich vor Jahrtausenden zu Zeiten der Babylonier gelebt hätten? Wären sie in der Lage gewesen, Raumzeit und Lorentz-Transformationen zu diskutieren und mathematisch zu verstehen?

Ja, sie wären dazu in der Lage gewesen. In einer Welt ohne Algebra kann die Darstellung von Lorentz-Transformationen rein geometrisch erfolgen. Benötigt wird dann lediglich die Geometrie simpler Rotationen. Und diese raumzeitlichen Rotationen können durch simple Reflexionen modelliert werden.

Ein raumzeitliches Koordinatensystem mit zeitlicher ct-Achse und räumlicher x-Achse kann in einem ersten Schritt in ein zweites, hier gestrichenes raumzeitliches Koordinatensystem mit ct'-Achse und x'-Achse (siehe Abb. 1 links) überführt werden, indem eine Spiegelung an der zeitlichen Winkelhalbierenden zwischen ct- und ct'-Achse erfolgt.

Das Ergebnis dieser ersten Reflexion führt zwar zur korrekten Ausrichtung der ct-Achse, die nun in die ursprüngliche Richtung der ct'-Achse zeigt (siehe Abb. 1 Mitte). Jedoch hat sich die Händigkeit des Koordinatensystems geändert: Die x-Achse weist der erwarteten Richtung entgegen.

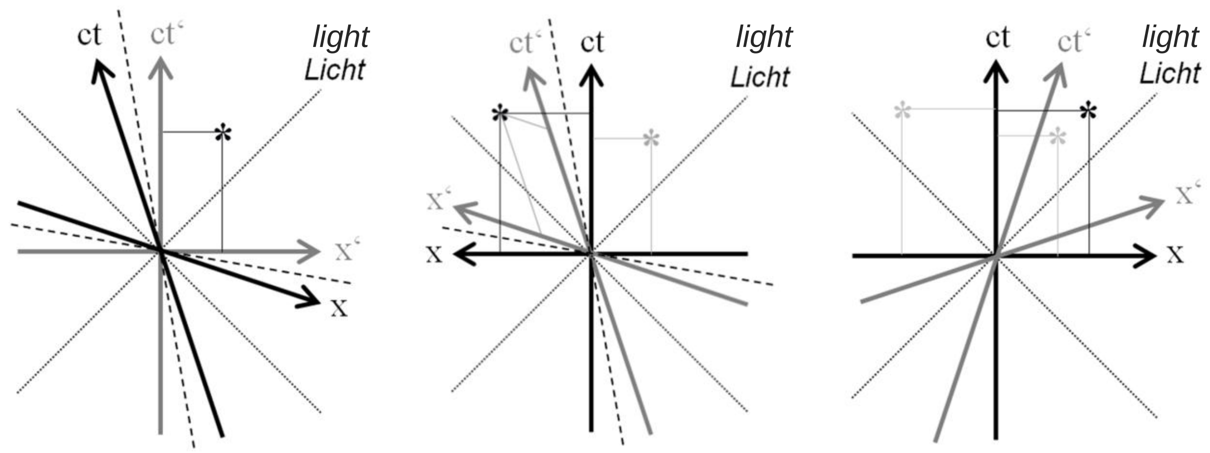

Fig. 1: The Lorentz transformation represented by two successive spacetime reflections.
Abb. 1: Die Lorentz-Transformation als Hintereinanderfolge zweier raumzeitlicher Reflexionen.

The correct result can be found by a second reflection at the left primed ct'-axis, which naturally has to be perpendicular to the new spatial x-axis of the middle figure 1. This second reflection will then reverse the direction of the x-axis.

The new coordinates of an event (marked by a star in figure 1) can now be read at the transformed co-

Dies kann korrigiert werden, indem eine zweite Reflexion an der links gestrichenen ct'-Achse, die naturgemäß senkrecht zur neuen x-Achse (Abb. 1 Mitte) steht, die Orientierung dieser räumlichen Achse umkehrt.

Die nun ablesbaren Koordinaten eines Ereignisses (gekennzeichnet als Stern in Abb. 1) des nun rechts ordinate system on the right side of figure 1. They are the Lorentz rotated unprimed values of the original primed inertial system.

By splitting a Lorentz transformation (which can be seen as a spacetime rotation) into two successive spacetime reflections, all steps can be drawn easily. And by measuring coordinate positions as lengths in these drawings, the results of Lorentz transformations can be gained totally without calculations.

ungestrichenen Inertialsystems sind die Lorentz-transformierten Werte des ursprünglichen, gestrichenen Inertialsystems.

Bei dieser Zerlegung der Lorentz-Transformation als raumzeitliche Rotation in zwei aufeinander folgende raumzeitliche Reflexionen können alle Schritte zeichnerisch einfach vollzogen und so jede Lorentz-Transformation gänzlich ohne algebraische Rechnungen durchgeführt werden.

3. Sandwich products

In Geometric Algebra, reflections are described by sandwich products. A geometric quantity (for example the spacetime position vector **r**, which shows the spatial and temporal positions of an event) is reflected in a second geometric quantity (for example in an axis pointing into the direction of a time-like unit vector **n** with $\mathbf{n}^2 = 1$) by multiplying the reflected quantity in sandwhich-like form [8], [9] from left and right by the reflecting quantity.

3. Sandwich-Produkte

In der Geometrischen Algebra werden Reflexionen durch Sandwich-Produkte beschrieben. Eine geometrische Größe (also beispielsweise der Ort und Zeitpunkt eines Ereignisses beschreibende Vektor **r**) wird an einer zweiten geometrischen Größe (also beispielsweise an einer Achse, die in Richtung eines zeitartigen Einheitsvektors **n** mit $\mathbf{n}^2 = 1$ weist) reflektiert, indem die zu reflektierende Größe in sandwichartiger Weise [8], [9] von rechts und links mit der reflektierenden Größe multipliziert wird.

$$\mathbf{r}_{\mathrm{ref}} = \mathbf{n\,r\,n} \qquad \text{or} \qquad \mathbf{r}_{\mathrm{ref}} = \frac{\mathbf{m\,r\,m}}{\mathbf{m}^2} \qquad \text{with} \;\; \mathbf{n} = \frac{\mathbf{m}}{\sqrt{\mathbf{m}^2}} \tag{1}$$

If the axis of reflection is not represented by a time-like unit vector – see right part of equation (1) – the sandwich product has to be divided by the square of the vector **m**, which represents the reflection axis. After this normalization both equations (1) are equivalent.

Using this strategy an extremely simple representation of Lorentz transformations can be found: A first reflection at the angle bisector between the two time axes, given as a time-like unit vector $\mathbf{n}_1$, will be followed by a second reflection at the original, primed time axis, given as $\mathbf{n}_2$. All this results in the following doubled sandwich product

Wird die Reflexionsachse nicht durch einen zeitartigen Einheitsvektor repräsentiert, muss – wie in Gleichung (1) rechts – ergänzend durch das Quadrat des die Achse repräsentierenden Vektors **m** dividiert werden. Nach dieser Normierung sind die beiden Formeln von Gl. (1) äquivalent.

Damit kann eine äußerst einfache Darstellung der Lorentz-Transformationen gefunden werden: Eine erste Reflexion an der zeitlichen Winkelhalbierenden, die durch den zeitartigen Einheitsvektor $\mathbf{n}_1$ repräsentiert wird, wird gefolgt von einer zweiten Reflexion an der ursprünglichen, gestrichenen Zeitachse, repräsentiert durch $\mathbf{n}_2$, was auf das doppelte Sandwichprodukt

$$\mathbf{r}_{\mathrm{Lorentz}} = \mathbf{r}_{\mathrm{rot}} = \mathbf{n}_2\,\mathbf{n}_1\,\mathbf{r}\,\mathbf{n}_1\,\mathbf{n}_2 \tag{2}$$

Doran and Lasenby [4, p. 43] comment on this strategy with the words: “This is starting to look extremely simple!” Indeed Lorentz transformations are expressed here mathematically in an extraordinary and remarkable elegant way using only simple multiplications – and completely avoiding rotation matrices.

führt. Doran und Lasenby [4, S. 43] kommentieren diesen Zusammenhang mit den Worten: „Dies alles beginnt, extrem einfach auszusehen!“ In der Tat werden hier Lorentz-Transformationen mathematisch äußerst elegant durch schlichte Multiplikationen – ganz ohne Rotationsmatrizen – ausgedrückt.

4. What has been trained, seems to be simple

Experienced students, who cognitively understand and who already have trained and practiced hyperbolic functions, will have no problem to represent the time-like unit vector of the angle bisector between the two time axes (see left side of eq. 3) as

4. Einfach erscheint, was bereits eingeübt ist

Für Lernende, die den Umgang mit hyperbolischen Funktionen bereits eingeübt und kognitiv durchdrungen haben, ist die Darstellung des Einheitsvektors der zeitlichen Winkelhalbierenden im Folgenden (Gl. 3 links) als

$$\mathbf{n}_1 = \cosh(\alpha/2)\,\gamma_t' - \sinh(\alpha/2)\,\gamma_x' \qquad \mathbf{m}_1 = \gamma_t + \gamma_t' \tag{3}$$

But as in secondary schools hyperbolic functions usually are not part of the curriculum, it is possible to discuss the geometric view and to construct the reflection vector in a geometric way. The time-like angle bisector then can be represented as the sum of primed and unprimed time base vectors into ct- and ct'-directions (see right side of eq. 3).

If the multiplication of vectors based on Geometric Algebra has been discussed and trained and if sufficient lesson time is available, the simple multiplication steps of eq. 2 can be computed without any problems by hand.

If these basic foundations have not been practiced and if sufficient time resources for computations at the lessons are not available, computer-aided solution strategies can be used alternatively.

As at present Geometric Algebra pocket calculators do not exist at schools, it has been suggested by the author [10] – [13] that the program tool GAALOP (Geometric Algebra Algorithms Optimizer [15]) can be used as a pocket calculator substitute. This will also help mathematically reluctant students who very often are accustomed to and in fact conditioned to solve even the easiest multiplications only with the help of electronic calculators.

Using GAALOP in this way is rather trouble-free as GAALOP is self-explaining and can be used nearly immediately for basic calculations without previous experience of this program tool and without a longer training period.

Solution parts, which make it possible to integrate the results into programs of other programming languages, can be ignored completely. Furthermore GAALOP can be used free of charge and can be downloaded at the internet URL address www.gaalop.de [5].

kein Problem. Da im schulischen Bereich jedoch hyperbolische Funktionen üblicherweise nicht thematisiert werden, kann geometrisch argumentiert und die zeitliche Winkelhalbierende durch die Summe der gestrichenen und ungestrichenen Basisvektoren in ct- und ct‘-Richtung (Gl. 3 rechts) repräsentiert werden.

Die mit Gl. (2) verbundenen Rechenschritte können bei ausreichenden zeitlichen Ressourcen problemlos von Hand durchgeführt werden, sofern die Multiplikation vektorieller Größen im Rahmen der Geometrischen Algebra entsprechend eingeübt wurde.

Wurden diese Grundlagen nicht eingeübt und sind keine zeitlichen Ressourcen vorhanden, dies im Unterricht ausführlich zu tun, kann alternativ auf Rechnerunterstützung zurückgegriffen werden.

Da derzeit jedoch keine schulischen Taschenrechner existieren, die Rechnungen zur Geometrischen Algebra zulassen, wird vom Autor vorgeschlagen, das Programm-Tool GAALOP (Geometric Algebra Algorithms Optimizer [15]) als Taschenrechner-Ersatz einzusetzen [10] – [13]. Dies kommt auch Lernenden entgegen, die heute leider oft darauf konditioniert sind, selbst simpelste Multiplikationsaufgaben nur mit Taschenrechnerhilfe zu lösen.

Bei einer solchen Nutzung als Taschenrechner-Ersatz ist GAALOP nahezu selbsterklärend und kann ohne Vorkenntnisse und ohne eine längere Einarbeitungszeit sofort für einfache Berechnungen genutzt werden.

Programmzeilen der ausgegebenen Lösung, die eine Einbindung in Programme anderer Programmiersprachen gewährleisten sollen, können dabei vollständig ignoriert werden. Darüber hinaus steht das Programm kostenfrei zur Verfügung und kann unter www.gaalop.de [5] heruntergeladen werden.

Dr. Pau makes a longer scientific expedition into the universe. Dr. Wolf observes him closely.

The spaceship of Dr. Pau is launched at the origin of the inertial system of Dr. Wolf. The phase of acceleration is extremely short and can be neglected as the spaceship of Dr. Pau reaches its final velocity within a minimum of time.

At a later time the spaceship of Dr. Pau is located in the inertial system of Dr. Wolf at the position

$$r_2 = 12\ \mathrm{Lj}\ \gamma_t + 3\ \mathrm{Lj}\ \gamma_x$$

In the coordinate system of Dr. Pau a supernova explosion takes place at the position

$$r_3' = 10\ \mathrm{Lj}\ \gamma_t' + 5\ \mathrm{Lj}\ \gamma_x'$$

Find the coordinates of this explosion in the inertial system of Dr. Wolf.

Fig. 2: Abitur examination problem 2.2d about a Lorentz transformation from [7], [13, p. 704].

Dr. Pau führt eine längere wissenschaftliche Expedition durch. Dr. Wolf beobachtet ihn dabei.

Dr. Pau startet seine Rakete im Ursprung des Inertialsystems von Dr. Wolf. Die Beschleunigungsphase ist dabei so kurz, dass sie vernachlässigt werden kann, da die Rakete von Dr. Pau innerhalb kürzester Zeit ihre konstante Endgeschwindigkeit erreicht.

Einige Zeit später befindet sich die Rakete von Dr. Pau im Inertialsystem von Dr. Wolf an der Position

$$r_2 = 12\ \mathrm{Lj}\ \gamma_t + 3\ \mathrm{Lj}\ \gamma_x$$

Im Koordinatensystem von Dr. Pau findet eine Supernova-Explosion an der Position

$$r_3' = 10\ \mathrm{Lj}\ \gamma_t' + 5\ \mathrm{Lj}\ \gamma_x'$$

statt. Berechnen Sie die Koordinaten dieser Explosion im Inertialsystem von Dr. Wolf.

Abb. 2: Abitur-Teilaufgabe 2.2d zur Lorentz-Transformation aus [7], [13, S. 704].

5. GAALOP example problem of a Lorentz transformation

Based on an abitur examination problem of the written final examination of the advanced physics course at Otto Hahn comprehensive school Berlin/ Neukoelln in school year 2008/2009 (see fig. 2) the conventional solution (fig. 3) can be compared with a solution which is found by using GAALOP (fig. 4).

The problem is solved with the conventional strategy by simply inserting the given values into known formulas.

5. GAALOP-Beispielaufgabe zur Lorentz-Transformation

Unter Rückgriff auf eine Teilaufgabe der schriftlichen Abiturprüfung des LK Physik der Otto-Hahn-Schule Berlin/Neukölln des Schuljahrs 2008/2009 (siehe Abb. 2) kann die konventionelle Lösung (Abb. 3) mit der Lösung, die mit Hilfe von GAALOP aufgefunden wurde (Abb. 4) verglichen werden.

In der konventionellen Lösung wird die Aufgabe durch einfaches Einsetzen der gegebenen Werte in bekannte Formeln bearbeitet.

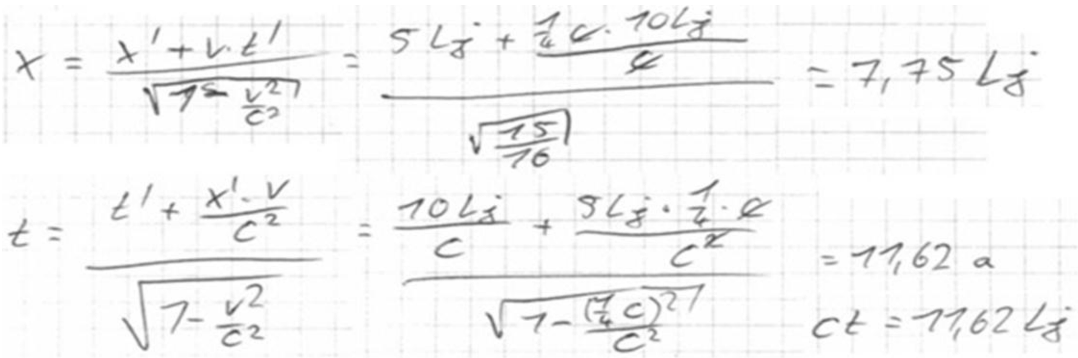

Fig. 3: Conventional solution of the Lorentz transformation of a student (some steps are shortened).
Abb. 3: Konventionelle Berechnung der Lorentz-Transformation durch einen Schüler (Umrechnungsschritte teilweise gekürzt).

As $\alpha/2 = ½ \operatorname{arc\,tanh} 0,25 = 0,1277$ there will be a program code of only four lines. While three of the four lines are required to state the given quantities, only one sole line is needed to give the actual computation according to eq. (2). This is remarkably short.

After activating the *Optimize* button the expected results, which already can be seen in fig. 3, will be presented as *Compilation Result* (see fig. 4).

Mit $\alpha/2 = ½ \operatorname{arc\,tanh} 0,25 = 0,1277$ ergibt sich ein Programmcode von lediglich vier Zeilen, wobei drei Zeilen für die Angabe der gegebenen Größen und nur eine einzige Zeile für die tatsächliche Berechnung nach Gl. (2) benötigt werden, was bemerkenswert kurz ist.

Nach Aktivierung des *Optimize*-Buttons werden wie erwartet die schon in Abb. 3 angegebenen Lösungswerte als *Compilation Result* (siehe Abb. 4) ausgegeben.

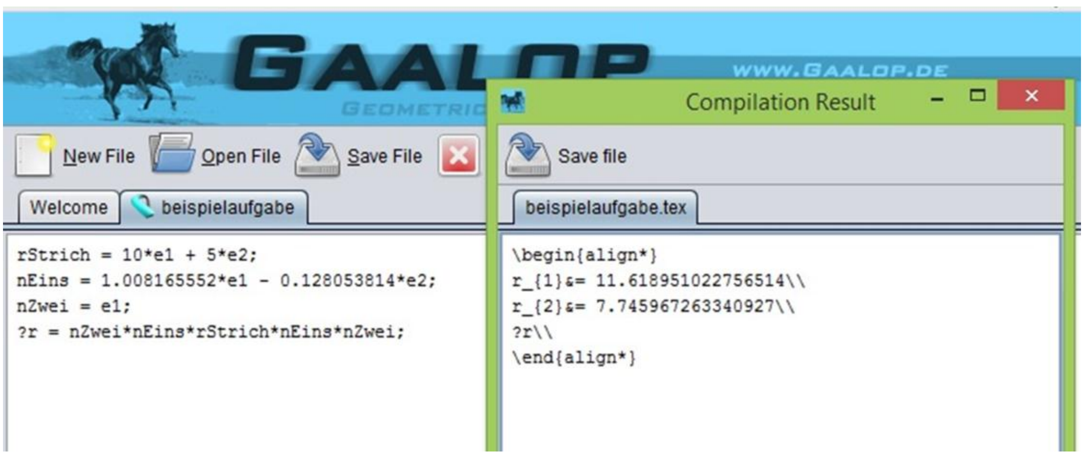

Fig. 4: GAALOP solution of the abitur examination problem using a spacetime rotation.
Abb. 4: Lösung der Abitur-Teilaufgabe mit Hilfe von GAALOP durch raumzeitliche Rotation.

An alternative GAALOP solution without using hyperbolic calculations according to the right side of equation (3) is published in [13, p. 705, figure 3 at the bottom].

Eine alternative Lösung durch GAALOP ohne hyperbolische Berechnung gemäß der rechts stehenden Gleichung (3) ist in [13, S. 705, Abb. 3 unten] veröffentlicht.

The complete GAALOP program is extremely short. Not only this shortness and the mathematical compactness, but especially the structural elegance and the convincing geometrical interpretation give a didactical fundamental picture. Geometric, algebraic and program technical aspects complement each other in an educational and didactical very effective way.

Nicht nur die Kürze der Programmschritte und die mathematische Kompaktheit, sondern insbesondere die strukturelle Eleganz und die überzeugende geometrischen Deutung führen zu einem didaktisch tragfähigen Gesamtbild. Die geometrischen, algebraischen und programmiertechnischen Aspekte ergänzen sich gegenseitig didaktisch effektiv und sehr wirksam.

4. Outlook

The alternative solution strategy, to model the two-dimensional spacetime problem by an interchange of coordinate axes [14], does not get enough attentiveness from a didactical standpoint. The spacetime transformation can then be modeled by a mixed sandwich product

4. Ausblick

Zu wenig Aufmerksamkeit auch aus didaktischer Sicht erhält derzeit jedoch die alternative Herangehensweise, die raumzeitlich zweidimensionale Beispielaufgabe durch eine Achsenvertauschung [14] zu lösen, indem die Transformation durch ein gemischtes Sandwich-Produkt

$$\mathbf{r}_{neu} = \mathbf{n}_3\,\mathbf{n}_3\,\mathbf{r}\,\mathbf{n}_1\,\mathbf{n}_3 = \mathbf{r}\,\mathbf{n}_1\,\mathbf{n}_3 \quad \text{with} \quad \mathbf{n}_3 = \cosh\alpha\,\gamma_t{}' - \sinh\alpha\,\gamma_x{}' \tag{4}$$

The GAALOP program of this transformation is shown in figure 5.

modelliert wird. Das entsprechende GAALOP-Programm wird in Abbildung 5 gezeigt.

The ct'-axis is exchanged for the new ct-axis, which in the case of two dimensions results in a situation which is identical to the diagram on the ride side of fig. 1. This again is one of the many very simplest solution strategies.

Die ct'-Achse wird dabei mit der neuen ct-Achse vertauscht, was im zweidimensionalen Fall genau Abb. 1 (rechts) entspricht. Auch dies ist eine der vielen allereinfachsten Lösungsmöglichkeiten.

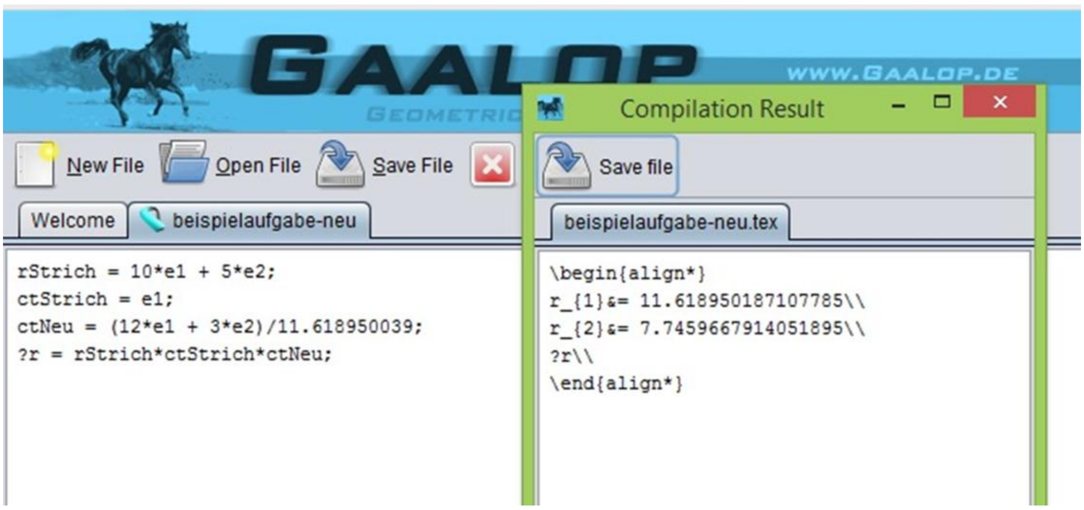

Fig. 5: GAALOP solution of the abitur examination problem by an interchange of coordinate axes.
Abb. 5: Lösung der Abitur-Teilaufgabe mit Hilfe von GAALOP durch Achsenvertauschung.

This exchange of an old axis for a new one can be explained as a generalized projection and rejection. While a projection

Diese Ersetzung einer alten Achse durch eine neue kann durch eine verallgemeinerte Projektion und Rejektion erklärte werden. Während eine Projektion

$$\mathbf{r}_{||} = (\mathbf{r} \bullet \mathbf{n}_1)\,\mathbf{n}_1^{-1} = (\mathbf{r} \bullet \mathbf{n}_1)\,\mathbf{n}_1 \quad \text{with} \quad \mathbf{n}_1^2 = 1 \tag{5}$$

and a rejection [6, S. 65], [3, S. 32]

und eine Rejektion [6, S. 65], [3, S. 32]

$$\mathbf{r}_{\perp} = (\mathbf{r} \wedge \mathbf{n}_1)\,\mathbf{n}_1^{-1} = (\mathbf{r} \wedge \mathbf{n}_1)\,\mathbf{n}_1 \tag{6}$$

of vectors both result again in vectors, a generalized projection of vectors

von Vektoren wiederum Vektoren ergeben, ergibt sich zwar bei einer verallgemeinerten Projektion

$$\mathbf{r}_{\text{pro}} = (\mathbf{r} \bullet \mathbf{n}_1)\,\mathbf{n}_3^{-1} = \underbrace{\overbrace{(\mathbf{r} \bullet \mathbf{n}_1)}^{\text{scalar}}\,\mathbf{n}_3}_{\text{vector}} \quad \text{with} \quad \mathbf{n}_1^{\,2} = \mathbf{n}_3^{\,2} = 1 \tag{7}$$

will again result in a vector. But the generalized rejection of vectors

erneut ein Vektor. Bei einer verallgemeinerten Rejection von Vektoren

$$\mathbf{r}_{\text{re}} = (\mathbf{r} \wedge \mathbf{n}_1)\,\mathbf{n}_3^{-1} = \underbrace{\overbrace{(\mathbf{r} \wedge \mathbf{n}_1)}^{\text{bivector}}\,\mathbf{n}_3}_{\text{vector + trivector}} \tag{8}$$

will give a linear combination of a vector and a trivector. This change of dimensionality is remarkable. And it should have consequences for physics.

ergibt sich jedoch eine Linearkombination aus einem Vektor und einem Trivektor. Diese Dimensionsänderung ist verblüffend. Und sie sollte Auswirkungen auf die Physik haben.

9. Literature / Literatur

[1] Horn, Martin Erik (2018): Die aber auch allereinfachste Darstellung der Lorentz-Transformation mit und ohne GAALOP. In: BzMU 2018 – Beiträge zum Mathematikunterricht, Vorträge zur Mathematikdidaktik und zur Schnittstelle Mathematik/Mathematikdidaktik auf der gemeinsamen Jahrestagung GDM und DMV 2018 in Paderborn. Gesamtband, WTM-Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien, Münster, pp. 835 - 838.

[2] Baumgarten, Christian (2017): The Simplest Form of the Lorentz Transformations. arXiv:physics.gen-ph/1801.01840v1, Url: http://arxiv.org/abs/1801.01840 (07.05.2018).

[3] Bayro-Corrochano, Eduardo (2019): Geometric Algebra Applications. Vol. 1: Computer Vision, Graphics and Neurocomputing. Springer International Publishing / Springer Nature, Cham, Switzerland.

[4] Doran, Chris; Lasenby, Anthony (2003): Geometric Algebra for Physicists. Cambridge University Press, Cambridge.

[5] GAALOP developer team/GAALOP-Entwicklerteam – Pitt, Joachim; Hildenbrand, Dietmar; Schwinn, Christian; Charrier, Patrick; Steinmetz, Christian (2018): Homepage of the Geometric Algebra Algorithms Optimizer – GAALOP website. Url: http://www.gaalop.de (25.11.2018).

[6] Hestenes, David (2002): New Foundations for Classical Mechanics. Second edition, Kluwer Academic Publishers, New York, Boston.

[7] Horn, Martin Erik (2010): Die Raumzeit-Algebra im Abitur. In: PhyDid B, Didaktik der Physik, Beiträge zur DPG-Frühjahrstagung in Hannover 2010, Beitrag 28.4. Url: www.phydid.de/index.php/phydid-b/article/view/192 (31.12.2010).

[8] Horn, Martin Erik (2015): Strukturierte Beschreibung von Reflexionen. In: BzMU 2015 – Beiträge zum Mathematikunterricht, Tagungsband der GDM-Jahrestagung 2015 in Basel. Band 1, WTM-Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien, Münster, pp. 412 - 415.

[9] Horn, Martin Erik (2015): Sandwich Products and Reflections. In: PhyDid B, Didaktik der Physik, Beiträge zur DPG-Frühjahrstagung in Wuppertal 2015, Beitrag 17.7. Url: www.phydid.de/index.php/phydid-b/article/view/642 (17.12.2015).

[10] Horn, Martin Erik (2017): Lösung einer Aufgabe zu Linearen Gleichungssystemen aus der Han-Dynastie mit GAALOP als Taschenrechner-Ersatz. In: BzMU 2017 – Beiträge zum Mathematikunterricht, Tagungsband der GDM-Jahrestagung 2017 in Potsdam, Band 2, WTM-Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien, Münster, pp. 461 - 464.

[11] Horn, Martin Erik (2018): Solutions of Two Problems about Systems of Simultaneous Linear Equations from Old Babylonia and from the Han Period with GAALOP as a Pocket Calculator Substitute. Extended and translated version of paper [9]. Submitted to: PhyDid B as attachment of paper [11].

[12] Horn, Martin Erik (2018): Die Geometrische Algebra mit GAALOP im Schnelldurchgang. Submitted to: PhyDid B, Didaktik der Physik, Beiträge zur DPG-Frühjahrstagung in Würzburg 2018, Beitrag 02.03.

[13] Horn, Martin Erik (2018): GAALOP als speziell-relativistischer Taschenrechner. In: Christian Maurer (Ed.): Qualitätsvoller Chemie- und Physikunterricht – normative und empirische Dimensionen. Tagungsband der Jahrestagung der GDCP in Regensburg 2017, Band 38, pp. 703 - 706, University of Regensburg.

[14] Horn, Martin Erik (2018): Another Introduction to Geometric Algebra with some Comments on Moore-Penrose Inverses. In: Dieter Schuch & Michael Ramek (Eds.): Symmetries in Science XVII, Proceedings of the International Symposium in Bregenz 2017. Journal of Physics, Conference Series 1071 (2018) 012012, IOP Science, Bristol.

[15] Schwinn, Christian; Hildenbrand, Dietmar; Stock, Florian; Koch, Andreas (2010): Gaalop 2.0 – A Geometric Algebra Algorithm Compiler. In Vaclav Skala & Eckhard Hitzer (Eds.): GraVisMa 2010 Workshop Proceedings. Second International Workshop on Computer Graphics, Computer Vision and Mathematics, pp. 1 - 8. Union Agency, Plzen.