Posterbeitrag zur GDCP-Jahrestagung 2017 an der Universität Regensburg, P 57, A09 - A11, Postersession am Di, 19. Sept. 2017, 14:00 h – 15:30 h, Raum ZHG P1.

GAALOP als speziell-relativistischer Taschenrechner-Ersatz

Martin Erik Horn, HWR Berlin, FB 1, FE Quantitative Methoden

Hochschule für Wirtschaft und Recht Berlin
Berlin School of Economics and Law

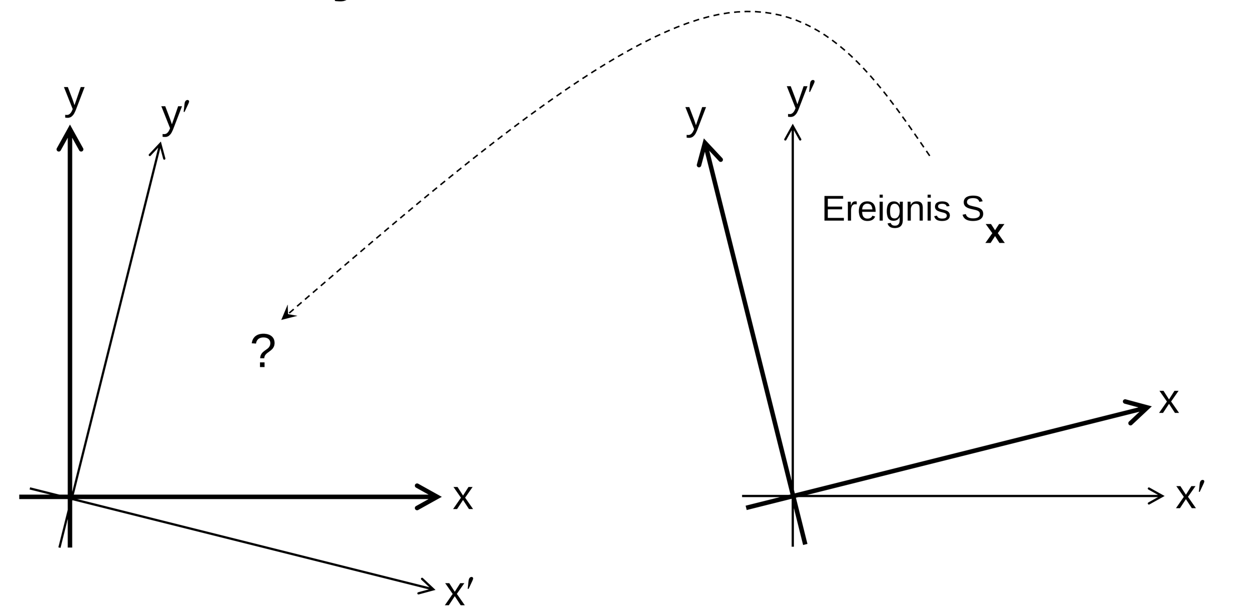
Email: *e_hornm@doz.hwr-berlin.de*

Ausgangspunkt: Spezielle Relativitätstheorie & Clifford-Algebra (Dirac-Algebra)

Die konzeptuelle Beschreibung der Speziellen Relativitätstheorie basiert auf einer pseudo-Euklidischen Raumzeit, die mathematisch mit Hilfe der Clifford-Algebra modelliert werden kann. Die Berechnung relativistischer Größen ist deshalb im Kontext der Clifford-Algebra weit einfacher als unter ausschließlicher Nutzung reeller Zahlen. Für die rechnerische Lösung von Aufgaben zur Speziellen Relativitätstheorie in schulischen und hochschulischen Unterrichtssituationen stehen uns derzeit allerdings nur Taschenrechner zur Verfügung, die keine Berechnungen auf Grundlage der Clifford-Algebra zulassen.

Es ist deshalb sinnvoll, für Übungsphasen nach einem Taschenrechner-Ersatz für speziell-relativistische Rechnungen zu suchen. Das Programm-Tool **GAALOP** (Geometric Algebra Algorithms Optimizer) bietet eine solche, leicht zugängliche Taschenrechner-Alternative.

Klassische Physik: Rein räumliche Rotationen



Wo findet das Ereignis S im ungestrichenen Koordinatensystem statt?

Analoge Aufgabe einer rein Euklidischen Drehung

Die Inertialsysteme von Dr. Pau und Dr. Wolf befinden sich relativ zueinander in Ruhe. Allerdings sind ihre räumlichen Achsen gegeneinander verdreht.

So misst Dr. Wolf ein Ereignis, das auf der y′-Achse von Dr. Pau stattfindet, an der Position

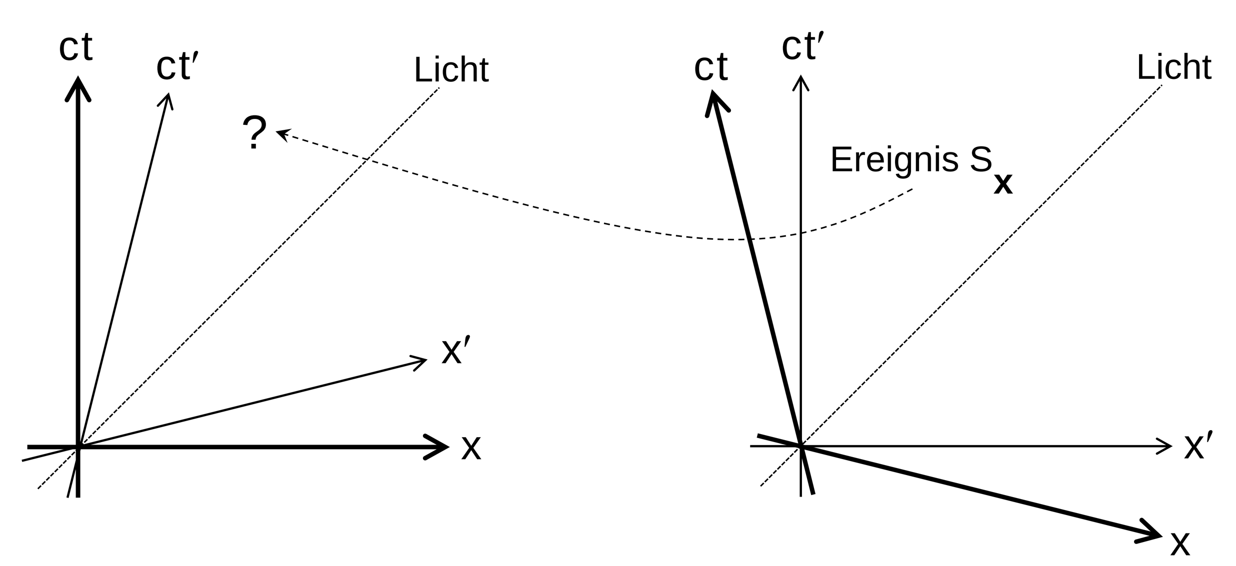
$$\mathbf{r_2} = 3\,\mathrm{Lj}\ \gamma_x + 12\,\mathrm{Lj}\ \gamma_y$$

Im Koordinatensystem von Dr. Pau findet eine Supernova-Explosion an der Position

$$\mathbf{r_3}' = 5\,\mathrm{Lj}\ \gamma_x' + 10\,\mathrm{Lj}\ \gamma_y'$$

statt. Berechnen Sie die Koordinaten dieser Explosion im Inertialsystem von Dr. Wolf.

Relativistische Physik: Raumzeitliche Rotationen



Wo findet das Ereignis S im ungestrichenen Koordinatensystem statt?

Abituraufgabe LK Physik (Teilaufgabe 2.2 d)

(Otto-Hahn-Schule Berlin/Neukölln 2009, siehe DPG-Beitrag DD 28.4, Frühjahrstagung Hannover 2010)

Dr. Pau führt eine längere wissenschaftliche Expedition durch. Dr. Wolf beobachtet ihn dabei. Dr. Pau startet seine Rakete im Ursprung des Inertialsystems von Dr. Wolf. Die Beschleunigungsphase ist dabei so kurz, dass sie vernachlässigt werden kann, da die Rakete von Dr. Pau innerhalb kürzester Zeit ihre konstante Endgeschwindigkeit erreicht.

Einige Zeit später befindet sich die Rakete von Dr. Pau im Inertialsystem von Dr. Wolf an der Position

$$\mathbf{r_2} = 12\,\mathrm{Lj}\ \gamma_t + 3\,\mathrm{Lj}\ \gamma_x$$

Im Koordinatensystem von Dr. Pau findet eine Supernova-Explosion an der Position

$$\mathbf{r_3}' = 10\,\mathrm{Lj}\ \gamma_t' + 5\,\mathrm{Lj}\ \gamma_x'$$

statt. Berechnen Sie die Koordinaten dieser Explosion im Inertialsystem von Dr. Wolf.

Kernpunkt der Mathematisierung: Jede Rotation kann als Hintereinanderausführung zweier Reflexionen beschrieben werden.

Strategie I:

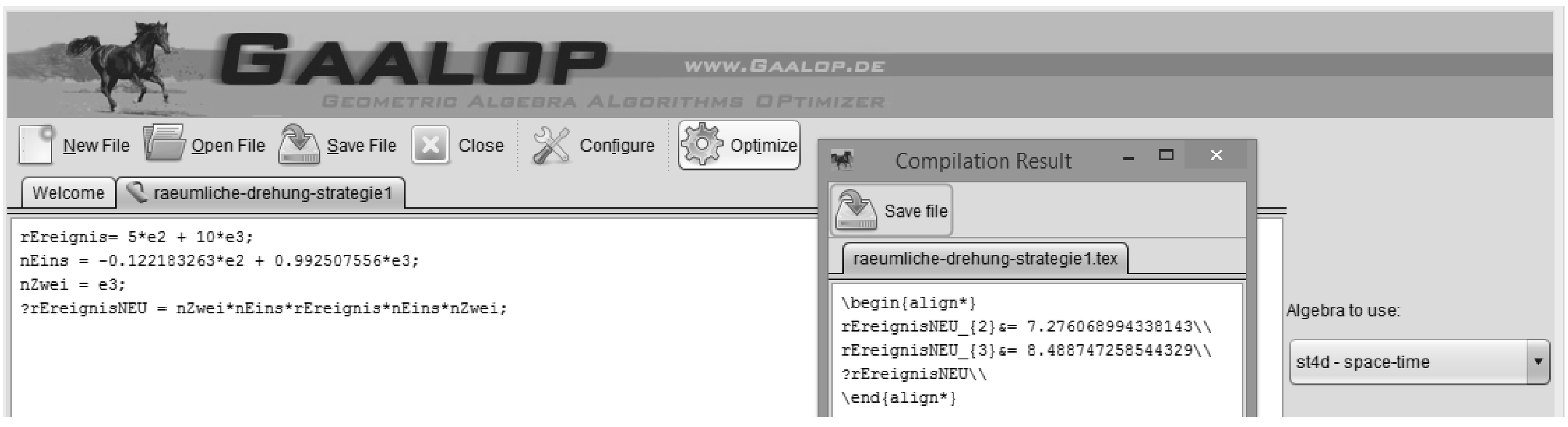
Eine Reflexion an der zwischen den beiden y-Achsen y und y′ liegenden Winkelhalbierenden

$$\mathbf{n_1} = \sin(\alpha/2)\ \gamma_x' + \cos(\alpha/2)\ \gamma_y' = -\,0{,}122183263\ \gamma_x' + 0{,}992507556\ \gamma_y'$$

da $\alpha = \operatorname{arc}\tan 0{,}25 = 0{,}244978663 \quad \Rightarrow \quad \alpha/2 = 0{,}122489331$

… und für Strategie II: $\alpha/4 = 0{,}061244665$

wird gefolgt von einer Reflexion an der y′-Achse: $\mathbf{n_2} = \gamma_y'$



Strategie II:

Die beiden Reflexionen erfolgen an den zwischen den beiden y-Achsen y und y′ liegenden Winkel-Viertelnden:

$$\mathbf{n_1} = \sin(3\alpha/4)\ \gamma_x' + \cos(3\alpha/4)\ \gamma_y' = -\,0{,}182701986\ \gamma_x' + 0{,}983168339\ \gamma_y'$$

$$\mathbf{n_2} = \sin(\alpha/4)\ \gamma_x' + \cos(\alpha/4)\ \gamma_y' = -\,0{,}061206385\ \gamma_x' + 0{,}998125131\ \gamma_y'$$

Lösung:

Im Koordinatensystem von Dr. Wolf findet die Supernova-Explosion an der Position

$$\mathbf{r_S} = 7{,}27607\,\mathrm{Lj}\ \gamma_x + 8{,}48875\,\mathrm{Lj}\ \gamma_y$$

statt.

Strategie I:

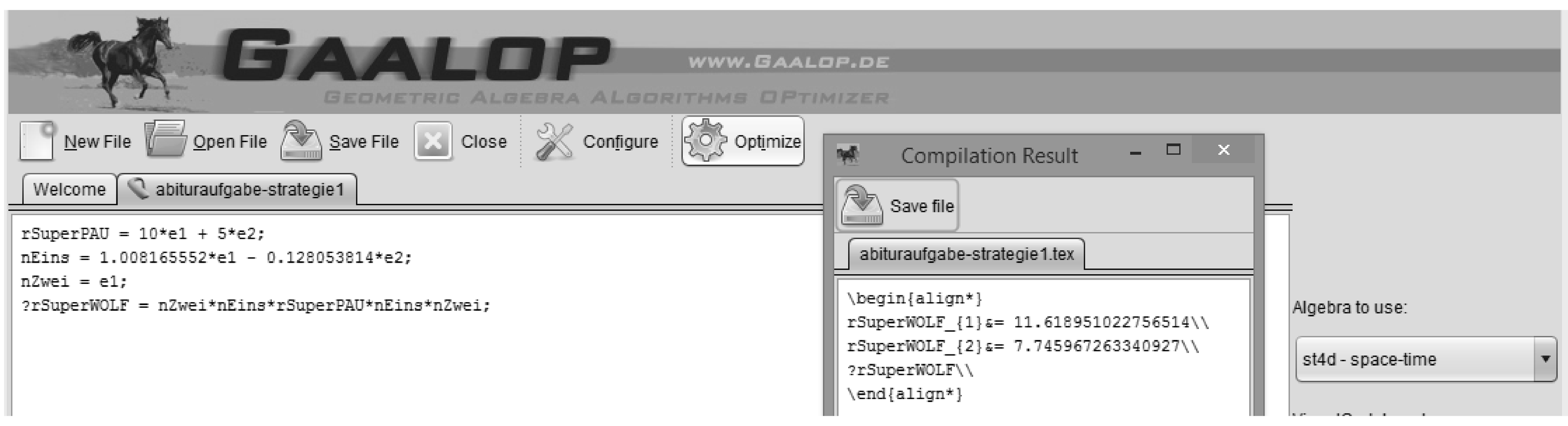
Eine Reflexion an der zwischen den beiden Zeitachsen ct und ct′ liegenden Winkelhalbierenden

$$\mathbf{n_1} = \cosh(\alpha/2)\ \gamma_t' + \sinh(\alpha/2)\ \gamma_x' = 1{,}008165552\ \gamma_t' - 0{,}128053814\ \gamma_x'$$

da $\alpha = \operatorname{arc}\tanh 0{,}25 = 0{,}255412811 \quad \Rightarrow \quad \alpha/2 = 0{,}127706405$

… und für Strategie II: $\alpha/4 = 0{,}063853202$

wird gefolgt von einer Reflexion an der ct′-Zeitachse: $\mathbf{n_2} = \gamma_t'$



Strategie II:

Die beiden Reflexionen erfolgen an den zwischen den beiden Zeitachsen ct und ct′ liegenden Winkel-Viertelnden:

$$\mathbf{n_1} = \cosh(3\alpha/4)\ \gamma_t' + \sinh(3\alpha/4)\ \gamma_x' = 1{,}018403716\ \gamma_t' - 0{,}192733309\ \gamma_x'$$

$$\mathbf{n_2} = \cosh(\alpha/4)\ \gamma_t' + \sinh(\alpha/4)\ \gamma_x' = 1{,}002039309\ \gamma_t' - 0{,}063896602\ \gamma_x'$$

Lösung:

Im Koordinatensystem von Dr. Wolf findet die Supernova-Explosion an der Position

$$\mathbf{r_S} = 11{,}61895\,\mathrm{Lj}\ \gamma_t + 7{,}74597\,\mathrm{Lj}\ \gamma_x$$

statt.

Ergänzung zu Poster P 57:

GAALOP als speziell-relativistischer Taschenrechner-Ersatz

Martin Erik Horn, HWR Berlin, FB 1, FE Quantitative Methoden

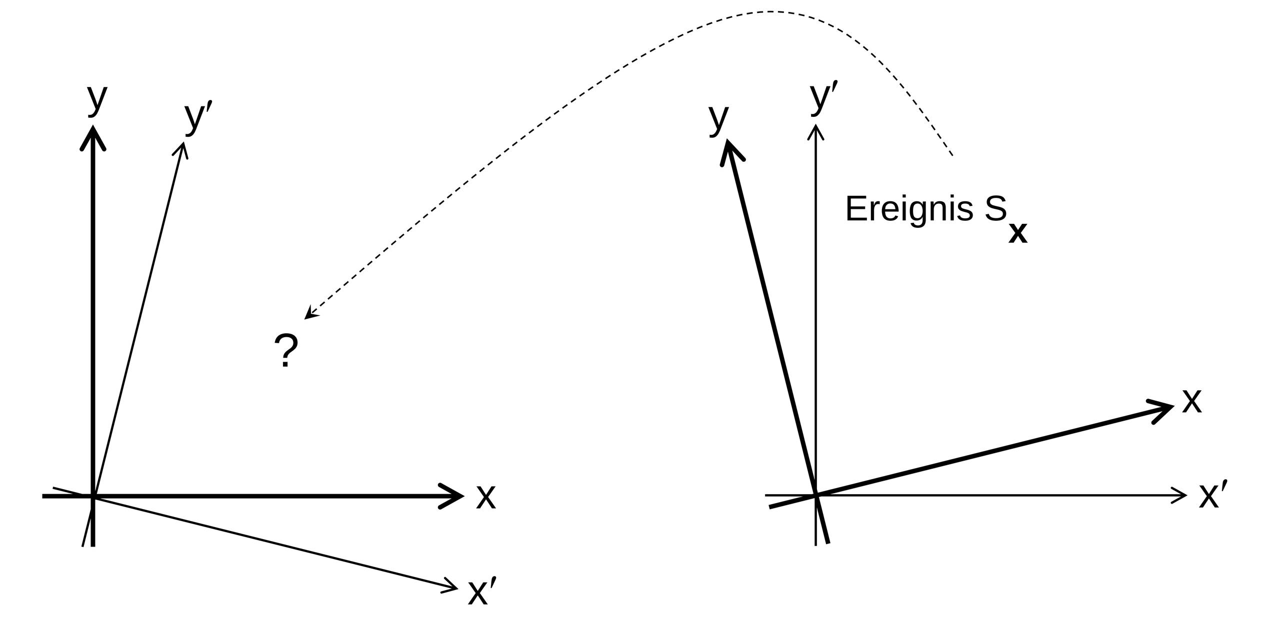
Hochschule für Wirtschaft und Recht Berlin
Berlin School of Economics and Law

Email: *e_hornm@doz.hwr-berlin.de*

Geometrische Bestimmung der Winkelhalbierenden

Wie im Poster gezeigt, können die Einheitsvektoren der Winkelhalbierenden (bzw. der Winkel-Viertelnden) mit Hilfe trigonometrischer bzw. hyperbolischer Funktionen algebraisch ermittelt werden. Alternativ dazu lassen sich diese Reflexionsvektoren auch geometrisch bestimmen. Dazu müssen lediglich längengleiche Vektoren, die den zu teilenden Winkel eingrenzen, addiert werden.

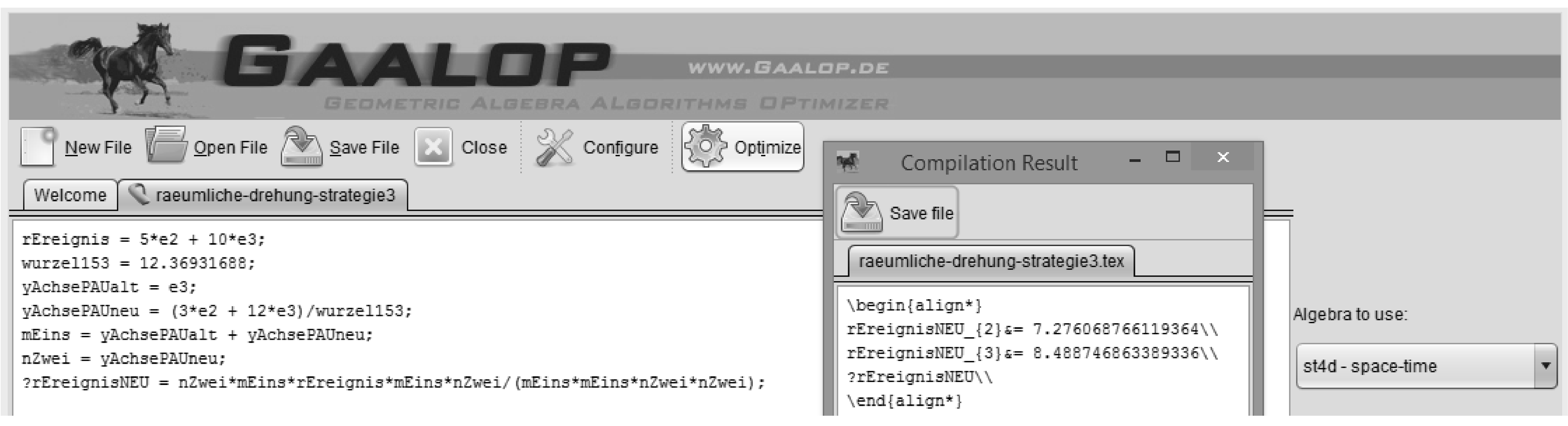
Klassische Physik: Rein räumliche Rotationen



Wo findet das Ereignis S im ungestrichenen Koordinatensystem statt?

Strategie III:
Eine Reflexion an der zwischen den beiden y-Achsen y und y′ liegenden Winkelhalbierenden $\mathbf{m_1} = \gamma_y + \gamma_y'$
wird gefolgt von einer Reflexion an der y′-Achse: $\mathbf{n_2} = \gamma_y'$

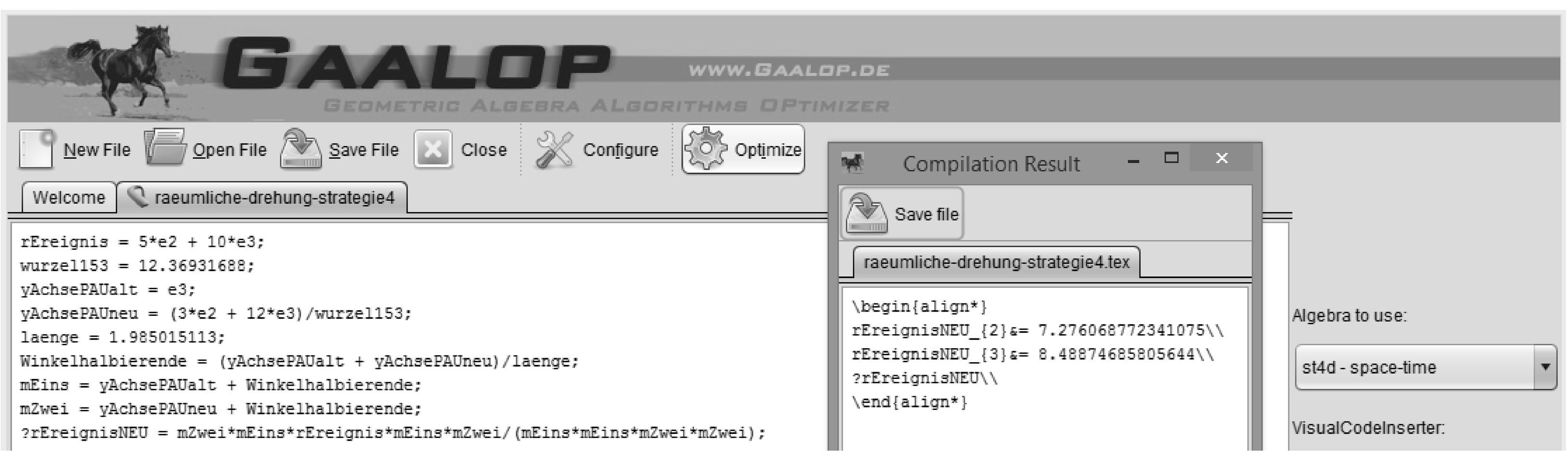
Da $\mathbf{m_1}$ und $\mathbf{n_2}$ keine zeitartigen Einheitsvektoren sind, muss mit Hilfe von Divisionen durch $\mathbf{m_1}^2$ und $\mathbf{n_2}^2$ eine Normierung erfolgen.



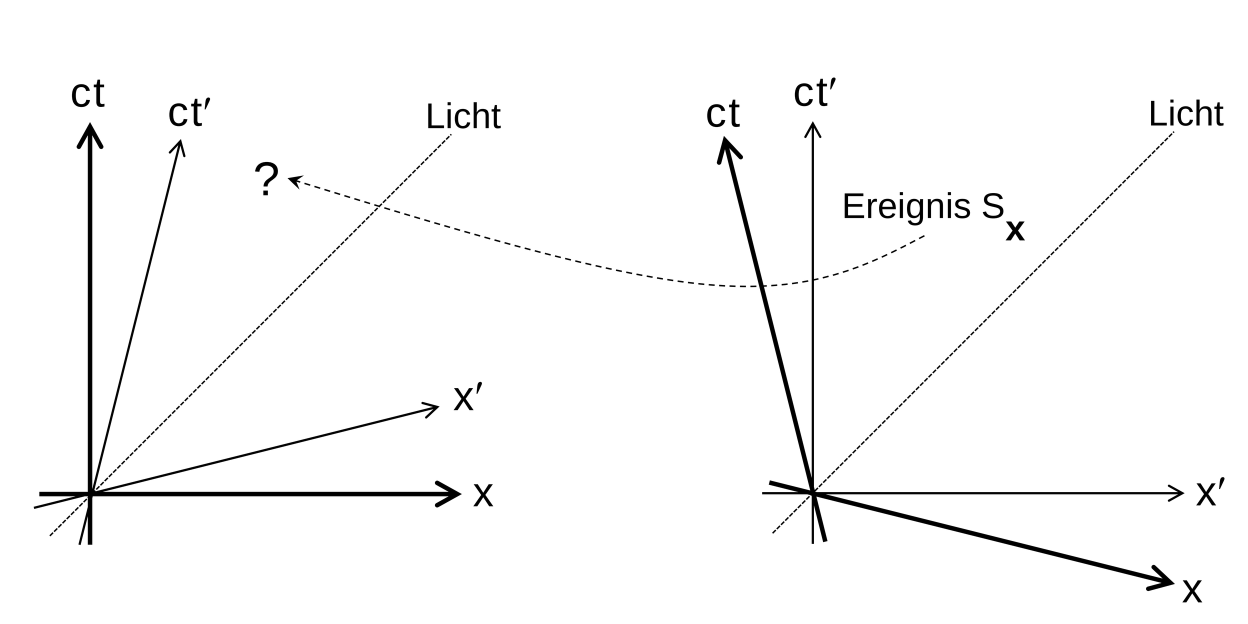
Strategie IV:
Wenn die Länge der Winkelhalbierenden beispielsweise durch

$$(\gamma_y + \gamma_y')^2 = 2 + 8/\sqrt{17} = 3{,}940285 = (1{,}985015113)^2$$

bekannt ist, können die Winkel-Viertelnden $\mathbf{m_1}$ und $\mathbf{m_2}$ mit Hilfe einfacher Vektoradditionen ermittelt werden.



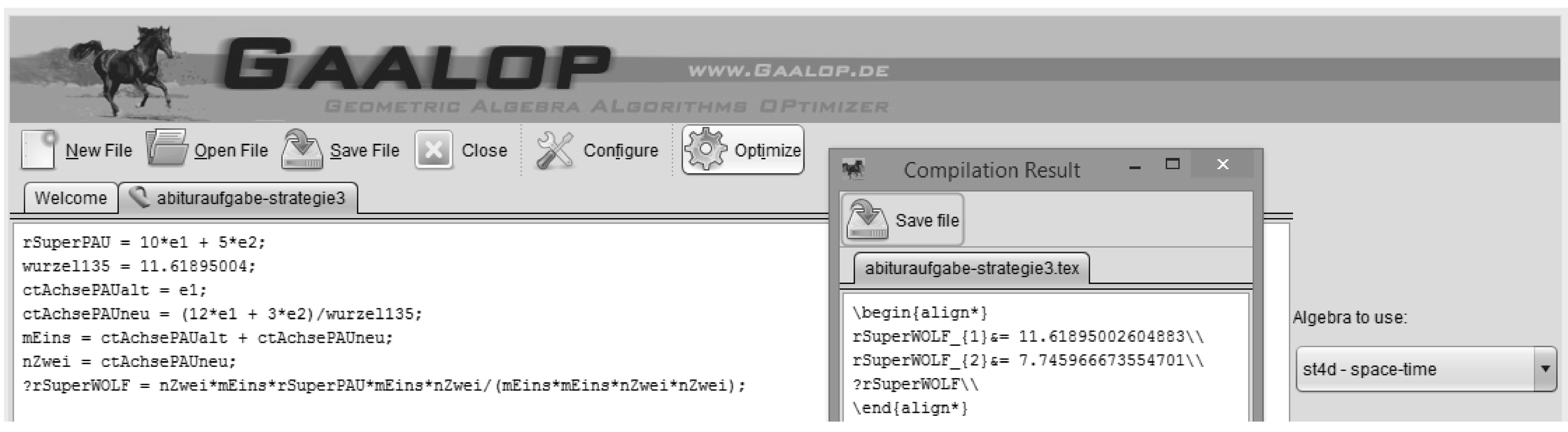
Relativistische Physik: Raumzeitliche Rotationen



Wo findet das Ereignis S im ungestrichenen Koordinatensystem statt?

Strategie III:
Eine Reflexion an der zwischen den beiden Zeitachsen ct und ct′ liegenden Winkelhalbierenden $\mathbf{m_1} = \gamma_t + \gamma_t'$
wird gefolgt von einer Reflexion an der ct′-Zeitachse: $\mathbf{n_2} = \gamma_t'$

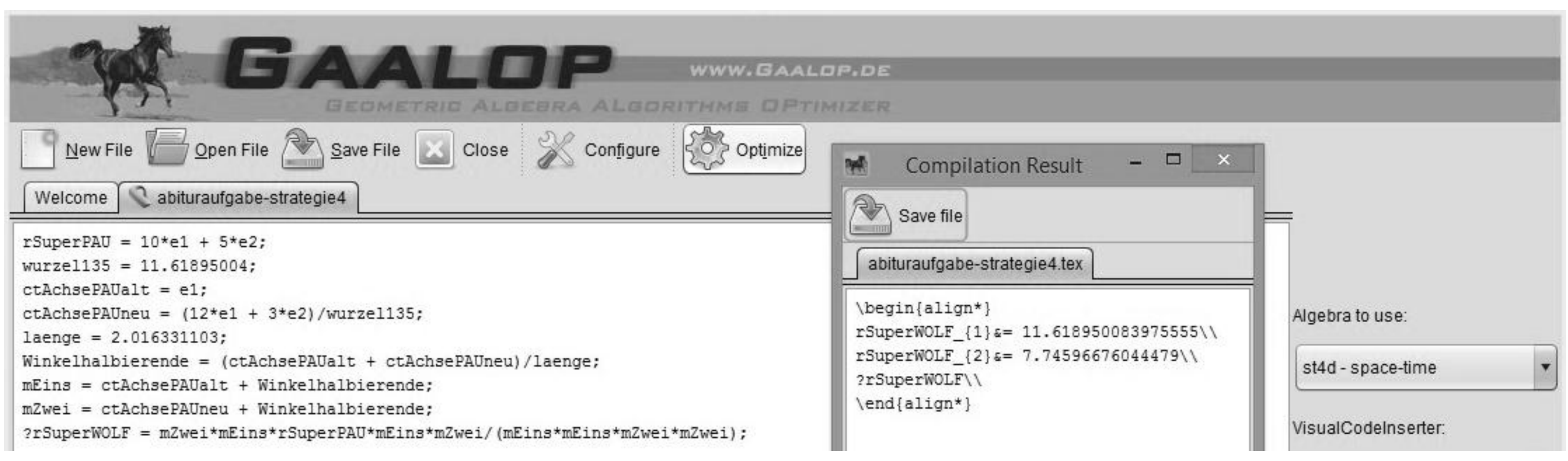
Da $\mathbf{m_1}$ kein Einheitsvektor ist, muss mit Hilfe einer Division durch $\mathbf{m_1}^2$ eine Normierung erfolgen.



Strategie IV:
Wenn die Länge der Winkelhalbierenden beispielsweise durch

$$(\gamma_t + \gamma_t')^2 = 2 + 8/\sqrt{15} = 4{,}065591118 = (2{,}016331103)^2$$

bekannt ist, können die Winkel-Viertelnden $\mathbf{m_1}$ und $\mathbf{m_2}$ mit Hilfe einfacher Vektoradditionen ermittelt werden.



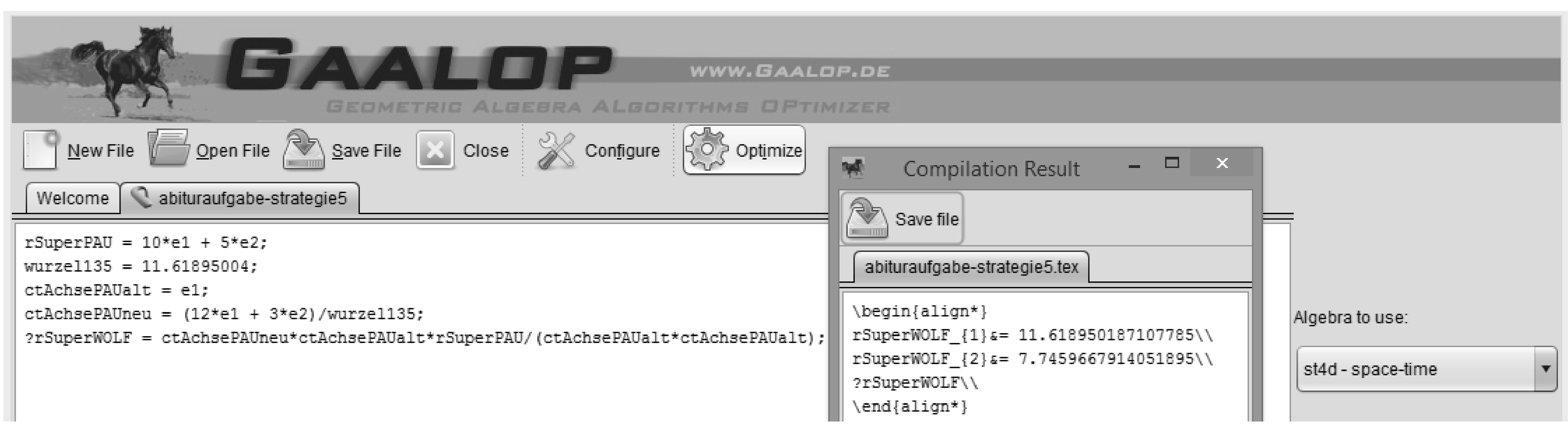
Und noch einfacher: Achsenvertauschung statt Rotationen

Die Abituraufgabe kann auch ohne Zuhilfenahme von Reflexionen bzw. Rotationen durch eine simple Achsenvertauschung (siehe Beitrag zum Symmetries in Science-Symposium in Bregenz 2017) gelöst werden. Winkelbetrachtungen entfallenen dabei vollständig.

Strategie V:
Durch Multiplikation mit dem alten Basisvektor γ_y' (gefolgt von einer Normierung per Division durch $\gamma_y'^2$) und darauffolgender Multiplikation mit dem neuen Basisvektor γ_y werden die beiden y-Achsen vertauscht.

Lösung:
Im Koordinatensystem von Dr. Wolf findet die Supernova-Explosion an der Position $\mathbf{r_S} = 7{,}27607\,\text{Lj}\,\gamma_x + 8{,}48875\,\text{Lj}\,\gamma_y$ statt.

Strategie V:
Durch Multiplikation mit dem alten Basisvektor γ_t' (gefolgt von einer Normierung per Division durch $\gamma_t'^2$) und darauffolgender Multiplikation mit dem neuen Basisvektor γ_t werden die beiden Zeitachsen vertauscht.



Lösung:
Im Koordinatensystem von Dr. Wolf findet die Supernova-Explosion an der Position $\mathbf{r_S} = 11{,}61895\,\text{Lj}\,\gamma_t + 7{,}74597\,\text{Lj}\,\gamma_x$ statt.