

## Wie wird die Ansicht durch eine Kugellinse verformt?

- Entwicklung einer Phänomenreihe -

Sascha Grusche<sup>1</sup>, Matthias Rang<sup>2</sup>, Marc Müller<sup>3</sup>

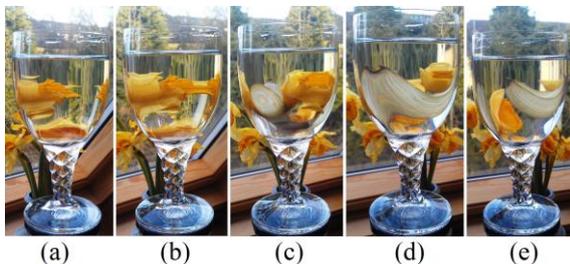
<sup>1</sup>Didaktik der Physik, Technische Universität Dresden, 01062 Dresden, <sup>2</sup>Naturwissenschaftliche Sektion, Forschungsinstitut am Goetheanum, Hügelweg 59, 4143 Dornach (Schweiz), <sup>3</sup>Physik und ihre Didaktik, Bergische Universität Wuppertal, Gauß-Straße 20, 42119 Wuppertal  
sascha.grusche@tu-dresden.de, matthias.rang@goetheanum.ch, m.mueller@uni-wuppertal.de

### Kurzfassung

Ob als Goldfisch-Aquarium, Weinglas oder Tautropfen - Kugellinsen sind im Alltag häufig zu finden. Beim Blick durch sie hindurch sind erstaunliche Verzerrungen und Vervielfachungen zu entdecken. Wie können diese Verformungen der Ansicht systematisch beschrieben und vorhergesagt werden? Für eine Erkundung der Erscheinungen eignet sich in methodischer Hinsicht ein phänomenologischer Vierschritt. Inhaltlich zeigt sich, dass die unverzerrten Ansichten ohne Kugel und die verzerrten Ansichten unter Verwendung der Kugel aufeinander bezogen werden müssen. Besonders aussagekräftig ist ein Vergleich der Inspektion des Gegenstandes durch die Kugel mit der Projektion eines Bildes durch die Kugel. Sind die Erscheinungen an der Kugellinse auf diese Weise nachvollzogen, können jene an der dünnen Linse als Spezialfall angesehen werden.

### 1. Einführung

Kugellinsen können wir bei vielen Gelegenheiten im Alltag finden. Sie begegnen uns als Goldfisch-Aquarium, kugeliger Wasserflaschenhals, gefülltes Weinglas, kleine Glasmurmeln und winziger Tautropfen. Wenn wir durch sie hindurchblicken, sehen wir die dahinterliegende Welt seltsam verformt (Abb. 1-5).



**Abb. 1:** Blick durch ein Wasserglas auf einen Strauß Osterglocken. Die Fotos (a)-(e) dokumentieren etwa ein Achtel eines Rundgangs um das Glas und halten dabei eine Reihe auffälliger Bildverwandlungen fest.

Diese wundersamen Ansichten werfen eine Reihe von Fragen auf:

- Wann ist das Bild seitenrichtig, wann seitenverkehrt? [1]
- Wieso ist der Gegenstand manchmal dreifach zu sehen? [2,3]
- Wo befindet sich das Bild in räumlicher Hinsicht: vor der Kugellinse, darauf, darin, oder dahinter? [1]
- Unter welchen Bedingungen ist das Bild scharf, unter welchen unscharf? [1]
- Wie kann das Bild einer Punktlichtquelle simuliert werden? [4]

Solche und weitere Fragen zur Ausrichtung, Anzahl, Position und Schärfe der Kugellinsen-Bilder sind allesamt behandelt worden. Die Antworten sind jeweils mit Hilfe der Geometrie gebrochener Strahlen entwickelt worden. Sie beziehen sich somit stets auf die Abbildung einzelner Gegenstandspunkte. Bei bisherigen Untersuchungen blieb jedoch eine Frage offen:

#### 1.1. Die Frage nach der Bildform

- Welche Form hat die verzerrte Ansicht?

Es liegt nahe, auch diese Frage auf Grundlage gebrochener Strahlen zu beantworten. Dazu könnte das Brechungsgesetz auf Vorder- und Rückseite der Kugellinse angewandt werden, wie es beispielsweise zur Behandlung des Regenbogens üblich ist [5]. Mit Hilfe der Lösung des daraus entwickelten Gleichungssystems, das den Zusammenhang zwischen Augpunkt, Gegenstandspunkten und Bildpunkten beschreibt, lässt sich die verformte Ansicht punktweise zusammensetzen. Allerdings ist dieses Gleichungssystem so komplex, dass eine Lösung bisher nicht angegeben wurde [6]. Insofern ist ein strahlenbasiertes Vorgehen nicht zufriedenstellend.

Deshalb schlagen wir eine bildbasierte Behandlung vor: Die mathematische Beschreibung soll aus den beobachtbaren Bildern entwickelt werden. Dabei folgen wir dem methodischen "Rezept" des phänomenologischen Vierschritts [7].

Im ersten Schritt (Abschnitt 1.2) werden alltägliche Erscheinungen im Zusammenhang mit Kugellinsen beschrieben, um mit den Ansichtsverformungen vertraut zu werden.

Im zweiten Schritt (Kapitel 2) wird eine Experimentierreihe entwickelt, die es erlaubt, die einzelnen Parameter systematisch zu variieren.

Der dritte Schritt (Kapitel 3) dient dem Ordnen der dokumentierten Erscheinungen, sodass auf Grundlage der Erscheinungsbedingungen empirische Regeln der Ansichtsverformung aufgestellt werden können.

Im vierten Schritt (Kapitel 4) kann der Zusammenhang zwischen ursprünglicher und verformter Ansicht mathematisch formuliert werden.

### 1.2. Der erste Schritt: Ansichtsverformungen bei Kugellinsen aus dem Alltag beschreiben



(a)



(b)



(c)

**Abb. 2:** Blick durch eine Glaskugel auf einen Strauß Osterglocken. Von (a) bis (c) wird die Kugel vom Auge (der Kamera) zu den Blumen hin verschoben.

Gegenstände hinter Wassergläsern sehen verzerrt und teilweise sogar vervielfacht aus. Abbildung 1 zeigt beispielhaft ein halbkugelförmiges Wasserglas, hinter dem ein Strauß Osterglocken steht. Beim Rundgang um das Glas zeigen sich zunächst zwei Bilder eines Blütenblatts (Abb. 1(a)), die plötzlich miteinander verschmelzen (Abb. 1(b)), und später ein neu auftauchendes Bild eines Kelchblatts (Abb. 1(c)), das

sich in seiner Verformung (Abb. 1(d)) schließlich in zwei Bilder zertrennt (Abb. 1(e)).

An Glasmurmeln oder Kristallkugeln erscheinen die Bildverzerrungen bereits regelartiger als bei Trinkgläsern, wenn auch nicht minder rätselhaft. Wird eine solche Kugel vom Auge (bzw. der Kamera) weg und zu den Osterglocken hingeführt, verhält sie sich noch ähnlich wie eine Blende, die vom Auge weggeführt wird: Schritt für Schritt ist immer weniger der dahinterliegenden Umgebung sichtbar (vgl. Abb. 2).



(a)

(b)

(c)

**Abb. 3:** Blick durch eine Glaskugel auf einen Strauß Osterglocken. Von (a) über (b) nach (c) wird das Auge (die Kamera) zur Kugel nachgeführt (vgl. Abb. 2).

Wird das Auge (bzw. die Kamera) dann nachgeführt, stellen sich die Veränderungen aber ganz anders als beim Blick durch eine Blende dar: Weiterhin schwindet Schritt für Schritt Sichtinhalt, im gleichen Maße werden die Bildverzerrungen jedoch immer stärker (Abb. 3).



(a)

(b)

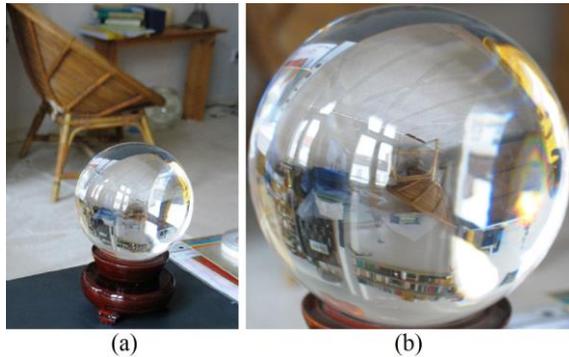
(c)

**Abb. 4:** Blick durch eine Glaskugel auf direkt dahinter liegendes.

Objekte, die sich wie das gemaserte Holz direkt hinter der Kugel befinden, sehen im Bereich der Kugelmittle stark aufgebläht aus (Abb. 4). Zudem erscheinen die Objekte in allen dokumentierten Ansichten seitenverkehrt und kopfstehend.

An größeren klaren Kugeln lassen sich die Verzerrungen noch genauer studieren. Dort fällt schnell auf, dass mehrfache, sich überlagernde und charakteristisch verzerrte Ansichten der Umgebung sichtbar werden (Abb. 5, vgl. [7]). Zum einen wirkt die den Beobachtern zugewandte Oberfläche als Wölbspiegel (Konvexspiegel), zum anderen wirkt die den Beobachtern abgewandte Oberfläche, also die Kugelmittelseite, als Hohlspiegel (Konkavspiegel). Daher rühren in Abbildung 5 die aufrechten Bilder der beiden Fenster im linken Bereich der Kugel und das große, kopfstehende Bild des Fensters im rechten Bereich der Kugel. Zudem erlaubt die Kugel, wie Murmel und Wasserglas auch, Durchblick auf Dahinter-

liegendes. Das zugehörige Bild erscheint typischerweise seitenverkehrt kopfstehend und rundlich verformt.



**Abb. 5:** Kristallkugel im Zimmer. (a) Überblicksfoto, (b) Blick durch die Kugel (Durchmesser ca. 11 cm), vgl. [8].

In Abbildung 5 lässt sich das beispielsweise an dem zentralen Korbstuhl und dem schmalen Bücherregal nachvollziehen. Die äußeren Bildbereiche schmiegen sich dabei dem Kugelrand an.

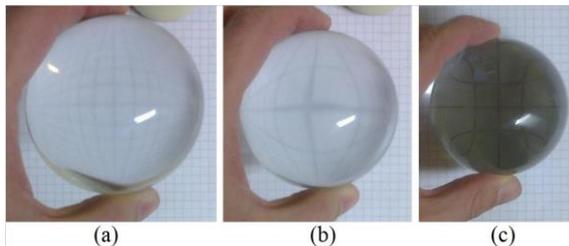
In all diesen Fällen wird die ursprüngliche Ansicht (der Osterglocken, der Maserung des Tisches, des Korbstuhls usw.) beim Blick durch das kugelförmige Medium verzerrt.

Um die Charakteristik dieser Verzerrungen genauer nachvollziehen zu können, werden wir für unsere weiteren Erkundungen anstelle der Alltagsgegenstände ein regelmäßiges Muster verwenden.

## 2. Der zweite Schritt: Die Bildverformungen im Experiment erkunden

### 2.1. Ansichten regelmäßiger Muster beim Blick durch die Kugellinse

Regelmäßige Muster wie Geraden oder Karoraster machen auf eine weitere Besonderheit der Bildverzerrungen an Kugellinsen aufmerksam: Es gibt nicht nur aufgeblähte und gestauchte Bildbereiche, sondern unter Umständen auch Schlaufen (vgl. Abb. 6).



**Abb. 6:** Kugellinse über Karopapier. Führt man eine Kugellinse an ein Blatt kariertes Papier heran, sieht man (a) zunächst ein konvexes Raster, das sich (b) immer mehr aufbläht und (c) schließlich innen konkav wird und außen überraschende Schlaufen bekommt, während der Bildinhalt immer dunkler wird.

Diese Schlaufen erinnern an Bildverzerrungen bei gekrümmten Spiegeln. Abbildung 7 zeigt so ein Spiegelbild in einer Kaffeetasse, wo sich der Rand des Kaffeespiegels adhäsionsbedingt nach oben biegt. Auch dort zeigen sich am Rand des Spiegelbildes der

rasterartigen Bahnhofsdecke charakteristische Schlaufen. Interessanterweise ist das sich spiegelnde Muster der gebogenen Bahnhofsdecke im Zentrum seines Spiegelbildes allerdings gerade entzerrt.



**Abb. 7:** Schlaufenförmiges Muster im Kaffee. (a) Bestellt man im Bahnhof Dresden-Neustadt einen Kaffee, bekommt man ihn stets mit einer wunderschönen Verzierung serviert. (b) Hebt man den Blick von der Kaffeetasse nach oben, entpuppt sich das schlaufenförmige Muster als verformtes Spiegelbild des fast quadratischen Dachfensters.

Diese Beobachtung rückt das gesamte Wechselspiel von Ver- und Entzerrung in die Nähe von Zerrbildern, wie sie seit Jahrhunderten als Anamorphosen bekannt sind. Damit steht die Idee im Raum, mit Hilfe der Kugellinse bereits vorverzerrte Ansichten wieder zu entzerren.

### 2.2. Den Verformungen vorbeugen: Anamorphosen als Zugang zur Kugellinse

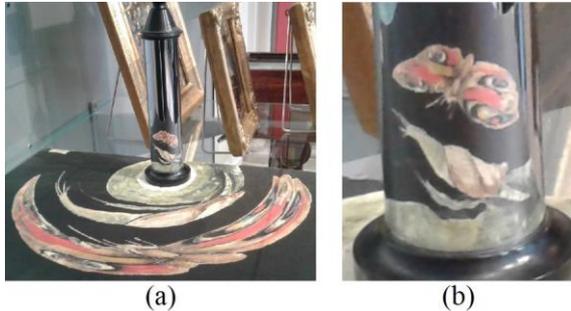
Anamorphosen sind seit dem Mittelalter bekannt. Dabei werden Bilder unverzerrter Objekte derartig verzerrt gezeichnet, dass sie von einem bestimmten Beobachtungspunkt aus entzerrt gesehen werden [10-13].

*Perspektivische* Anamorphosen sind den meisten von uns aus dem Alltag bekannt: in die Länge gezerrte Buchstaben auf der Straße, die aus dem Auto heraus betrachtet als gut lesbares STOP erscheinen; auf dem Stadionrasen ausgebreitete Banner mit verzerrter Aufschrift, die auf dem Fernsehbildschirm eine klare Werbebotschaft zeigen; oder riesige Kreidezeichnungen von Straßenkünstlern, die räumlich aus dem Boden zu wachsen oder gar tief in ihn hinein zu reichen scheinen.



**Abb. 8:** Ansichtsverzerrung in einer spiegelnden Kaffeekanne.

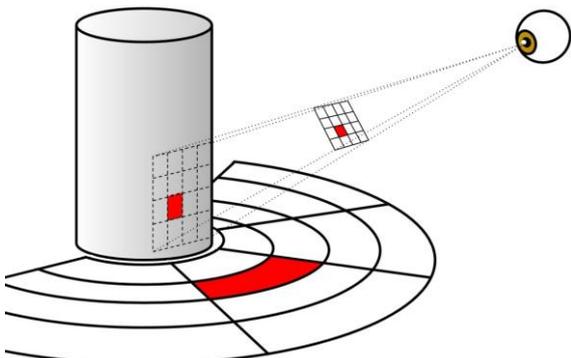
Starke Ansichtsverformungen finden sich auch an zylindrischen, spiegelnden Gegenständen, wie einer Kaffeekanne (Abb. 8). Solche Erscheinungen haben schon vor vielen Jahrhunderten zur speziellen Idee der Zylinderspiegel-Anamorphose geführt [10,12,13]: Um einen Zylinderspiegel herum kann ein Zerrbild so gezeichnet werden, dass es im Zylinderspiegel gerade verzerrungsfrei erscheint.



**Abb. 9:** Zylinderspiegel-Anamorphose (zu sehen im Mathematisch-Physikalischen Salon Dresden). (a) Um einen Spiegelzylinder herum sind rätselhafte Zerrbilder auf die Unterlage gemalt. (b) Im Spiegelzylinder erkennt man einen Schmetterling und eine Schnecke.

Solch eine *Zylinderspiegel-Anamorphose* ist zum Beispiel im Mathematisch-Physikalischen Salon in Dresden ausgestellt: Auf eine Unterlage ist ein bis zur Unkenntlichkeit verzerrtes Bild gemalt; dessen Spiegelbild im Zylinderspiegel lässt jedoch einen Schmetterling und eine Schnecke erkennen. Hier wird also die Verzerrung durch den Zylinderspiegel genutzt, um das gemalte Zerrbild zu entzerren.

Aber wie gelingt überhaupt die Erzeugung eines passenden Zerrbildes? Hierfür kommen geometrische, mechanische oder optische Verfahren in Frage [10,12,13].



**Abb. 10:** Das Prinzip einer Zylinderspiegel-Anamorphose: Man zeichnet um den Zylinder herum ein verzerrtes Raster, wie es bei der Projektion eines Quadratrasters vom Betrachterstandpunkt aus entsteht. Die verschiedenen Teile eines unverzerrten Bildes überträgt man vom Quadratraster in das verzerrte Raster und erhält so das Zerrbild.

Das optische Verfahren besteht darin, das unverzerrte Motiv vom vorgesehenen Betrachterstandort aus zu projizieren (entlang der angedachten Blickrichtung)

und das entstehende Zerrbild nachzuzeichnen (Abb. 10).

So, wie ein Zylinderspiegel zur Enträtselung von katoptrischen Anamorphosen genutzt werden kann, kann die Kugellinse als ein Werkzeug zur Entschlüsselung dioptrischer Anamorphosen aufgefasst werden. In diesem Sinne wollen wir die Kugellinse zur Erschließung der Ansichtsverformungen nutzen. Dementsprechend kehrt sich unsere ursprüngliche Frage um:

- Auf welche Weise muss ein Motiv **vorverzerrt** werden, damit es beim Blick durch die Kugellinse unverzerrt aussieht?

Um diese Frage zu beantworten, wollen wir das optische Verfahren zur Erzeugung eines anamorphotischen Zerrbildes auf die Kugellinse anwenden. Wir fragen also:

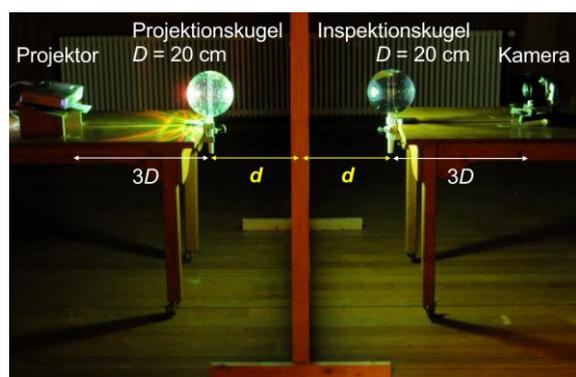
- Auf welche Weise wird ein Motiv verzerrt, wenn man es durch eine Kugellinse **projiziert**?

Wenn wir diese Frage beantwortet haben, können wir im Umkehrschluss auch unsere ursprüngliche Frage beantworten:

- Auf welche Weise wird ein Motiv verzerrt, wenn man es durch eine Kugellinse **inspiziert**?

### 2.3. Der experimentelle Aufbau

Um die Bildverformungen, die infolge der Projektion eines Bildes durch die Kugel entstehen, und diejenigen, die infolge der Inspektion eines Bildes (also beim Blick durch die Kugel) entstehen, gleichzeitig und trotzdem möglichst unabhängig voneinander verfolgen zu können, nutzen wir einen symmetrisierten Versuchsaufbau, in dessen Mitte ein transluzenter Schirm steht (Abb. 11).



**Abb. 11:** Symmetrisierter Aufbau zur Erkundung der Inspektion und Projektion durch eine Kugellinse. Die Kamera steht stellvertretend für das Beobachterauge.

Mithilfe eines Beamers wird ein am Rechner erstelltes Muster auf den transluzenten Schirm projiziert (linke Seite des Aufbaus). Dieses **Urbild** ist jetzt auch auf der Rückseite des Schirms zu sehen (rechte Seite des Aufbaus).

Wird vor das Beobachteraue eine Kugellinse (*Inspektionskugel*) gesetzt, sieht die beobachtende Person ein **Inspektionsbild** des Urbildes.

Wird hingegen vor den Projektor eine Kugellinse (*Projektionskugel*) gesetzt, dann erscheint auf dem Schirm ein anamorphotisch verzerrtes **Projektionsbild** des Urbildes. Gemäß der Anamorphose-Idee sollte der Abstand zwischen Projektionskugel und Schirm jeweils genauso groß sein wie der Abstand zwischen Inspektionskugel und Schirm.

Wird das Projektionsbild dann (auf der rechten Seite) durch die Inspektionskugel hindurch betrachtet, erscheint ein **Inspektionsbild des Projektionsbildes**.

Insgesamt können mit dem Aufbau also alle vier Permutationen für die Anwesenheit und Abwesenheit der zwei Kugellinsen durchgeführt werden. Dies entspricht vier verschiedenen Ansichten mit jeweils unterschiedlichen Bildformen.

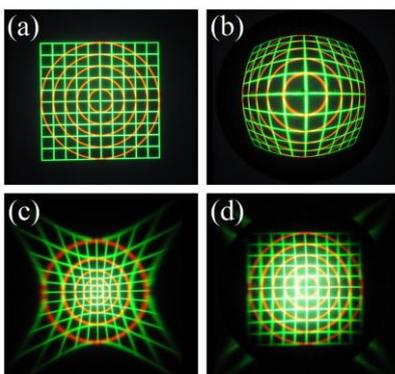
Als Kugellinsen werden zwei mit Wasser gefüllte Hohlkugeln aus transparentem Kunststoff (Durchmesser  $D = 20$  cm) verwendet.

Für die Erkundungen wird zunächst nur die **Schirmweite  $d$** , also der Abstand zwischen Schirm und der Mittelebene der Kugellinse verändert, so dass  $0,5D \leq d \leq 3D$ . Der Abstand zwischen Kugellinse und Auge beziehungsweise Projektor wird dabei konstant bei  $3D$  gehalten. Für die Dokumentation wird anstelle des menschlichen Auges ein technisches Auge in Form einer Digitalkamera gesetzt.

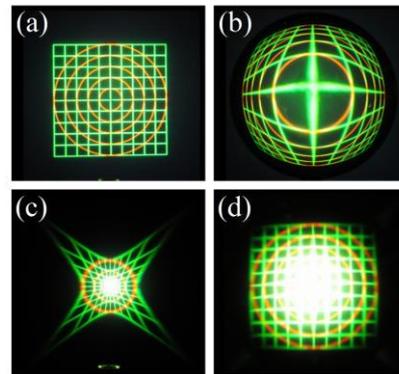
Als Urbild wird im Folgenden ein regelmäßiges Quadratraster mit konzentrischen Kreisen gewählt.

### 3. Der dritte Schritt: Die Verformungsweisen übersichtlich darstellen

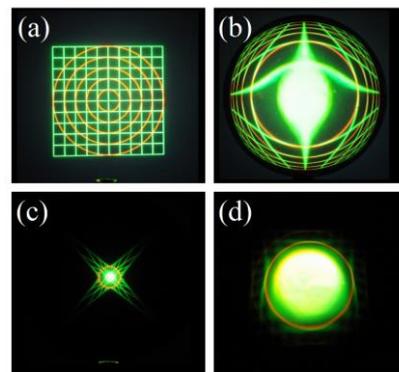
#### 3.1. Eine Abfolge von Bildverformungen



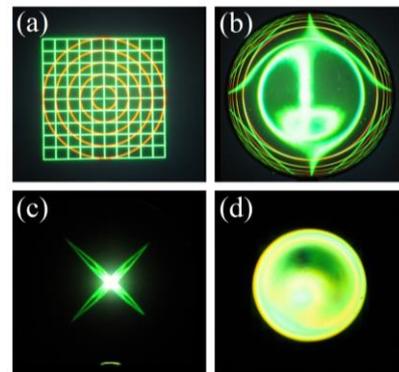
**Abb. 12:**  $d = 3D$ . (a) Urbild. (b) Inspektionsbild (vom Urbild). (c) Projektionsbild (vom Urbild). (d) Inspektionsbild vom Projektionsbild.



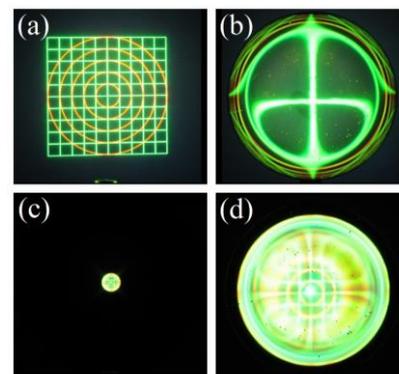
**Abb. 13:**  $d = 2D$ . (a)-(d) analog zu Abb. 12.



**Abb. 14:**  $d = 1,5D$ . (a)-(d) analog zu Abb. 12.



**Abb. 15:**  $d = 1,25D$ . (a)-(d) analog zu Abb. 12.



**Abb. 16:**  $d = 1D$ . (a)-(d) analog zu Abb. 12.

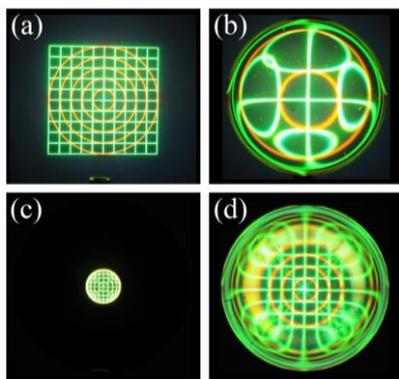


Abb. 17:  $d = 0,75D$ . (a)-(d) analog zu Abb. 12.

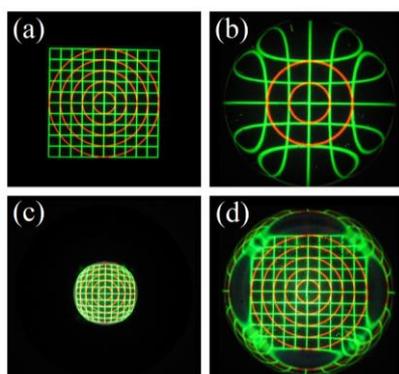


Abb. 18:  $d = 0,5D$ . (a)-(d) analog zu Abb. 12.

### 3.1.1. Überblick

Zunächst ist erkennbar, dass das Urbild stets dieselbe scheinbare Größe hat (Abb. 12(a)-18(a)), da sich das Auge jeweils in derselben Entfernung vom Schirm befindet wie der Projektor.

Zudem sind die Verformungen des Inspektionsbildes (Abb. 12(b)-18(b)) und des Projektionsbildes (Abb. 12(c)-18(c)) grundsätzlich einander entgegengesetzt.

Dementsprechend ist die Anamorphose-Idee mit der Kugellinse größtenteils umsetzbar (Abb. 12(d)-18(d)). Bei Unterschreitung eines kritischen Abstandes jedoch gehen einerseits gewisse Bildinformationen verloren und andererseits entstehen zusätzliche Strukturen (Abb. 15(d)-18(d)). Dies ist darauf zurückzuführen, dass dann das Inspektionsbild Ansichtsvervielfachungen (Abb. 15(b)-18(b)) und das Projektionsbild Bildüberlagerungen (Abb. 15(c)-18(c)) aufweist.

### 3.1.2. Beschreibung der Inspektionsbilder

Für eine nähere Beschreibung greifen wir uns die sieben Inspektionsbilder (Abb. 12(b)-18(b)) heraus:

Bei einem Kugelabstand  $d = 3D$  (größte im vorliegenden Aufbau dokumentierte Entfernung) ist das Projektionsbild seiner Struktur nach noch sehr ähnlich dem Urbild. Es ist zwar leicht aufgebläht, so als wäre es auf die Oberfläche einer großen Kugel gezogen, das Muster ist aber gut erkennbar (Abb. 12(b)). Allerdings ist diese **erste Ansicht** des Urbildes im Vergleich zum Urbild kopfstehend und seitenverkehrt orientiert. Zum Abstand von  $d = 2D$  hin nehmen die

konvexen Verformungen zu. Die Mitte der Ansicht bläht sich so weit auf, dass der zentrale Bereich bereits das gesamte Inspektionsbild dominiert und die übrigen Bereiche an den Rand verdrängt (Abb. 13(b)).

Bei weiterem Heranführen der Kugel an den Schirm steigert sich die Dominanz des Urbildzentrums derartig, dass sich der mittige, ursprünglich punkthafte Bildbereich über fast die Hälfte des Inspektionsbildes ausbreitet (Stadium in Abb. 14(b)), um dann jedoch im Zentrum der entstehenden hellen Kreisfläche aufzubrechen (Abb. 15(b)).

In diesem sehr engen Abstandsbereich geschieht optisch sehr viel. Zuerst, im Abstand der „Verschwimmweite“ [14], verschmiert ein sehr kleiner Teil Bildinhalt auf eine sehr große Fläche und drängt den restlichen Bildinhalt an den Kugelrand (Abb. 14(b)). Dann jedoch bricht das Innere dieser hellen Fläche auf und erlaubt Durchsicht auf eine zweite, sehr stark vergrößerte und konkav verformte Ansicht des Urbildes. Diese **zweite Ansicht** des Urbildes ist wie das Urbild orientiert, d. h. aufrecht und seitenrichtig. In Abbildung 15(b) ist die aufgeplatzte Fläche nach außen zu einem Kreis aufgeweitet, der die erste Ansicht zur Kugelmittigkeit hin begrenzt. Im Kreisring zwischen diesem Kreis und dem Kugelrand sehen wir die erste Ansicht (vgl. Abb. 19). Das im Zentrum der Ansicht stehende zweite Bild wird schließlich kleiner und klarer; es zieht sich gewissermaßen zusammen bzw. seine Vergrößerung, verglichen mit dem Urbild, nimmt ab (Abb. 16(b) und 17(b)). Seine Verformungen bleiben dabei konkav.

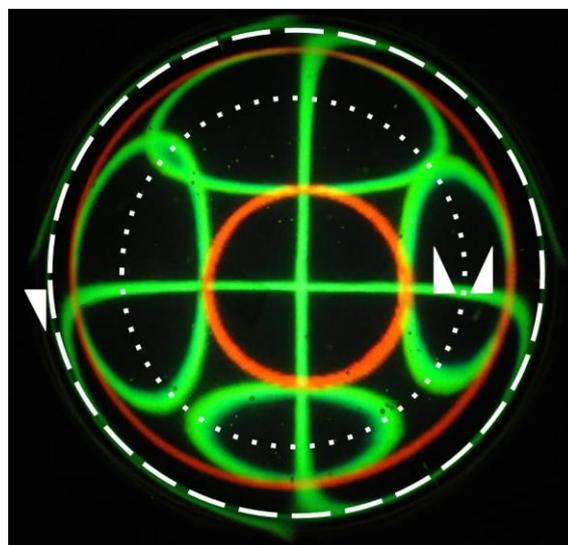
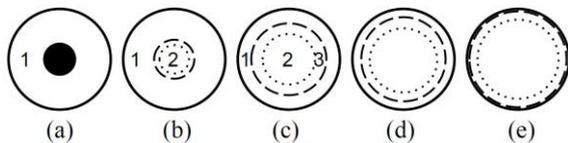


Abb. 19: Vergrößertes Inspektionsbild aus Abb. 17. Die Grenze zwischen erster und dritter Ansicht ist gestrichelt dargestellt, die Grenze zwischen zweiter und dritter Ansicht ist gepunktet dargestellt. Die weißen Dreiecke deuten die Orientierungen der Ansichten im Vergleich zum Urbild an.

Die letzten Stadien (Abb. 17(b) und 18(b)) machen auf eine weitere Besonderheit aufmerksam, die leicht zu übersehen ist und die sich bereits in den vorangegangenen Stadien finden lässt, vgl. [8] und Abb. 20: Die sich ausbildenden Schlaufen gehen auf das Auftauchen einer **dritten Ansicht** des Urbildes zurück (Abb. 15(b)). Sie befindet sich auf einem schmalen Kreisring zwischen der ersten und zweiten Ansicht (vgl. den vergrößerten Ausschnitt von Abb. 17 in Abb. 19). Man kann sich den Bildinhalt der dritten Ansicht geometrisch entstanden denken aus einer gestauchten Spiegelung der zweiten Ansicht an einer zweiten kreisförmigen Bildgrenze (die gemeinsam mit der ersten Bildgrenze aufgetaucht ist). Diese hinzugedachte Bildgrenze stellt die äußere Grenze der zweiten Ansicht dar und wandert ebenfalls, wenn auch langsamer als die innere Bildgrenze der ersten Ansicht, nach außen. An ihr schließen sich korrespondierende Bildinhalte der zweiten und dritten Ansicht zu den auffälligen Schlaufen zusammen.



**Abb. 20:** Schematische Darstellung der Entstehung der Mehrfachansichten bei Unterschreitung des kritischen Abstands zwischen Inspektionskugel und Urbild, vgl. Abb. 14(b)-18(b). Die durchgängige Linie stellt den Kugelumfang dar, die gestrichelte Linie den beobachtbaren Rand der aufgeplatzten Bildmitte, die gepunktete Linie eine hinzugedachte Hilfslinie, an der eine verzerrte geometrische Spiegelung stattfindet, vgl. Abb. 19. Nummeriert sind die Zonen, in denen sich die erste, zweite beziehungsweise dritte Ansicht befinden.

### 3.2. Empirische Regeln der Bildverformungen

In der Abfolge der Bildverformungen lassen sich einige Regeln finden:

#### 3.2.1. Steigerung einer vorliegenden Verformungsart

- Inspektion: Die Konvexität konvexer Ansichten nimmt mit abnehmender Schirmweite zu. Die Konkavität konkaver Ansichten nimmt mit abnehmender Schirmweite ab.
- Projektion: Die Konkavität konkaver Projektionsbereiche nimmt mit abnehmender Schirmweite zu. Die Konvexität konvexer Projektionsbereiche nimmt mit abnehmender Schirmweite ab.

#### 3.2.2. Vermehrung der Abbildungen des Urbildes

- Inspektion: Bei Unterschreitung einer kritischen Schirmweite eröffnet sich innerhalb der konvexen Ansicht eine konkave und eine zusätzliche konvexe.

- Projektion: Bei Unterschreitung einer kritischen Schirmweite breitet sich auf dem konkaven Projektionsbereich ein konvexer und ein zusätzlicher konkaver aus.

#### 3.2.3. Invariante Bildstrukturen

- Inspektion: Kreise im Urbild bleiben Kreise im Inspektionsbild, wenn ihr Zentrum durch das Zentrum der Kugel gesehen wird. Radien solcher Kreise bleiben krümmungsfrei.
- Projektion: Kreise im Urbild bleiben Kreise im Projektionsbild, wenn ihr Zentrum durch das Zentrum der Kugel projiziert wird. Radien solcher Kreise bleiben krümmungsfrei.

Aus der Erhaltung kreisförmiger und radialer Bildstrukturen um die Bildmitte können wir schlussfolgern, dass die Kugellinse lediglich **radiale Verformungen** erzeugt. Diese Erkenntnis wird der Schlüssel für unsere formale Beschreibung sein.

### 4. Der vierte Schritt: Den formalen Zusammenhang zwischen unverzerrtem und verzerrtem Bild beschreiben

#### 4.1. Grafische Darstellung der Bildverformungen

Ziel unserer phänomenologischen Untersuchung ist es, die Verzerrung des Urbildes zum Bild durch die Kugellinse formal zu beschreiben; zunächst grafisch, später algebraisch. Da alle Verformungen entlang der Radien der Kugelansicht stattfinden (vgl. 3.2.3), reicht es, den formalen Zusammenhang zwischen der radialen Urbildkoordinate  $r$  und der radialen Inspektions- bzw. Projektionsbildkoordinate  $r_I$  bzw.  $r_P$  anzugeben. Die grafische Darstellung der zu ermittelnden Zuordnung  $r \rightarrow r_I$  bzw.  $r \rightarrow r_P$  kann bereits auf Grundlage der Fotos von Urbild und Inspektions- bzw. Projektionsbild erfolgen, wenn nach folgenden Schritten vorgegangen wird:

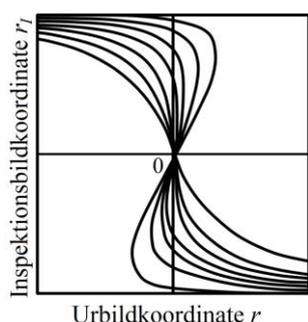
- $r$  als ursprünglichen Kreisradius im Urbild-Foto ablesen (Abb. 12-18, (a)),
- $r_I$  bzw.  $r_P$  als neuen Kreisradius im Foto vom Inspektions- bzw. Projektionsbild ablesen (Abb. 12-18, (b) bzw. (c)),
- $r$  und  $r_I$  bzw.  $r_P$  in eine Wertetabelle eintragen,
- Wertepaare als Punkte in einem kartesischen Koordinatensystem darstellen und miteinander verbinden.

Als nützlich erwies sich dabei folgende Konvention: Ein seitenverkehrter (bzw. kopfstehender) Bildbereich wird mit dem umgekehrten Vorzeichen wie das Urbild bezeichnet; ein seitenrichtiger (bzw. aufrechter) Bildbereich mit dem gleichen Vorzeichen.

Die Schritte eins bis vier lassen sich abkürzen, falls das Raster Quadrate enthält, die über die Kugel beziehungsweise ihren Schatten hinausragen. In diesen Fällen erübrigt sich das Urbild-Foto; man kann dann die Wertepaare unmittelbar aus dem Inspektions-

bzw. Projektionsbild-Foto ablesen und direkt in das Foto als Punkte einzeichnen, denn  $r$  ist dann im Außenbereich der Kugel (oder ihres Schattens) in horizontaler Richtung ablesbar; und  $r_I$  bzw.  $r_P$  ist im Innenbereich entlang des vertikalen Durchmessers ablesbar.

Bemerkenswerterweise sind jene Fälle, die für die Inspektion schwierig zu vermessen sind, für die Projektion wiederum einfach zu vermessen, und umgekehrt. Dies wird aus der Tatsache verständlich, dass sich die verzerrte Projektion mittels entsprechender Inspektion entzerren lässt. Bereiche, die etwa in der Inspektion extrem gestaucht erscheinen, werden in Projektion gestreckt (und umgekehrt). Somit kann man eine vollständige Vorstellung über die Bildverformung gewinnen, wenn man die messtechnisch kaum erfassbaren Grafen für die Inspektion durch eine  $90^\circ$ -Drehung der Grafen (bzw. eine Vertauschung der Koordinaten) für die Projektion ergänzt, und umgekehrt. Die Übergangssituation zwischen Einfach- und Mehrfachabbildungen ist trotzdem kaum zu vermessen; sie kann aber gedanklich in den Diagrammen erschlossen werden.



**Abb. 21:** Kurvenschar für den Zusammenhang zwischen ursprünglicher und verzerrter Ansicht beim Blick durch die Kugellinse (*Inspektion*). Abfolge der Kurven im Uhrzeigersinn:  $d = 3D; 2D; 1,5D; 1,25D; 1D; 0,75D$  und  $0,5D$ . Der mittlere Bereich der Kugellinse (kleine  $r_I$ -Werte) verhält sich bildoptisch wie eine dünne Linse (nahezu geradliniger Graf). Die entsprechende Kurvenschar für die *Projektion* durch die Kugellinse erhält man durch Rotation des Diagramms um  $90^\circ$ .

#### 4.2. Eine Klassifizierung der Ansichten mit Hilfe der grafischen Darstellung

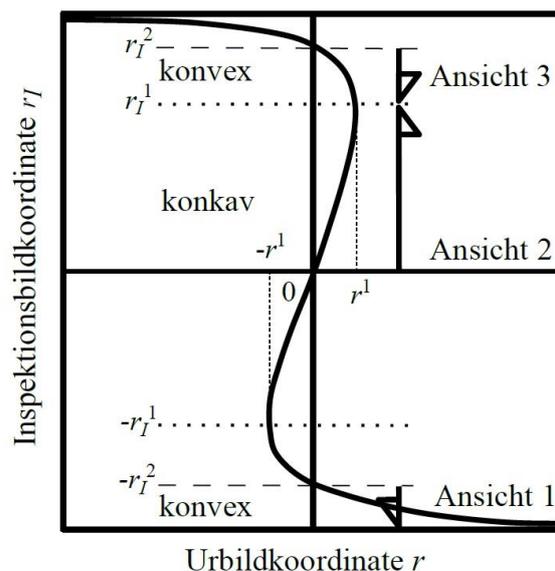
Die Diagramme erleichtern die Erfassung der Erscheinungsbedingungen. Sie helfen beispielsweise zu erkennen, in welchen Fällen dreifache Bildüberlagerungen (bei der Projektion) beziehungsweise dreifache Ansichten (bei der Inspektion) entstehen. So kann man ihnen unmittelbar entnehmen, wie ein Bildpunkt des Urbildes abgebildet wird: eine zur Bildkoordinatenachse parallele Gerade durch die Urbildkoordinate schneidet den Grafen an den Orten der zugehörigen Bildkoordinate.

Für große Schirmweiten ist dies immer eindeutig und entspricht einer Einfachabbildung in Projektion und

Inspektion (Abb. 21,  $d \geq 2D$ ). Dabei kann die Steigung des Grafen als Abbildungsmaßstab der Abbildung interpretiert werden. Eine abnehmende Steigung des Grafen bei Entfernung vom Ursprung entspricht einer Bildstauchung zu den Bildrändern, die für die konvexe Bildverformung charakteristisch ist. In diesen Fällen verlaufen die Grafen ausschließlich im zweiten und vierten Quadranten. Die ungleichnamige Bild- und Urbildkoordinate zeigt die seitenverkehrte und kopfstehende Ansicht an.

Für kleine Schirmweiten, in denen Dreifachabbildungen vorliegen, ist die Zuordnung zwischen Urbildkoordinaten und Inspektions- bzw. Projektionsbildkoordinaten nicht mehr eindeutig. In diesen Fällen durchläuft der Graf alle vier Quadranten und erlaubt eine detaillierte Interpretation der Bildbereiche (Abb. 22). Eine zur Bildkoordinatenachse parallele und nahe, vertikale Hilfslinie schneidet den Grafen in drei Punkten, an denen die zugehörigen Bildkoordinaten ablesbar sind. Diese entsprechen Dreifachabbildungen, die sich durch den Grafen jetzt genauer charakterisieren lassen.

- ungleichnamige Koordinaten (2. und 4. Quadrant), monoton fallende negative Steigung: konvexe, seitenverkehrte und kopfstehende 1. Ansicht des Urbildes;
- gleichnamige Koordinaten (1. und 3. Quadrant), monoton wachsende positive Steigung: konkave, seitenrichtige und aufrecht stehende 2. Ansicht des Urbildes;
- gleichnamige Koordinaten (1. und 3. Quadrant), monoton fallende negative Steigung: konvexe, am Kreis „gespiegelte“ 3. Ansicht des Urbildes. Diese Ansicht ist seitenrichtig, aber kopfstehend (bzw. aufrecht, aber seitenverkehrt)!



**Abb. 22:** Charakteristische Kurveneigenschaften im Bezug zu Bildeigenschaften am Beispiel des Inspektionsbildes beim Abstand  $d = 0,75D$ , vgl. Abb. 19.

Auch gestattet der Graf eine quantitative Angabe der Bildgrenzen der Mehrfachabbildungen bzw. vervielfachten Ansichten: die Schnittpunkte des Grafen mit der Bildkoordinatenachse (Abb. 22, gestrichelte horizontale Linien) geben den Radius  $r_l^2$  an, in dem im Inspektionsbild der begrenzende Kreis der aufgesetzten Bildmitte (und damit die Grenze zwischen erster und dritter Ansicht) gesehen wird. Die zur Bildkoordinatenachse parallelen Tangenten an die s-förmige Kurve schneiden die Urbildachse in den Koordinaten  $r^l$  bzw.  $-r^l$ , die als Bereich des Urbildes interpretiert werden können, der aufrecht und seitenrichtig gesehen werden kann. Die ihnen entsprechenden Bildkoordinaten  $r_l^l$  bzw.  $-r_l^l$  geben dann die Grenze zwischen zweiter und dritter Ansicht an und damit auch den Kreisradius der gedachten Kreislinie, an der das aufrechte und seitenrichtige Bild einmal „gespiegelt“ wird.

Die formale Beschreibung mit dem s-förmigen Verlauf der Grafen gestattet damit nicht nur die quantitative Angabe dieser die Abbildung konstituierenden Elemente (die aufgrund von Unschärfen nicht unbedingt den Fotos direkt entnommen werden können), sondern begründet auch die empirisch aufgestellten Regeln. So folgt aus dem s-förmigen Kurvenverlauf rein formal, dass im Inspektionsbild entweder nur die erste Ansicht erscheint oder alle drei Ansichten zugleich erscheinen. In letzterem Fall ist die Zuordnung nicht eindeutig und daher existiert auch keine Umkehrfunktion. Dies entspricht der Erfahrung, dass in diesen Bildbereichen eine Projektion mit anschließender Inspektion das Urbild nicht rekonstruieren kann. Diese Besonderheit der Kugelabbildung beschränkt die Anwendbarkeit der Anamorphose-Idee.

## 5. Diskussion

Anhand unserer Phänomenreihe zum Blick durch die Kugellinse haben wir eine formale Beschreibung für die Ansichtsverformung gefunden. Damit lässt sich die verformte Ansicht durch die Kugellinse nicht nur beschreiben, sondern auch vorhersagen. Unsere formale Beschreibung ist bisher nur grafisch; eine algebraische Behandlung steht noch aus.

Die bisherige Phänomenreihe ist freilich noch unvollständig. Es fehlen insbesondere eine systematische Variation des Abstands zwischen Kugel und Betrachter (bzw. Projektor) und eine systematische Variation der Blickrichtung (bzw. Projektionsrichtung).

Zur Beantwortung unserer Frage zur Ansichtsverformung brauchten wir keine Strahlen, Kaustik oder sonstige Werkzeuge für abgelöste Versuche. Wir konnten eingebunden mit Blick auf die Bildebene bleiben und alle relevanten Zusammenhänge zwischen ursprünglichem und verformtem Bild von dort aus erfassen.

Nichtsdestotrotz ist ein Bezug zur Kaustik [6] und zum Strahlenmodell möglich und bereichernd. Ordnet man die projizierten Bilder von verschiedenen

Schirmweiten gedanklich hintereinander an, erhält man als Gesamtheit die bekannte Kaustik der Kugellinse. Im Umkehrschluss stellen die projizierten Bilder Querschnitte durch diese Kaustik dar. Dreht man den Projektionsschirm so, dass er nicht mehr quer zur optischen Achse steht, sondern entlang der optischen Achse liegt, so erhält man den bekannten Längsschnitt durch die Kaustik. Die streifend projizierten Rasterlinien veranschaulichen dann die Strahlengeometrie.

Die Stärke dieses Ansatzes liegt nicht nur in der Vermeidung eines strahlenbasierten Zugangs, sondern auch in der Wahl eines aus den empirischen Befunden abgeleiteten Koordinatensystems. Anstatt kartesischer Koordinaten zur Beschreibung des Urbildes und des Inspektionsbildes haben wir Polarkoordinaten gewählt. Es ist zu erwarten, dass sich dadurch auch das Gleichungssystem für die Bildkurve [6] einfacher lösen lässt.

Ein Verständnis der Kugellinse ist bedeutsam, da reale Linsen nicht dem Ideal einer dünnen Linse entsprechen. Bei einer idealen Linse würde man anstelle der s-förmigen Grafen aus Abbildung 21 geradlinige Grafen erwarten. Reale Linsen sind eine Zwischenform zwischen der extrem dünnen (idealen) Linse und der extrem dicken Linse (Kugellinse), so dass man hierfür leicht gekrümmte Grafen zeichnen müsste.

## 6. Zusammenfassung und Ausblick

Ausgehend von alltäglichen und experimentellen Beobachtungen haben wir empirische Regeln zur Ansichtsverformung durch eine Kugellinse formuliert. Um den Zugang zu erleichtern, haben wir das Prinzip einer Anamorphose auf die Kugellinse übertragen und hierfür das Auge zwischenzeitlich durch einen Projektor ersetzt. Durch einen Vergleich zwischen der unmittelbaren und der verformten Ansicht haben wir eine halbquantitative Beschreibung der scheinbaren Verformung in Abhängigkeit von der Gegenstandsweite gefunden, selbst ohne Strahlenoptik. Um jedoch zu einer umfassenderen und genaueren Beschreibung zu gelangen, sind die bildbasierten Untersuchungen fortzusetzen.

## 7. Literatur

- [1] Kepler, J. (2000): *Optics. Paralipomena to Witelo and the Optical Part of Astronomy* (William H. Donahue, Übers.). Santa Fe: Green Lion Press.
- [2] Beißwenger, J. (2006): Linsenphänomene des Alltags. Oder: Das Phänomen der drei Bilder im Glas. In: H. Grötzebauch, V. Nordmeier (Hrsg.), *Didaktik der Physik-Kassel*.
- [3] Schlichting, H.-J. (2009): Gekrümmte Ansichten. In: *Physik in unserer Zeit* 40(6), 314. URL: <https://online-library.wiley.com/doi/full/10.1002/piuz.200990113> (Stand 9/2018)

- [4] Backhaus, Udo & Braun, T. (2007): Der Blick ins Wasserglas. Ein Anlass zu Offenem Experimentieren. In: H. Grötzebach, V. Nordmeier (Hrsg.), *Didaktik der Physik–Regensburg*.
- [5] Pernter, J. M. & Exner, F. M. (1910): *Meteorologische Optik*. Wien, Leipzig: Braumüller.
- [6] Quick, Thomas (2015): *Phänomenologie der optischen Hebung*. Berlin: Logos.
- [7] Müller, M. (2017): *Grammatik der Natur. Von Wittgenstein Naturphänomene verstehen lernen*. Berlin: Logos. URL: <https://zenodo.org/record/343889/files/978-3-8325-4424-9.pdf> (Stand 6/2018)
- [8] Müller, M. & Grebe-Ellis, J. (2007): Spiegelbilder der Sonne im Tropfen – Zur Phänomenologie des Regenbogens. In: H. Grötzebach, V. Nordmeier (Hrsg.), *Didaktik der Physik–Regensburg*.
- [9] Müller, M. (2006): *Zur Phänomenologie des Regenbogens* (Examensarbeit). Humboldt-Universität zu Berlin.
- [10] Füsslin, G. & Hentze, E. (1999): *Anamorphosen. Geheime Bilderwelten*. Stuttgart: Füsslin.
- [11] Hunt, J. L., Nickel, B. G. & Gigault, C. (2000): Anamorphic images. *Am. J. Phys.* 68(3), 232-237. URL: <https://doi.org/10.1119/1.19406> (Stand 6/2018)
- [12] Eser, T. (2001): Augsburgs Anamorphosen des 18. Jahrhunderts. In: J. R. Paas (Hrsg.), *Augsburg, die Bilderfabrik Europas: Essays zur Augsburgs Druckgraphik der Frühen Neuzeit* (S. 173-188). Augsburg: Wißner.
- [13] Heeke, M. (2003): *Anamorphosen und Luftspiegelungen aus dem Blickwinkel des Physikunterrichts* (Schriftliche Hausarbeit im Rahmen der Ersten Staatsprüfung für das Lehramt für die Sekundarstufe I und II). Staatliches Prüfungsamt für Lehrämter an Schulen, Münster. URL: <http://didaktik.physik.fu-berlin.de/~nordmei/PhysikKunstMusik/Software/Anamorphosen.pdf> (Stand 6/2018)
- [14] Mackensen, M. v. & Ohlendorf, H. C. (1998): *Modellfreie Optik*. Kassel: Pädagogische Forschungsstelle.

### Danksagung

Dr. Steffen Danzenbächer trug zur Erkundung der Ansichtsverzerrungen bei, indem er strahlenbasierte Simulationen mit *POV-Ray* anfertigte und eine Analyse der Blickwinkel vorschlug.