

Die Vermittlung von Einsteins Allgemeiner Relativitätstheorie mittels Sektormodellen: Die Konstruktion von Geodäten

Sarah-Carina Keuchel, Ute Kraus, Corvin Zahn

Universität Hildesheim, Institut für Physik,
Universitätsplatz 1, 31141 Hildesheim,
keuche@uni-hildesheim.de, ute.kraus@uni-hildesheim.de, corvin.zahn@uni-hildesheim.de

Kurzfassung

Sektormodelle sind Werkzeuge, die es ermöglichen Schüler/innen in Einsteins Allgemeine Relativitätstheorie einzuführen. Mittels Videoanalyse untersuchen wir, wie Schüler/innen die Konstruktion von Geodäten auf Sektormodellen erlernen, bis sie in der Lage sind, die Konstruktion selbstständig durchzuführen. Anhand von Sektormodellen gekrümmter Flächen werden die Akzeptanz des Unterrichtsmaterials, seine Handhabung sowie das Verständnis der Schüler/innen für die Methode untersucht.

Abstract

Teaching Einstein's General Relativity with Sector Models: The Construction of Geodesics

Sector models are tools that make it possible to introduce students to Einstein's general relativity. Using video analysis we study how students acquire knowledge about constructing geodesics on sector models until they are able to perform the construction on their own. Using sector models of curved surfaces, the acceptance of the materials and their handling as well as the students' understanding of the method are investigated.

1. Einleitung

Für die Vermittlung der Allgemeinen Relativitätstheorie in der Schule wird ein Zugang benötigt, für den Schulmathematik ausreichend ist. Im Hinblick auf dieses Ziel haben wir Sektormodelle als Anschauungsmodelle für gekrümmte Flächen, Räume und Raumzeiten entwickelt sowie Lerneinheiten für den Einsatz von Sektormodellen in Schule und Studium erstellt (Zahn und Kraus (2014, 2018); Kraus und Zahn (2018)). Im Rahmen einer Masterarbeit (Keuchel (2017)) wurde eine Unterrichtseinheit zum Thema gravitative Lichtablenkung in unterschiedlichen Klassenstufen eines Gymnasiums durchgeführt und evaluiert. In dieser Unterrichtseinheit werden die Schüler/innen mit Hilfe von Sektormodellen schrittweise an die Thematik der Geometrie gekrümmter Flächen und schließlich gekrümmter Räume herangeführt. Zur Evaluation werden Videoaufnahmen, Arbeitsblätter und schriftliche Lernzielkontrollen ausgewertet. In zwei Unterrichtssequenzen dieser Einheit wird die graphische Bestimmung von Geodäten auf Sektormodellen behandelt. Wir berichten über die Ergebnisse der Evaluation dieser Unterrichtssequenzen. Drei Aspekte werden untersucht: Erstens wie es den Schüler/innen ge-

lingt eine beschriebene Vorgehensweise zum Einzeichnen von Geodäten zu übernehmen, zweitens die Möglichkeit eines eigenständigen Erschließens der Konstruktionsvorschrift und drittens die Akzeptanz der Materialien und ihrer Nutzung. Diese Arbeit ist ein Teil eines längerfristigen Design-Research-Projekts zur Didaktik der Allgemeinen Relativitätstheorie (Design-Based Research Collective (2003)).

2. Fragestellung

Den hier betrachteten Unterrichtssequenzen ist eine Sequenz vorangestellt, in der zunächst die Begriffe Krümmung (qualitative Unterscheidung von positiver, negativer und verschwindender Krümmung) und Geodäte besprochen und definiert wurden.

Unter einer Geodäte verstehen die Schüler/innen zum Zeitpunkt der Bearbeitung eine lokal gerade verlaufende Linie, welche in einer Fläche verläuft und weder nach links noch nach rechts abbiegt. Mit Hilfe von biegsamen Linealen haben die Schüler/innen Geodäten auf die Oberfläche eines Globus eingezeichnet (Abb. 1) und den Unterschied zwischen den Längen- und Breitenkreisen diskutiert. Die Schüler/innen haben gesehen, dass sich auf dem Globus zwei parallel startende Geodäten annähern.



Abb. 1: Zwei anfänglich parallel startende Geodäten auf der Oberfläche eines Globus.

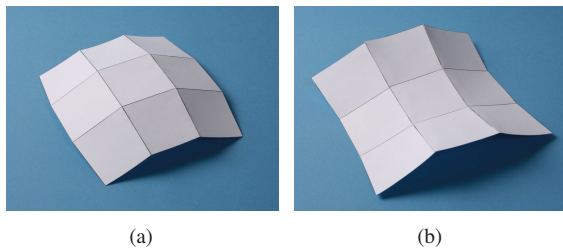


Abb. 2: Durch Flächenstücke angenäherte Kugelkalotte (a), Sattelfläche (b) (Zahn und Kraus (2014)).

Die Schüler/innen haben außerdem das Konzept des Sektormodells einer gekrümmten Fläche kennengelernt (Abb. 2 und 3): Eine Fläche wird durch kleine, ebene Flächenstücke angenähert; diese sind die Sektoren und werden in der Ebene zum Sektormodell ausgelegt.

In den hier betrachteten Unterrichtssequenzen arbeiten die Schüler/innen mit Sektormodellen einer Kugelkalotte, einer Sattelfläche und eines Torus. In der ersten Unterrichtssequenz sollen die Schüler/innen auf den in Abb. 3 gezeigten Sektormodellen einer Kugelkalotte und einer Sattelfläche Geodäten einzeichnen, deren Beginn durch Geradenstücke in einem Sektor des Modells vorgegeben ist. Abb. 4 zeigt die Lösung dieser Aufgabe.

Das richtige Einzeichnen einer Geodäte in ein Sektormodell erfordert hierbei 3 Aspekte, die beachtet werden müssen.

1. Innerhalb eines Sektors muss die Linie (Geodäte) geradlinig fortgesetzt werden.
2. Zum Weiterzeichnen in den Nachbarsektor muss dieser präzise an der gemeinsamen Kante angelegt werden.
3. Die lokal geraden Linien werden geradlinig über die Kante zum Nachbarsektor fortgesetzt.

Bei den Punkten 1 und 3 konnten bei den Schüler/innen keine Schwierigkeiten beobachtet werden, der Schwerpunkt der Untersuchung liegt deshalb auf Punkt 2. Insbesondere beim Übergang der Geodäte auf einen anderen Streifen muss der richtige Sektor

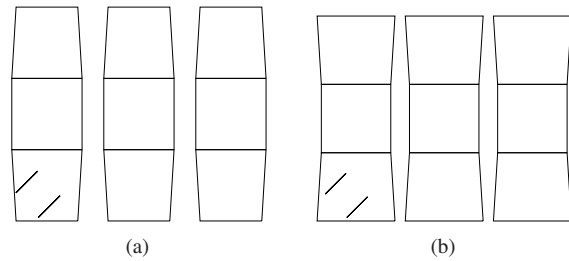


Abb. 3: Sektormodelle der Kugelkalotte (a) und der Sattelfläche (b) mit Startstrichen für Geodäten.

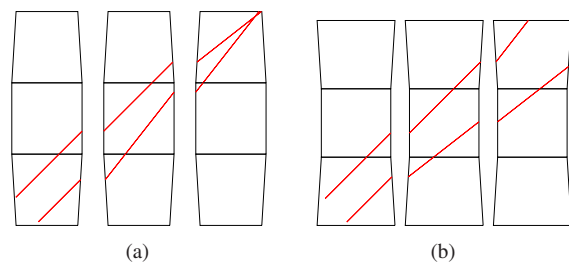


Abb. 4: Sektormodelle der Kugelkalotte (a) und der Sattelfläche (b) mit vervollständigten Geodäten.

des Nachbarstreifens an der Kante, an der die Geodäte einen Sektor verlässt, präzise angelegt werden, ungeachtet entstehender Lücken und Überlappungen bei den übrigen Kanten.

Nachdem in der ersten Unterrichtssequenz die Konstruktion von Geodäten erarbeitet und geübt wurde, soll dies in der zweiten Unterrichtssequenz an einem weiteren Beispiel, dem Sektormodell des Torus, selbstständig durchgeführt werden (Abb. 5).

Während in der ersten Unterrichtssequenz vorwiegend die Wissensaneignung im Vordergrund steht, soll bei der Aufgabe mit dem Sektormodell des Torus eine Aussage darüber erhalten werden, wie es den Schüler/innen gelingt mit den Werkzeugen umzugehen, welche Qualität die bei den vorherigen Modellen stattgefundenene Wissensaneignung hat und ob diese einen Transfer auf andere Sektormodelle zulässt. Eine besondere Herausforderung beim Torus besteht darin, dass die Fläche teilweise positiv und teilweise negativ gekrümmt ist, wodurch es bei dem Einzeichnen der Geodäten und korrekten Aneinanderlegen der Kanten bei den übrigen Sektoren je nach betrachtetem Bereich zu Lücken oder Überlappungen kommen kann.

In der Unterrichtseinheit wird die Konstruktion von Geodäten dazu benutzt, aus dem Verlauf parallel startender Geodäten die Krümmung einer Fläche zu bestimmen. Aus diesem Grund werden in den hier beschriebenen Aufgaben jeweils zwei parallel startende Geodäten konstruiert.

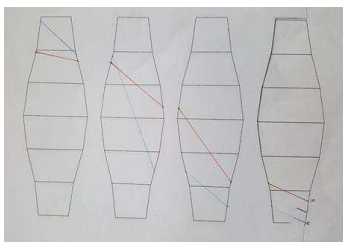


Abb. 5: Sektormodell des Torus mit eingezeichneten Geodäten.



Abb. 6: Zur Facettenfläche zusammengebasteltes Sektormodell eines Globus.

3. Ablauf

3.1. Unterrichtsablauf

Die gesamte Unterrichtseinheit wurden in fünf unterschiedlichen Kursen der Klassenstufen 6, 10, 11 (Seminarfach), 11 (Physikleistungskurs, nur 1. Unterrichtssequenz) und 12 durchgeführt. Die erste Unterrichtssequenz (Kugelkalotte und Sattelfläche) wurde von insgesamt 47 Schüler/innen, die zweite (Torus) von 54 Schüler/innen bearbeitet. Die Bearbeitung fand in Kleingruppen von 2-4 Schüler/innen statt. Im Kurs der Klassenstufe 10 wurden fünf Kleingruppen gebildet, in den anderen Kursen je drei. Aufgrund von Krankheitsfällen war ein Teil der Schüler/innen nur bei einer der beiden Sequenzen anwesend. Jede der beiden Unterrichtssequenzen wurde, je nach Klassenstufe, in ein bis zwei Unterrichtsstunden behandelt.

3.2. Datenerhebung

Für die schrittweise Rekonstruktion der einzelnen Arbeitsschritte der Schüler/innen dienen Videoaufnahmen sowie die bearbeiteten Sektormodelle der Schüler/innen. Da nicht von allen Gruppen Videodateien zur Auswertung herangezogen werden konnten, wurde im Fall fehlender Videoaufnahmen versucht, anhand der vervollständigten Modelle die Vorgehensweise der einzelnen Gruppen nachzuvollziehen. Die Videodateien umfassen bei der ersten Unterrichtssequenz 44 und bei der zweiten Unterrichtssequenz 29 Videoausschnitte. Diese wurden teils mit einem Camcorder, teils von den Schüler/innen selbstständig per Handy aufgenommen, was zugleich motivierende Aspekte beinhaltet hat.

4. Erste Unterrichtssequenz: Durchführung

4.1. Allgemeines

Nachdem mit den Schülerinnen im Vorfeld die Krümmung von Flächen besprochen wurde, werden nun gemeinsam Ideen für den Nachbau einer Kugeloberfläche (Globus) gesammelt. Die Schüler/innen werden hierbei auf die Unterteilungen des Globus durch ein Gradnetz, bestehend aus den Längen- und Breitengraden hingewiesen und es wird ihnen vor Augen geführt, dass die durch diese Unterteilung entstehenden Sektoren eine leichte Krümmung aufweisen. Durch das Prinzip der Näherung, in der alle Sektoren der Kugeloberfläche durch ebene Flächenstücke ersetzt wer-

den, wird den Schüler/innen ein nachgebautes Modell eines Globus (vgl. Abb. 6), einer Kugeloberfläche und einer Sattelfläche (Abb. 2) präsentiert. Es werden Vermutungen darüber formuliert, wie man Geodäten auf die Modelle einzeichnen könnte, ohne diese zu beschädigen.

Die Schüler/innen werden Schritt für Schritt dahin geführt, dass die Geodäten vor dem Zusammenbasteln auf die Sektormodelle gezeichnet werden müssen. Die hierbei zu wählende Vorgehensweise wird in den Kursen mit einer unterschiedlichen Ausführlichkeit behandelt. Während in der 6. Klasse eine sehr ausführliche Anleitung durchgeführt wird und die Kurse 11 (Seminarfach) und 12 ihr Vorgehen im Plenum diskutieren, wird den Kursen 10 und 11 (Leistungskurs) nur ein sehr geringer Input gegeben. Die erst genannten Kurse ermöglichen also eine Betrachtung dessen, wie es den Schüler/innen gelingt ein im Vorfeld besprochenes Verfahren zu übernehmen, während bei den letztgenannten Kursen ein eigenständiges Erschließen im Vordergrund steht.

Nach der Gruppenarbeitsphase erfolgt in allen Kursen eine knappe Ergebnissicherung am Overheadprojektor.

4.2. Methode der Auswertung

Für die Auswertung der Gruppenarbeit wurden zunächst die von den Schüler/innen und mit dem Camcorder aufgenommenen Videos betrachtet und die einzelnen Handlungsabläufe und Diskussionen dokumentiert. Auf ein detailliertes Transkribieren der Gespräche wurde verzichtet, da die Qualität der Dateien nur eine eingeschränkte auditive Dokumentation zuließ und eine Beschreibung der zu beobachtenden Handlungen sinnvoller erschien.

Zusätzlich zur Analyse der Videodateien wurden die bearbeiteten Sektormodelle der einzelnen Gruppen genutzt, um das auf dem Video gezeigte Vorgehen nachzuvollziehen und weitere Rückschlüsse auf das Vorgehen der Schüler/innen zu ziehen. Hilfreich waren die bearbeiteten Sektormodelle vor allem bei den Gruppen, für die keine Videodateien zu einer Gruppe vorlagen. Für den Kurs der Klassenstufe 10 liegen die

Videos nur für eine Gruppe komplett vor, während sie für zwei Gruppen ganz fehlen.

Für eine objektive Bewertung der einzelnen Vorgehensweisen der Gruppen wurden im Vorfeld kleinschrittige Kriterien formuliert. Diese Überprüfungs-kriterien wurden so formuliert, dass sie sowohl auf die Kurse anwendbar sind, bei denen das Übernehmen des Algorithmus in Vordergrund stand, als auch auf die, bei denen das eigenständige Erarbeiten ausschlaggebend war. Dieses ermöglichte im weiteren Vorgehen eine bessere Vergleichbarkeit.

Neben dem korrekten Anlegen der einzelnen Sektoren sollte zudem geprüft werden, ob die Schüler/innen die Geodäten linear über die Sektorunterteilungen eines Sektorstreifens hinweg zeichnen oder aber mit dem Ende eines Sektors auch die Geodäte beendet wird und ob sie die einzelnen Sektorstreifen unterschiedlich bearbeiten. Die Kriterien wurden hierbei so formuliert, dass sie die einzelnen Handlungsschritte des Algorithmus genau widerspiegeln. Es wird genau darauf Bezug genommen, welcher Sektor eines Sektorstreifens an den zugehörigen Sektor des nachfolgenden Sektorstreifens angelegt werden muss oder aber welche Sektoren eine Geodäte auf einem Sektorstreifen passiert und verlässt.

Um eine Vergleichsmöglichkeit hinsichtlich der eigenständigen Bearbeitung und dem Anteil der Lehrperson an der Ergebnisfindung zu erhalten, fand zusätzlich eine Einteilung der Gruppen in Niveaustufen statt. Dieses ermöglichte unter anderem einen Vergleich in den Gruppen, bei denen es ausschließlich um die Übernahme des Algorithmus ging. Es wurden folgende Niveaustufen gewählt:

Niveau 0: Keine Bearbeitung.

Niveau 1: Den Schüler/innen gelingt es nicht eigenständig Vermutungen aufzustellen wie die Geodäten in die Sektormodelle eingezeichnet werden können. Unter Anleitung der Lehrperson können sie Schritt für Schritt die Geodäten in die jeweiligen Sektormodelle einzeichnen.

Niveau 2: Die Schüler/innen entwickeln selbstständig Vermutungen, wie man zwei anfänglich parallele Geodäten in das Sektormodell einzeichnen kann; diese sind jedoch nicht zielführend. Den Schüler/innen gelingt es gemeinsam mit der Lehrperson, die Geodäten in die Sektormodelle einzuzeichnen.

Niveau 3: Die Schüler/innen erkennen, dass es nicht richtig wäre, die Sektormodelle für das Einzeichnen symmetrisch zu positionieren und mit dem Lineal in einem Zug eine Gerade über alle Sektorstreifen zu ziehen. Mit einer kurzen Hilfestellung der Lehrperson gelingt es den Schüler/innen, die Geodäten in das Sektormodell einzuzeichnen.

Niveau 4: Die Schüler/innen erkennen, dass beim Einzeichnen von Geodäten in Sektormodelle die Sektoren mit ihren Kanten genau aneinandergelagt werden müssen. Sie können dieses jedoch nicht ganz fehlerfrei auf beide Sektormodelle selbstständig übertragen.

Niveau 5: Die Schüler/innen können die beiden anfänglich parallelen Geodäten in beide Sektormodelle richtig einzeichnen. Sie legen hierzu entweder die Sektoren mit ihren Kanten genau aneinander oder verwenden alternative zielführende Ideen.

5. Erste Unterrichtssequenz: Ergebnisse

5.1. Fall 1: Übernahme des Algorithmus (Kurse der Klassenstufen 6, 11 (Seminarfach), 12)

In den Kursen der 6. und der 12. Klasse sind die Schüler/innen in der Lage das Verfahren zum Einzeichnen von Geodäten in Sektormodelle richtig zu übernehmen. Das Sektormodell der Sattelfläche wurde in der 6. Klasse nicht von allen Kleingruppen bearbeitet. In der 12. Klasse zeigten sich häufigere Diskussionen als beim Sektormodell der Kugelkalotte. Einzelnen Schüler/innen gelingt es nicht auf Anhieb, die Geodäten richtig in die Modelle einzuzeichnen. Bei einer Gruppe ist zu beobachten, wie die Schüler/innen durch gegenseitige Erklärungen und Unterstützung selbstständig in der Lage sind sich zu korrigieren und richtige Ergebnisse zu erreichen.

In dem Kurs der 11. Klasse (Seminarfach) gelingt es zwei der drei Gruppen, beide Sektormodelle vollständig zu bearbeiten. Einer Gruppe gelingt es, auf der Sattelfläche eine Geodäte mit der richtigen Sektoranordnung zu konstruieren. Für die zweite Geodäte wird von ihnen fälschlicherweise die gleiche Anordnung eingesetzt. Eine der drei Gruppen nimmt den bereitgestellten Globus zu Hilfe, auf den modellhaft Sektoren sowie eine Geodäte durch die Lehrperson aufgezeichnet werden. Diese Darstellung ermöglicht den Schüler/innen den Transfer auf das Sektormodell.

Deutlich wird, dass es sowohl den Schüler/innen der höheren Klassenstufen, als auch den Schüler/innen der Klassenstufe 6 gelingt, die Geodäten in das Modell einzuzeichnen. Es gelingt ihnen einen zuvor im Plenum erarbeiteten Algorithmus für das Einzeichnen einer Geodäte sowohl in das Sektormodell einer Kugeloberfläche zu übernehmen, als auch auf das Modell der Sattelfläche zu transferieren.

Hinsichtlich der Niveaustufen erreichen alle Gruppen der 12. Klasse die 5. Stufe, ebenso je eine Gruppe der Klassenstufen 6 und 11. Die beiden anderen Gruppen der 6. Klassenstufe werden, da sie die Sattelfläche nicht als Aufgabe bearbeitet haben, der Niveaustufe 4 zugeordnet. Eine Gruppe der 11. Klasse hat ebenfalls Niveaustufe 4; dieser gelingt keine vollständige Bearbeitung der Sattelfläche. Die Gruppe der 11. Klasse, die den Globus zu Hilfe nahm, wird der 3. Niveaustufe zugeordnet. Die Gruppenmitglieder zeigen

zu Beginn leichte Verständnisschwierigkeiten in Bezug auf das Vorgehen beim Einzeichnen der beiden Geodäten. Dieses bedeutet jedoch nicht zwangsweise, dass die Schüler/innen schlechter abschneiden, als Schüler/innen einer anderen Gruppe. Dadurch, dass die Herleitung eines möglichen Vorgehens jeweils im Plenum stattfand und die Schüler/innen den präsentierten Algorithmus nun anwenden und übernehmen sollen, kann nicht automatisch auf das Durchdringen des Inhalts durch die Schüler/innen geschlossen werden und darauf, dass sie genau verstanden haben, wieso man so vorgeht wie es mittels Overheadprojektor gezeigt wurde. Das Nachfragen und die Diskussionsbereitschaft der Schüler/innen zeigen, dass sie verstehen wollen, wieso man das gewählte Vorgehen verwendet.

5.2. Fall 2: Selbstständiges Erarbeiten des Algorithmus (Klassen 10, 11(Leistungskurs))

Große Unterschiede zeigen sich zwischen der 10. Klasse und dem Leistungskurs. In der 10. Klasse gelingt es nur zwei von fünf Gruppen die Geodäten in das Sektormodell der Kugeloberfläche einzuzeichnen und von diesen nur einer, den Algorithmus richtig auf die Sattelfläche anzuwenden. Bei dem Leistungskurs hingegen können alle Gruppen die Geodäten richtig in beide Sektormodelle einzeichnen. Lediglich eine Gruppe weist Fehler bei dem Einzeichnen in die Sattelfläche auf. Es werden an dieser Stelle die Sektoren für das Einzeichnen der zweiten Geodäte nicht erneut ausgerichtet.

Auffallend ist, dass bei allen Gruppen des Leistungskurses der Globus selbstständig als Hilfsmittel herangezogen wird. Auch ein Anheben der Sektorstreifen und anfängliches Nachbauen des zusammengebastelten Modells wird von den Schüler/innen zur Lösungsfindung in einer Gruppe eingesetzt.

Bei der 10. Klasse zeigt sich bei der Gruppe, der es gelingt in beiden Modellen die Geodäten zu vervollständigen, ein zunächst freihändiges skizzenhaftes Einzeichnen. Sie heben ähnlich wie die Gruppe des Leistungskurses zunächst die Sektorstreifen an und legen sie annähernd so aneinander, wie sie bei dem zusammengebastelten Modell aneinandergrenzen würden und zeichnen die Geodätenverläufe ein. Ihr Vorgehen erweist sich als zielführend. Eine andere Gruppe kann auf keinem der Sektormodelle die Geodäten vervollständigen. Auffällig ist, dass auch nach einem Verweis auf den Globus und seiner Zuhilfenahme die Schüler/innen nicht in der Lage sind, die Sektormodelle korrekt zu bearbeiten. Trotz ihres Wissens darüber, dass eine symmetrische Anordnung der Sektorstreifen mit dem Aneinanderlegen der mittleren Sektoren und ein Verlängern der Geodäten mit dieser Anordnung nicht zielführend ist, werden die Geodäten auf diese Weise ergänzt, da die Gruppe keine anderen Lösungswege findet.

Einer weiteren Gruppe gelingt es nach einem an-

fänglichen Input der Lehrperson, die Geodäten richtig auf die Kugeloberfläche einzuzeichnen. Sie ist jedoch nicht in der Lage, das Vorgehen vollständig auf die Sattelfläche zu übertragen. Es gelingt den Schüler/innen dieser Gruppe die erste Geodäte richtig in die beiden ersten Sektorstreifen einzuzeichnen, jedoch missachten sie die benötigte Neuausrichtung der Sektoren für das Einzeichnen der zweiten Geodäte und behalten die für die erste Geodäte gewählte Ausrichtung bei. Bei einer weiteren Gruppe werden auf der Sattelfläche die Geodäten jeweils mit der Anordnung der Sektoren gezeichnet, die für die andere Geodäte richtig wäre; für die Bearbeitung der Kugeloberfläche liegen für diese Gruppe keine Daten vor. Das von der letzten Gruppe bearbeitete Sektormodell der Kugeloberfläche weist mehrere Versuche eines möglichen Einzeichnens auf. Es liegen für diese Gruppe leider keine Videodateien zur Verfügung, weshalb versucht wurde, anhand des fertig bearbeiteten Sektormodells Rückschlüsse auf das Vorgehen zu ziehen. Von den Schüler/innen wurden insgesamt vier Geodäten eingezeichnet, zwei in grün und zwei mit Bleistift. Die Schüler/innen haben offensichtlich die Sektorstreifen auf zwei verschiedene Weisen zusammengelegt (einmal an den mittleren Sektoren, einmal an den unteren Sektoren) und mit jeder Anordnung zwei Geodäten gezeichnet.

Zwei Gruppen des Leistungskurses erreichen die 5. Niveaustufe und eine die vierte. Von den Gruppen der 10. Klasse erreicht eine die 5. Niveaustufe und eine weitere, bei der eine Einleitung durch die Lehrperson nötig war, das weitere Vorgehen bei der Kugeloberfläche jedoch selbstständig erarbeitet werden konnte, die 1. Niveaustufe.

5.3. Zusammenfassung der Ergebnisse

Bei allen betrachteten Kursen lassen sich Gruppen finden, denen es gelingt die Geodäten korrekt in dem jeweiligen Sektormodell zu ergänzen. Eine sehr positive Resonanz zeigt sich bei der Übernahme des im Vorfeld präsentierten Algorithmus, ein überraschendes Ergebnis liefert hierbei die positive Resonanz der 6. Klasse. Des Weiteren beweist das Ergebnis des Leistungskurses, dass Schüler/innen durchaus in der Lage sind, sich die Vorgehensweise selbstständig anzueignen. Unterschiede bestehen jedoch je nach Klassenstufe. Anhand einer Gruppe der 10. Klasse wird deutlich, dass es einigen Schüler/innen zwar gelingt eine Geodäte durch richtige Ausrichtung der einzelnen Sektoren in das Sektormodell einzuzeichnen, dass ihnen aber nicht klar ist, dass mit dem Einzeichnen einer weiteren Geodäte eine neue Ausrichtung der Sektoren nötig ist. Neben dem anfänglichen Nachbauen der Flächen zeigt sich auch ein kleinschrittiges Anleiten durch die Lehrperson als hilfreich. Angeleitete Fragestellungen wie z. B., in welchen Sektoren die Geodäten weiterlaufen würden, wenn sie einen Sektor verlassen würden, helfen den Schüler/innen beim

Diskutieren und beim Finden von Lösungen. Von den Schüler/innen wurden eigenständig zielführende Vorgehensweisen angewandt, etwa die Sektorstreifen der Kugelkalotte auf den Globus oder auf das zusammengebastelte Sektormodell zu legen, um den potenziellen Verlauf der Geodäte nachvollziehen zu können. Trotz Hilfestellung durch die Lehrperson gelingt es nicht allen Schüler/innen der 10. Klasse, die Geodäten zu vervollständigen.

Der prozentual am stärksten vertretene Fehler war ungenaues Zeichnen, welches auf eine teils schwierige Handhabung der Sektorausschnitte zurückzuführen ist. Neben diesem lassen sich weitere Fehler beobachten, wie zum Beispiel das Ausmitteln von aneinandergrenzenden Sektorstreifen. In diesem Fall werden die Kanten der für die Konstruktion benötigten Sektoren von den Schüler/innen nicht genau aneinander gelegt, sondern die betroffenen Sektorstreifen werden in etwa passend aneinander geschoben und dadurch entstehende Ungenauigkeiten akzeptiert. Ein Ausmitteln ist bei diesem Durchgang jedoch nur kurzzeitig bei einer Gruppe der 12. Klasse zu finden. Häufiger zu beobachten ist, dass die Sektorstreifen mit den jeweils untersten Sektoren aneinander gelegt werden oder aber eine richtige Ausrichtung der betroffenen Sektoren für eine Geodäte stattfindet, jedoch fälschlicherweise eine andere Geodäte konstruiert wird, für die eine andere Ausrichtung nötig wäre. Beide Fehler lassen sich nur bei den Kursen 10 und 11 beobachten. Auffallend ist, dass sich bei der Konstruktion vorwiegend Fehler bei dem korrekten Anlegen der Sektoren, nicht aber bei dem gradlinigen Einzeichnen der Sektoren auf den Sektorstreifen ergeben. Aus diesem Grund wird für die Analyse der Aufgabe zum Sektormodell des Torus in der zweiten Unterrichtssequenz ein stärkeres Gewicht auf das Aneinanderlegen der Sektoren gelegt.

6. Zweite Unterrichtssequenz

6.1. Allgemeines

Das Sektormodell des Torus wurde von den Schüler/innen der verschiedenen Kurse jeweils eine Woche nach den Sektormodellen der Kugeloberfläche und der Sattelfläche bearbeitet. Die Bearbeitung des Sektormodells fand zu Beginn der Stunde statt und es wurde keine Wiederholung des Inhalts vorangestellt.

6.2. Methode der Auswertung

Beim Einzeichnen von Geodäten auf dem Sektormodell des Torus wurde eine ähnliche Auswertung gewählt, wie bei den vorherigen gekrümmten Flächen. Die einzelnen Videoausschnitte wurden auch hier zunächst betrachtet, die zu beobachtenden Handlungsschritte und Gespräche dokumentiert und die bearbeiteten Sektormodelle für eine genauere Analyse herangezogen.

Da im Zusammenhang mit dem Sektormodell des Torus vorwiegend getestet werden sollte, ob die Schü-

ler/innen mit dem Werkzeug umgehen können, wurden bei der Auswertung die folgenden beiden Aspekte betrachtet. Zum einen, ob die Schüler/innen verstanden haben, wie man die einzelnen Sektoren der positiv und negativ gekrümmten Fläche aneinander legt und zum anderen, ob sie jeweils die Geodäten verlängern können. Um eine objektive Entscheidung zu treffen, fand auch hier eine Beurteilung anhand unterschiedlicher im Vorfeld formulierter kleinschrittiger Kriterien statt. Diese beziehen sich auf eine detaillierte Beschreibung, welche Kanten von welchen Sektoren eines jeweiligen Sektorstreifen genau aneinander gelegt werden müssen, um eine richtige Konstruktion zu ermöglichen oder aber nehmen Bezug auf die Sektoren eines jeweiligen Sektorstreifens, in denen die beiden Geodäten verlängert werden müssen. Da bereits bei der Gruppenarbeitsphase zu der Kugeloberfläche und Sattelfläche das Verlängern der Geodäten auf den einzelnen Sektorstreifen keine weiteren Schwierigkeiten zeigte und es auch bei diesem Sektormodell ersichtlich wird, dass die Schüler/innen in der Lage sind, die Geodäten gradlinig zu zeichnen, rückten bei der weiteren Auswertung die Kriterien in den Fokus, die sich darauf beziehen, welche Sektorkanten aneinander gelegt werden müssen.

Um den Grad der selbstständigen Bearbeitung des Modells bei den Schüler/innen zu messen, fand zudem eine Betrachtung des Lehrereinsatzes und somit eine Bestimmung des Anteils der Lehrperson am Arbeitsweg statt. Für dieses wurde eine Einteilung in die folgenden Niveaustufen genutzt:

Niveau 1: Den Schüler/innen gelingt es durch eine Hilfestellung der Lehrperson, die Geodäten in das Sektormodell richtig einzuzeichnen.

Niveau 2: Die Schüler/innen erkennen, dass die Sektoren beim Einzeichnen von Geodäten mit den passenden Kanten genau aneinandergelegt werden müssen. Sie können die Geodäte jedoch nur in die Abschnitte richtig einzeichnen, in denen eine positive Krümmung der Fläche vorliegt. Für die übrigen benötigen sie Hilfe durch die Lehrperson.

Niveau 3: Die Schüler/innen können die Geodäten fast fehlerfrei in das Sektormodell einzeichnen und benötigen für die Korrektur eine kleine Hilfestellung durch die Lehrperson.

Niveau 4: Die Schüler/innen können beide Geodäten richtig in die Sektormodelle einzeichnen und legen hierzu die Sektoren mit ihren Kanten genau aneinander.

6.3. Ergebnis aller Kurse

Bei der Bearbeitung des Sektormodells des Torus gelingt es allen Schüler/innen der 11. und 12. Klasse die Geodäten selbstständig in das Sektormodell einzuzeichnen. Es sind hierbei keine Hilfestellungen durch

die Lehrperson nötig. Die Schüler/innen sind in der Lage den Algorithmus auf andere Anwendungsbeispiele zu transferieren. Gleiches gilt für die 6. Klasse. In jedem der drei Kurse lässt sich eine Gruppe finden, in der Schüler/innen versuchen, sich das zu untersuchende Modell durch ein Anheben der Sektorstreifen, durch Falten und Aneinanderlegen zu veranschaulichen. Auch bei der 10. Klasse sind im Vergleich zu den Sektormodellen der Kugeloberfläche und Sattelfläche deutliche Verbesserungen zu erkennen. Anhand der vorliegenden Datensammlung der einzelnen Gruppen zeigt sich, dass es allen Gruppen gelingt mindestens eine Geodäte richtig in das Sektormodell einzuzichnen. Lediglich von einer Gruppe der 10. Klasse, der es gelingt sowohl das Modell der Kugeloberfläche als auch der Sattelfläche zu vervollständigen, stehen keine Videodateien zum Sektormodell des Torus zur Verfügung. Betrachtet man die Bearbeitung des Sektormodells des Torus in den einzelnen Gruppen der 10. Klasse, wird bei einer der Gruppen deutlich, dass die Schüler/innen zunächst versuchen die Geodäten durch eine Ausmittlung der Sektorstreifen im negativ gekrümmten Teil der Fläche einzuzichnen. Sie vernachlässigen hierbei die benötigte Neuausrichtung der Sektorstreifen, um die beiden Geodäten von dem ersten auf den zweiten Sektorstreifen fortzuführen. Bei den nachfolgenden Übergängen ist jedoch eine richtige Ausrichtung und Konstruktion zu beobachten. Durch einen Hinweis der Lehrperson auf ihren Konstruktionsfehler gelingt ihnen die Korrektur einer der beiden Geodäten, während die zweite unbeachtet bleibt.

Bei zwei weiteren Gruppen ist auffallend, dass die Schüler/innen sich gegenseitig korrigieren und bei dem Zeichnen der Geodäten unterstützen. Während sich hier bei einzelnen Gruppenmitgliedern eine falsche Ausrichtung der Sektorstreifen zeigt, indem diese beispielsweise alle an den unteren Sektoren aneinander gelegt werden, sind die übrigen Gruppenmitglieder in der Lage diese Fehler zu korrigieren und die Geodäten richtig einzuzichnen. Größere Schwierigkeiten zeigen sich lediglich bei einer der Gruppen, der es bereits bei den vorherigen Sektormodellen schwer fiel, diese zu bearbeiten und ein Ergebnis zu erhalten. Ein Unterrichtsgespräch mit der Lehrperson macht deutlich, dass den Schüler/innen bekannt ist, dass das Aneinanderlegen von zwei Sektorkanten bei den übrigen Sektorkanten zu Überlappungen und Lücken führt. Sie verneinen eine Ausmittlung der Sektorstreifen und wissen, dass für das Zeichnen beider Geodäten unterschiedliche Sektorausrichtungen nötig sind. Hilfreich zeigt sich bei dieser Gruppe der Rat der Lehrperson, schrittweise vorzugehen und sich zu fragen in welchem Sektor die Geodäte münden würde, wenn sie einen angrenzenden Sektor verlässt. Unter der Zuhilfenahme des Globus gelingt den Schüler/innen die weitere Bearbeitung des Sektormodells selbstständig.

Auffallend ist bei den Gruppen der 10. Klasse, dass während der Bearbeitung die einzelnen Sektorstreifen immer wieder symmetrisch angeordnet werden. Alle Gruppen der Kurse 12, 11 und 6 erreichen die 4. Niveaustufe. Diese kann auch zwei Gruppen der 10. Klasse zugeordnet werden. In beiden Gruppen können die Schüler/innen durch gemeinsames Erarbeiten das richtige Ergebnis erzielen. Eine Gruppe wird der 1. Niveaustufe zugeordnet. Es gelingt ihnen durch eine schrittweise Anleitung durch die Lehrperson ein korrektes Einzeichnen der Geodäten.

Zwar können die Kurse 12, 11 und 6 das Sektormodell selbstständig bearbeiten, jedoch zeigen sich bei der 10. Klasse noch Schüler/innen, denen der Algorithmus nicht vollständig präsent ist. Die Arbeit in Gruppen ermöglicht jedoch einen Wissensaustausch wie auch eine gegenseitige Hilfestellung.

7. Fazit

Die Kurse, in denen der Algorithmus gemeinsam im Plenum erarbeitet und im Vorfeld besprochen wurde, erzielten deutlich bessere Ergebnisse als die Kurse, in denen eine eigenständige Erarbeitung stattfand. Bis auf einer Gruppe gelang es allen ihre zugeteilten Modelle vollständig zu ergänzen. Auch bei dem Leistungskurs, bei dem eine eigenständige Erarbeitung im Vordergrund stand, konnten in allen Gruppen gute Ergebnisse erzielt werden. Schwierigkeiten bereitete das eigenständige Erarbeiten der 10. Klasse. Es scheiterte hier nicht an dem gradlinigen Fortführen der Geodäten auf den Sektorstreifen, sondern an der Ausrichtung der einzelnen Sektoren. Die Sektorstreifen wurden bei der Konstruktion der Geodäten teils mit den unteren Sektoren aneinander gelegt oder aber eine passende Ausrichtung der Sektoren für eine Geodäte für weitere übernommen. Bei etwa 2-3 Gruppen kann bei den Schüler/innen von einem erarbeiteten Teilverständnis ausgegangen werden, eine vollständige Umsetzung war jedoch noch nicht möglich. Es scheint als gelinge es ihnen noch nicht, einen Zusammenhang zwischen dem zusammengebastelten Modell und den einzelnen Sektoren zu erstellen und von diesem auf die korrekte Ausrichtung der Sektoren zu transferieren. Ein ähnliches Beispiel lässt sich sehr gut an einer Gruppe des Leistungskurses beobachten. Es gelingt ihnen, die erste Geodäte fehlerfrei in das Modell einzuzichnen, es findet jedoch für die zweite Geodäte keine Neuausrichtung der Sektoren statt. Wir folgern aus den Ergebnissen, dass eine selbstständige Aneignung des Algorithmus durchaus möglich ist. Beachtet werden muss, dass den Schüler/innen genügend Zeit zur Verfügung gestellt wird. Auch wenn es einem Teil der Schüler/innen gelang, sich mit dem gestellten Material das Vorgehen eigenständig anzueignen, ist eine Überarbeitung der Materialien anhand der Evaluationsergebnisse in Planung. Die Gruppen der 10. Klasse hatten bei den Sektormodellen der Kugeloberfläche und der Sattelfläche Schwierigkeiten, zeigen aber

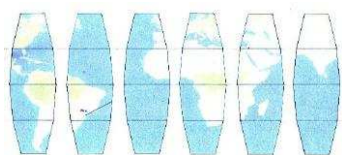


Abb. 7: Sektormodell einer Kugeloberfläche mit der Textur der Weltkugel.

beim Sektormodell des Torus wesentlich bessere Ergebnisse. Zwar liegen sie auch hier noch unter denen der übrigen Kurse, jedoch gelingt es allen Gruppen die Geodäten in das Sektormodell einzuzeichnen, was für die Ergebnissicherung nach der ersten Unterrichtssequenz spricht. Hinsichtlich der erhobenen Untersuchungen erscheint der Einsatz der Sektormodelle in der Schule für möglich und sinnvoll. Die Materialien ermöglichen den Schüler/innen neue Einblicke in die Physik, wie sie sonst in der Schule nicht so häufig zu finden sind.

Zusammenfassend stellen wir fest, dass das eigenständige Erarbeiten der Konstruktionsvorschrift, das wir als Merkmal für das Verständnis der Methode heranziehen, vier von acht Kleingruppen gelang (darunter alle drei Gruppen des Leistungskurses der 11. Klasse). Das Verständnis ist anspruchsvoll, aber für leistungsstärkere/ältere Schüler/innen erreichbar.

Das selbstständige, korrekte Anwenden gelang in der zweiten Unterrichtssequenz (Sektormodell des Torus) 12 von insgesamt 14 Kleingruppen; das Ziel ist somit in allen Klassenstufen erreichbar.

8. Ausblick

Die vorgestellte Evaluation der Unterrichtssequenzen zur Konstruktion von Geodäten auf Sektormodellen hat Hinweise für die Weiterentwicklung der Materialien und der Unterrichtseinheit geliefert.

Um Verständnisschwierigkeiten vorzubeugen und um das selbstständige Lernen der Schüler/innen zu unterstützen, könnten Sektormodelle einer Kugeloberfläche verwendet werden, auf denen das Abbild der Weltkarte aufgedruckt ist (Abb. 7). Die Grafik der Weltkugel soll den Schüler/innen helfen, besser zu verstehen, wieso die Kanten der einzelnen Sektoren genau aneinandergelegt werden müssen, um eine Geodäte auf diese einzuzeichnen. Wird zum Beispiel ein Land durch zwei Sektoren aufgeteilt, muss beachtet werden, dass eine Geodäte, die einen Sektorstreifen innerhalb eines Landes verlässt, im benachbarten Sektorstreifen wieder in diesem Land weiterläuft.

Eine weitere Möglichkeit wäre es, in ein Sektormodell eine Geodäte einzuzeichnen und den Schüler/innen das zusammengebastelte Modell zu präsentieren. Häufig zeigte sich während der Gruppenarbeit ein hohes Engagement der Schüler/innen darin, die Modelle zusammenbasteln zu wollen. Es ist empfehlenswert, sie das tun zu lassen. Die Schüler/innen kön-

nen so den Verlauf der Geodäten auf dem Modell erkennen und die Aufgabe würde an Abstraktion verlieren und Anschaulichkeit gewinnen.

Die Bearbeitung des Sektormodells des Torus stellt eine gute Festigung des Inhalts dar, da durch ihn sowohl positiv als auch negativ gekrümmte Flächen in einem Modell dargeboten werden und von den Schüler/innen das erworbene Wissen auf ein neues Sektormodell transferiert werden muss.

9. Literatur

Design-Based Research Collective 2003 Design-based research: an emerging paradigm for educational inquiry *Educ. Res.* **32** 5–8

Keuchel S 2017 Einsteins Allgemeine Relativitätstheorie mit Sektormodellen – Durchführung einer Unterrichtseinheit und Evaluation der dort verwendeten Materialien in den Klassenstufen 6, 8, 10, 11 und 12 eines Gymnasiums, Masterarbeit, Universität Hildesheim.

Kraus U und Zahn C 2018 Sector models—A toolkit for teaching general relativity: III. Spacetime geodesics, submitted
Online version with supplementary material: www.spacetimetravel.org/sectormodels3

Zahn C und Kraus U 2014 Sector models—A toolkit for teaching general relativity: I. Curved spaces and spacetimes *Eur. J. Phys.* **35** (5) 055020
Online version with supplementary material: www.spacetimetravel.org/sectormodels1

Zahn C und Kraus U 2018 Sector models—A toolkit for teaching general relativity: II. Geodesics, submitted
Online version with supplementary material: www.spacetimetravel.org/sectormodels2