Die Geometrische Algebra mit GAALOP im Schnelldurchgang

Martin Erik Horn, HWR Berlin, FB 1, FE Quantitative Methoden

Hochschule für Wirtschaft und Recht Berlin
Berlin School of Economics and Law

Email: *e_hornm@doz.hwr-berlin.de*

Ausgangspunkt (DPG-Frühjahrstagung 2016 in Hannover):

Auf Grundlage der Geometrischen Algebra kann die Lineare Algebra in moderner Darstellung auf Fachhochschulniveau in inhaltlich sehr kompakter und didaktisch reduzierter Form vermittelt und mit Studierenden diskutiert werden.

→ Auch mit Studierenden, die nur über eingeschränkt vorhandene Rechenfertigkeiten verfügen, kann die Geometrische Algebra erfolgreich thematisiert und zur Lösung Linearer Gleichungssysteme herangezogen werden, falls entweder entsprechende zeitliche Ressourcen zur Verfügung stehen oder aber eine inhaltliche Beschränkung auf niederdimensionale Lineare Gleichungssysteme mit nur zwei Unbekannten und damit auf (2 x 2)-Matrizen erfolgt.

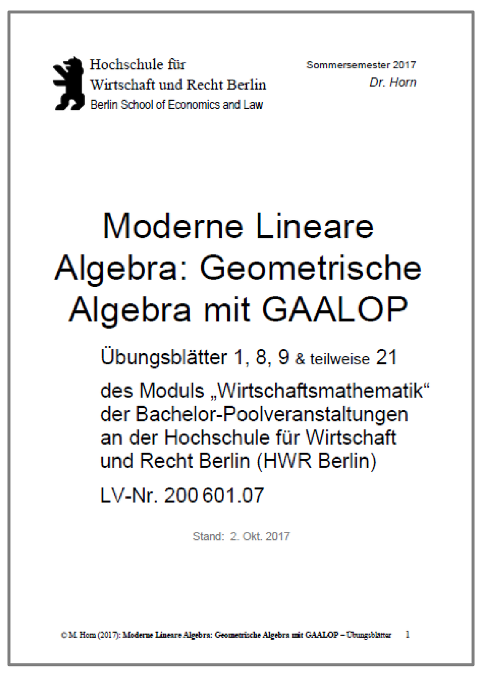
→ Um mit Studierenden dieses Leistungsniveaus auch anspruchsvollere Aufgabenstellungen in einem curricular vorgegebenen kürzeren Zeitrahmen diskutieren und bearbeiten zu können, kann zur zeitlichen Entlastung die Bereitstellung einer effektiven Rechner-Unterstützung sinnvoll sein.

→ Allerdings existieren derzeit keine Taschenrechner, die Rechnungen zur Geometrischen Algebra zulassen. Deshalb wird hier vorgeschlagen, das Programm-Tool GAALOP (**Geometric Algebra Algorithms Optimizer**) als geometrisch-algebraischen Taschenrechner-Ersatz einzusetzen, um Problemstellungen, die unter Einbezug höherdimensionaler Linearer Gleichungssysteme zu lösen sind, mit den Studierenden bearbeiten zu können.

Aufgabenbeispiel: Lösung eines Linearen Gleichungssystems (Aufg. 7, Übungsblatt 9, HWR Berlin, Kurs 200601.07, Sommer 2017)

Zur Herstellung einer einzigen Mengeneinheit (ME) des Endproduktes E_1 werden 7 ME des Rohstoffes R_1, 3 ME des Rohstoffes R_2 und 4 ME des Rohstoffes R_3 benötigt.
Zur Herstellung einer einzigen Mengeneinheit des Endproduktes E_2 werden 2 ME des Rohstoffes R_1, 9 ME des Rohstoffes R_2 und 6 ME des Rohstoffes R_3 benötigt.
Zur Herstellung einer einzigen Mengeneinheit des Endproduktes E_3 werden 5 ME des Rohstoffes R_1 und 8 ME des Rohstoffes R_3 benötigt.

Berechnen Sie mit Hilfe von GAALOP, welche Mengen der Endprodukte E_1, E_2 und E_3 hergestellt werden, wenn im Herstellungsprozess 500 ME des Rohstoffes R_1, 780 ME des Rohstoffes R_2 und 880 ME des Rohstoffes R_3 verbraucht werden.


Hochschule für Wirtschaft und Recht Berlin
Berlin School of Economics and Law

Sommersemester 2017
Dr. Horn

Moderne Lineare Algebra: Geometrische Algebra mit GAALOP

Übungsblätter 1, 8, 9 & teilweise 21
des Moduls „Wirtschaftsmathematik" der Bachelor-Poolveranstaltungen an der Hochschule für Wirtschaft und Recht Berlin (HWR Berlin)
LV-Nr. 200 601.07

Stand: 2. Okt. 2017

© M. Horn (2017): Moderne Lineare Algebra: Geometrische Algebra mit GAALOP – Übungsblätter 1

Lösungsansatz:

$$\left.\begin{aligned} 7x + 2y + 5z &= 500 \\ 3x + 9y \phantom{{}+ 8z} &= 780 \\ 4x + 6y + 8z &= 880 \end{aligned}\right\}$$

x … Herstellungsmenge des ersten Endproduktes E_1
y … Herstellungsmenge des zweiten Endproduktes E_2
x … Herstellungsmenge des dritten Endproduktes E_3

↑ a ↑ b ↑ c ↑ r

Didaktische Problematik:
Die sachgerechte Zuordnung der zeilenweise gegebenen Rohstoff-Verbrauchsmengen zu spaltenweise formulierten Koeffizientenvektoren sollte mit den Lernenden ausführlich thematisiert werden.

Koeffizientenvektoren:

$\mathbf{a} = 7\,\sigma_x + 3\,\sigma_y + 4\,\sigma_z$
$\mathbf{b} = 2\,\sigma_x + 9\,\sigma_y + 6\,\sigma_z$
$\mathbf{c} = 5\,\sigma_x + 8\,\sigma_z$

Ergebnisvektor:

$\mathbf{r} = 500\,\sigma_x + 780\,\sigma_y + 880\,\sigma_z$

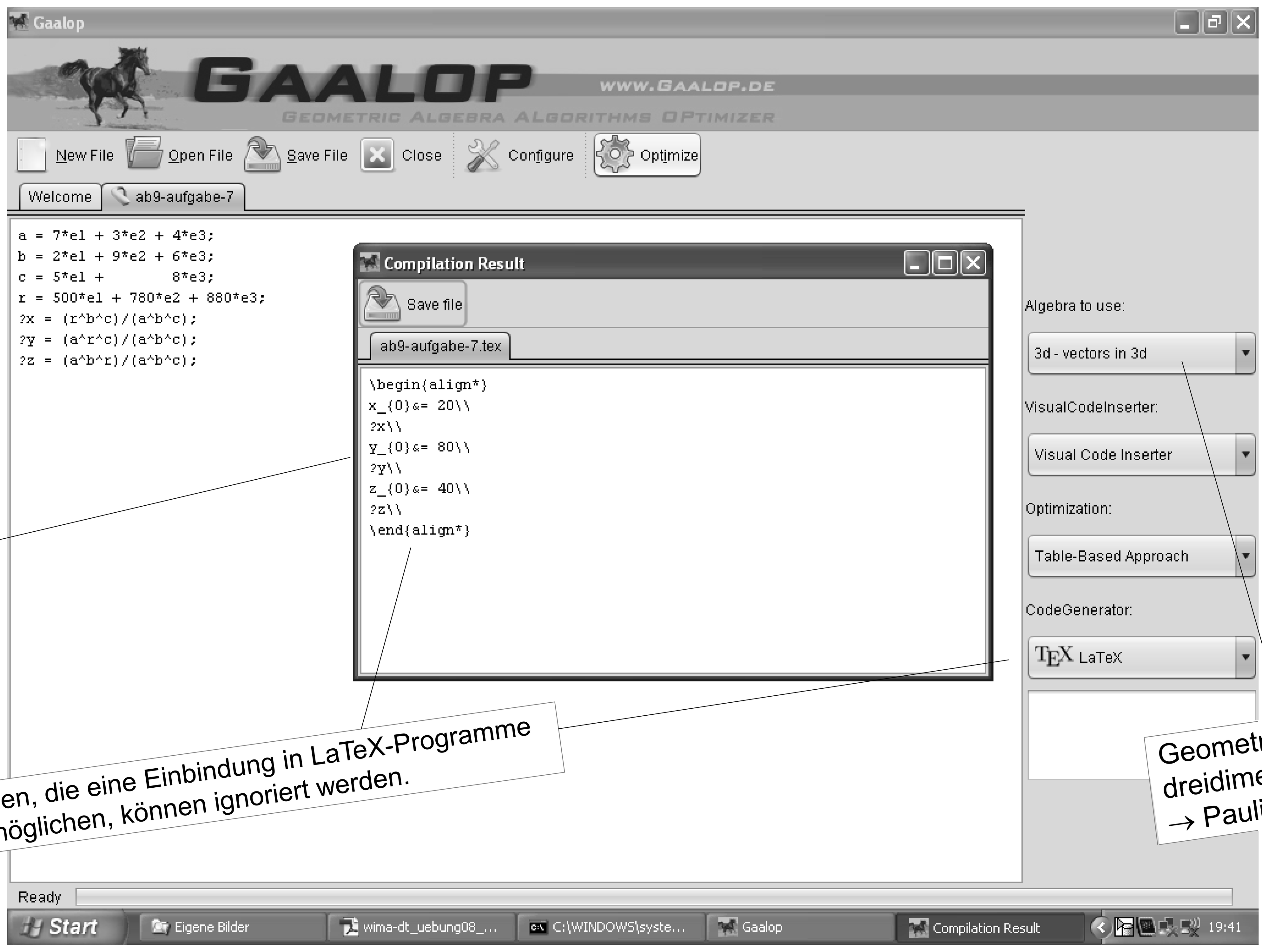
Grassmannsche Lösungsformeln:
(siehe Ausdehnungslehre 1844)

$x = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c})^{-1}\,(\mathbf{r} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c})$
$y = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c})^{-1}\,(\mathbf{a} \wedge \mathbf{r} \wedge \mathbf{c})$
$z = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c})^{-1}\,(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{r})$

Lösungswerte:

x = 20
y = 80
z = 40

Probe:			20
			80
			40
7	2	5	500
3	9	0	780
4	6	8	880



Zeilen, die eine Einbindung in LaTeX-Programme ermöglichen, können ignoriert werden.

Geometrische Algebra des dreidimensionalen Raums → Pauli-Algebra

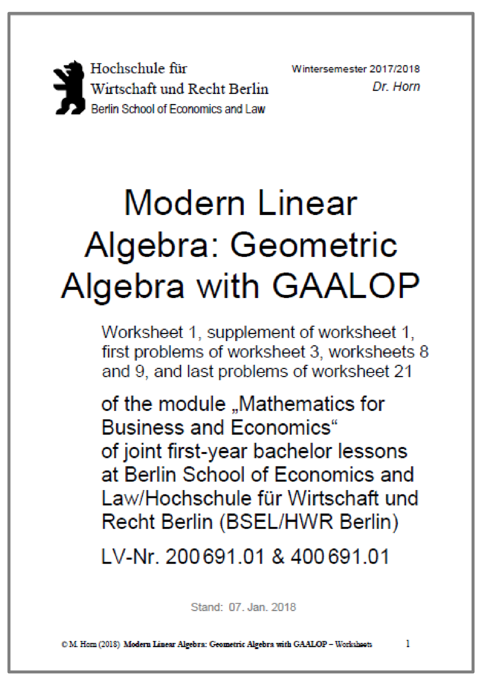
GAALOP

Die Handhabung von GAALOP ist denkbar einfach.

Das Programm ist bei einfachen Berechnungen nahezu selbsterklärend und kann ohne größere Vorkenntnisse und ohne eine längere Einarbeitungszeit genutzt werden.

Lösung:

Es werden 20 ME des ersten Endproduktes E_1, 80 ME des zweiten Endproduktes E_2 und 40 ME des dritten Endproduktes E_3 hergestellt.


Hochschule für Wirtschaft und Recht Berlin
Berlin School of Economics and Law

Wintersemester 2017/2018
Dr. Horn

Modern Linear Algebra: Geometric Algebra with GAALOP

Worksheet 1, supplement of worksheet 1, first problems of worksheet 3, worksheets 8 and 9, and last problems of worksheet 21
of the module „Mathematics for Business and Economics" of joint first-year bachelor lessons at Berlin School of Economics and Law/Hochschule für Wirtschaft und Recht Berlin (BSEL/HWR Berlin)
LV-Nr. 200 691.01 & 400 691.01

Stand: 07. Jan. 2018

© M. Horn (2018): Modern Linear Algebra: Geometric Algebra with GAALOP – Worksheets 1

»The Power of GA…

…derives from
- the simplicity of the grammar,
- the geometric meaning of multiplication,
- the way geometry links the algebra to the physical world.«

(→ David Hestenes, Oersted Medal Lecture 2002)

→ Das Programm kann kostenlose unter **www.gaalop.de** heruntergeladen werden.

Diese konzeptuelle Stärke der Geometrischen Algebra

kommt einer rechnerischen Umsetzung im Kontext von GAALOP entgegen:
- Die einfache Struktur der mathematischen Grammatik gestattet eine leicht durchschaubare Programmierung.
- Die geometrische Deutung der Multiplikation ermöglicht nachvollziehbare graphische Veranschaulichungen.
- Geometrie, Physik, Algebra und programmtechnische Umsetzung durchdringen sich gegenseitig.