Hochschule für
Wirtschaft und Recht Berlin
Berlin School of Economics and Law

Sommersemester 2017

Dr. Horn

Moderne Lineare Algebra: Geometrische Algebra mit GAALOP

Übungsblatt 1, Anhang zu Übungsblatt 1, einführende Aufgaben von Übungsblatt 3, Übungsblätter 8, 9 und teilweise 21

des Moduls „Wirtschaftsmathematik“ der Bachelor-Poolveranstaltungen an der Hochschule für Wirtschaft und Recht Berlin (HWR Berlin)

LV-Nr. 200 601.07

Überarbeitete und ergänzte Fassung vom 30. April 2018
(ursprüngliche Fassung vom 2. Okt. 2017)

HWR Berlin, Sommersemester 2017

Wirtschaftsmathematik (LV-Nr. 200601.07)

Übungsblatt 1 – Aufgabenstellung

Aufgabe 1:

Was ist Mathematik? Warum sind mathematische Methoden bei der Lösung zahlreicher Probleme so wirkungsvoll?

Lesen Sie den Text des Physik-Nobelpreisträgers Eugene P. Wigner „What is mathematics?" und versuchen Sie, sich klar zu machen, welche erkenntnistheoretischen Positionen Sie selbst einnehmen.

Aufgabe 2:

Wie würden Sie die folgende Frage beantworten, die der Mathematiker und Philosoph Morris Kline stellt: „Is mathematics a collection of diamonds hidden in the depths of the universe and gradually unearthed, or is it a collection of synthetic stones manufactured by man, yet so brilliant nevertheless that they bedazzle those mathematicians who are already partially blinded by pride in their own creations?" (Zitat aus Hal Hellman: Great Feuds in Mathematics. Ten of the Liveliest Disputes Ever. John Wiley & Sons, Hoboken, New Jersey 2006, S. 203.)

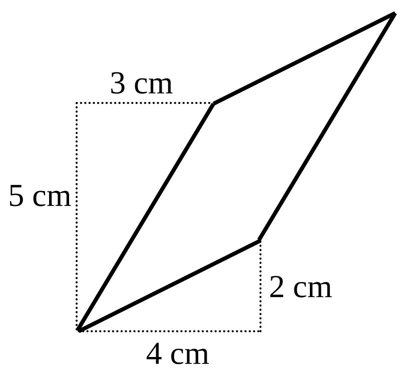
Ist die Mathematik eine Entdeckung oder eine menschliche Erfindung?
Ist die Mathematik naturgegeben und immer schon vorhanden, oder ist die Mathematik eine Konstruktion des menschlichen Geistes?

Aufgabe 3:

Der britische Physik-Nobelpreisträger P. A. M. Dirac beschreibt seine Sichtweise mit den Worten: „One may describe the situation by saying that the mathematician plays a game in which he himself invents the rules…" (Zitat aus Paul A. M. Dirac: The relation between mathematics and physics, James Scott Prize Lecture, Proceedings of the Royal Society (Edinburgh), Band 59, 1938 – 1939, Teil II, S. 122 – 129.

Und Mathilde Marcolli, die Sofja-Kovalevskaya-Preisträgerin von 2001 sagt: „Wenn es außerirdische Lebewesen gäbe, dann würden sie höchstwahrscheinlich auch eine vollkommen andere Mathematik erfinden," weil eben „…Mathematik frei erfunden werden kann,…" (Zitat aus Antonia Rötger: Zur Person – Matilde Marcolli, MaxPlanckForschung, Das Wissenschaftsmagazin der Max-Planck-Gesellschaft, Ausgabe 1/2005, S. 76 – 80)

Als ein einfaches Beispiel für ein solches freies Erfinden von Mathematik vergleichen wir unterschiedliche Lösungsansätze der folgenden Aufgabe: **Wie groß ist der Flächeninhalt des rechts abgebildeten Parallelogramms?**



Berechnen Sie bitte den Flächeninhalt dieses Parallelogramms mit Hilfe von mathematischen Ansätzen, die Ihnen aus der Schule bekannt sind.

Aufgabe 4:

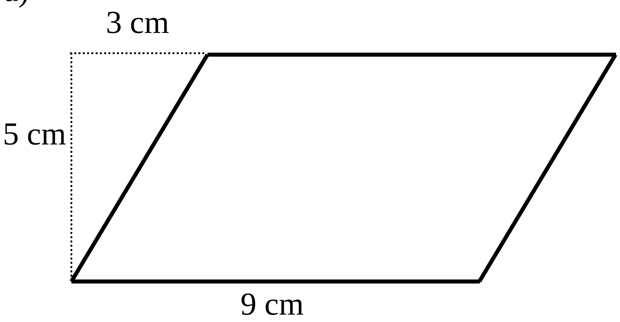
Ein Mathematiker, der eine andere Mathematik erfunden hat, war der Stettiner Gymnasiallehrer Hermann Grassmann, der mit seiner „Ausdehnungslehre“ die Ausdehnung – also den Flächenhalt einfacher geometrischer Figuren – mit Hilfe einer vollkommen anderen Mathematik berechnen konnte.

Vergleichen Sie den Lösungsansatz von Grassmann, den Sie in der Vorlesung kennenlernen konnten, mit der an der Schulmathematik orientierten Lösung von Aufgabe 3.

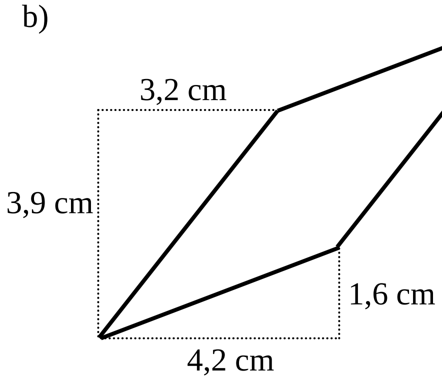
Aufgabe 5:

Berechnen Sie die Flächeninhalte der folgenden Parallelogramme mit Hilfe des Lösungsansatzes von Grassmann.

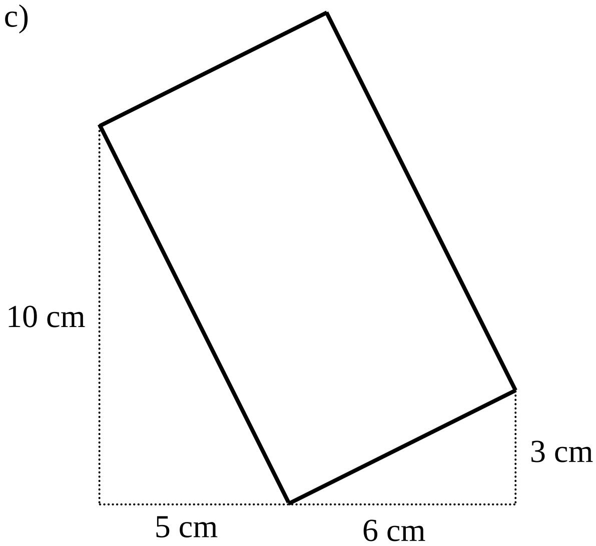
a)



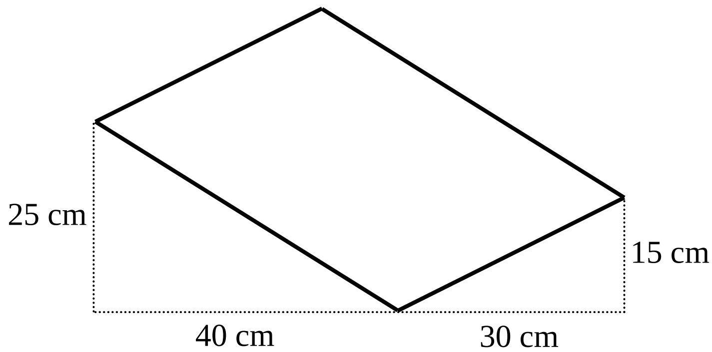
b)



c)



d)



Aufgabe 6:

Im Rahmen dieses Kurses werden schulmathematische Grundlagen vorausgesetzt und nur sehr kurz wiederholt. Sollten Sie Lücken in der Schulmathematik haben, wird erwartet, dass Sie diese eigenständig aufarbeiten. Insbesondere wird erwartet, dass mathematische Grundkenntnisse aus der Mittelstufe uneingeschränkt vorhanden sind.

Sehen Sie sich Ihre früheren Schulbücher zur Mathematik durch und machen Sie sich klar, ob und gegebenenfalls welche Defizite Sie in den Grundfertigkeiten zur Schulmathematik (Bruchrechnung, Äquivalenzumformungen, etc.) haben. Überlegen Sie sich Strategien, wie Sie diese Defizite gegebenenfalls beheben können.

Aufgabe 7:

Besorgen Sie sich über die Bibliothek, über den Buchhandel oder über Second-Hand-Internet-Buchplattformen akademische Lehrbücher zur Wirtschafts- und Finanzmathematik, die die in der Modulbeschreibung aufgeführten Inhalte abdecken.

Wichtig ist nicht so sehr, welche Bücher Sie sich besorgen, sondern dass Sie möglichst viele Aufgaben zur Wirtschaftsmathematik eigenständig lösen und die Bücher als Arbeits- und Hilfsmittel Ihres Lernprozesses einsetzen.

Da Lernprozesse immer etwas Individuelles sind, werden Sie (je nachdem, welcher Lerntyp Sie sind) ganz unterschiedliche Bücher gut oder schlecht finden. Vergleichen Sie mehrere Lehrbücher zur Wirtschafts- und Finanzmathematik und finden Sie heraus, welche zu Ihnen passen.

Aufgabe 8:

Unterschiedliche Bücher verwenden unterschiedliche Darstellungen zur Beschreibung mathematischer Sachverhalte. In der Regel orientiert sich die mathematische Darstellung in diesem Kurs an den vier Lehrbüchern von Tietze (Einführung in die angewandte Wirtschaftsmathematik / Übungsbuch zur angewandten Wirtschaftsmathematik / Einführung in die Finanzmathematik / Übungsbuch zur Finanzmathematik, alle erschienen bei Vieweg + Teubner, Wiesbaden, neuere Auflagen erschienen bei Springer Science).

Es wird jedoch erwartet, dass Sie im Rahmen Ihrer akademischen Ausbildung auch die Fähigkeit erlangen, mit unterschiedlichen Darstellungen und Schreibweisen umzugehen. Sie sollen insbesondere auch erkennen können, wann mathematische Darstellungen inhaltlich identisch sind, obwohl sich die Schreibweise voneinander unterscheidet.

Deshalb besorgen Sie sich bitte mehrere Bücher und vergleichen Sie die Art der mathematischen Darstellungen und Beschreibungen. Ein anderes Buchstabensymbol für die gleiche Variable sollte Sie mathematisch also nicht erschüttern.

Aufgabe 9:

Bringen Sie bitte zu den Präsenzterminen immer einen eigenen Taschenrechner mit. Üben Sie den Umgang mit Ihrem Taschenrechner so lange ein, bis Sie jede der folgenden Rechnungen erfolgreich innerhalb von jeweils weniger als 20 Sekunden bearbeiten können.

Geben Sie alle Ergebnisse bitte auf genau vier Nachkommastellen gerundet an.

a) $$400\left[\frac{1{,}085^{12}-1}{0{,}085}\right]$$

b) $$400\left[\frac{1-\frac{1}{1{,}085^{12}}}{0{,}085}\right]$$

c) $$\frac{400\cdot 1{,}085}{1-\frac{1}{(1+0{,}085)^{12}}}$$

d) $$\sqrt[5]{\frac{1{,}56\cdot 10^{8}}{34\cdot(5+\ln 300)}}$$

e) $$\frac{e^{\left(320\pi-10^{3}\right)}}{\ln\frac{1}{440}}$$

f) $$-2{,}95+\log_{10}\left[\frac{1-\frac{3}{5}}{\frac{27}{6}-3}\right]$$

Hinweis: Zur Klausur sind derzeit nur nicht-programmierbare Taschenrechner zugelassen. Lösen Sie deshalb bitte die Übungsaufgaben mit einem solchen nicht-programmierbaren Taschenrechner.

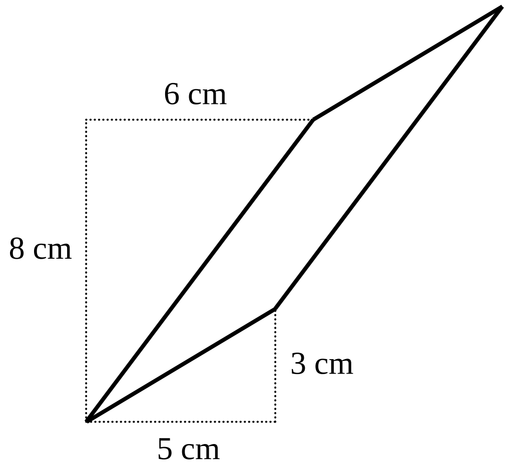
*HWR Berlin, Sommersemester 2017**

Wirtschaftsmathematik (LV-Nr. 200 601.07)

Ergänzung von Übungsblatt 1 – Aufgabenstellung

Aufgabe 1:

Am ersten Termin des IBMAN-Wirtschaftsmathematik-Kurses wurde das folgende Parallelogramm, dessen Koordinatenwerte von Nini vorgegeben wurden, diskutiert:

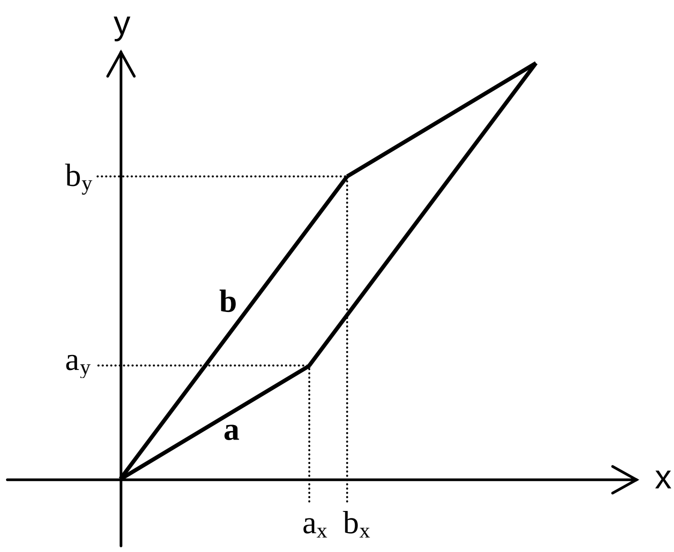


a) Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Parallelogramms mit der Lösungsstrategie, die Hayate in der Vorlesung vorgestellt hat.

b) Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Parallelogramms mit der Lösungsstrategie, die Grassmann erfunden hat.

Aufgabe 2:

Verallgemeinerung von Aufgabe 1: Der erste Seitenvektor **a** eines Parallelogramms zeigt a_x Längeneinheiten in Richtung der x-Achse und a_y Längeneinheiten in Richtung der y-Achse.



Der zweite Seitenvektor **b** des Parallelogramms weist b_x Längeneinheiten in Richtung der x-Achse und b_y Längeneinheiten in Richtung der y-Achse.

Zeigen Sie, dass die Formel zur Berechnung des Flächeninhalts dieses verallgemeinerten Parallelogramms folgendermaßen lautet

$A_{parallelogramm} = a_x\, b_y - a_y\, b_x$

indem Sie die Lösungsstrategie von Hayate verallgemeinern.

(**Übungsblatt später ergänzt*)

*HWR Berlin, Sommersemester 2017**

Wirtschaftsmathematik (LV-Nr. 200 601.07)

Übungsblatt 3 – Aufgabenstellung

Aufgabe 1:

Die folgenden Angebots- und Nachfragefunktionen eines Marktes sind gegeben:

Angebot: $p = x + 15$ Nachfrage: $p = -2x + 60$

a) Berechnen Sie den Gleichgewichtspreis p_G und die Gleichgewichtsmenge x_G algebraisch.

b) Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit der graphischen Lösung.

c) Überführen Sie die Angebots- und Nachfragefunktionen in ein System aus zwei Linearen Gleichungen.

Bestimmen Sie die beiden Koeffizientenvektoren **a** und **b** und den Ergebnisvektor **r**.

Berechnen Sie das äußere Produkt (also die orientierten Flächeninhalte) der drei verschiedenen Parallelogramme, die mit Hilfe der Pauli-Vektoren **a**, **b** und **r** konstruiert werden können.

Berechnen Sie den den Gleichgewichtspreis p_G und die Gleichgewichtsmenge x_G mit Hilfe der Strategie von Grassmann, der einfach die äußeren Produkte durcheinander teilte.

Aufgabe 2:

Berechnen Sie Gleichgewichtspreis p_G und Gleichgewichtsmenge x_G der folgenden Märkte algebraisch. Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit den graphisch ermittelten Lösungen.

a) Angebot: $p = 3x + 40$

Nachfrage: $p = -x + 120$

b) Angebot: $p = 3x + 20$

Nachfrage: $p = -\frac{1}{2}x + 90$

c) Angebot: $p = \frac{1}{4}x + 400$

Nachfrage: $p = -\frac{1}{2}x + 1000$

d) Angebot: $p = 750$

Nachfrage: $p = -\frac{5}{8}x + 1270$

Aufgabe 3:

Lösen Sie Aufgabe 2 mit Hilfe der Geometrischen Algebra.

Aufgabe 4:

Berechnen Sie Gleichgewichtspreis p_G und Gleichgewichtsmenge x_G folgender Märkte:

a) Angebot: $x = \frac{1}{3}p - 4$

Nachfrage: $x = -2p + 206$

b) Angebot: $x = \frac{2}{5}(p - 80)$

Nachfrage: $x = 319 - \frac{5}{7}p$

Aufgabe 5:

Lösen Sie Aufgabe 4 mit Hilfe der Geometrischen Algebra.

Die **Aufgaben 6 – 14** haben keinen Bezug zur Geometrischen Algebra.

(**Übungsblatt später ergänzt*)

Wirtschaftsmathematik (LV-Nr. 200601.07)

Übungsblatt 8 – Aufgabenstellung

Aufgabe 1:

Berechnen Sie den Flächeninhalt der Parallelogramme, die durch folgende Seitenvektoren aufgespannt werden, wobei die Länge $|\sigma_x|$ und $|\sigma_y|$ der Basisvektoren σ_x und σ_y mit 1 cm angesetzt werden soll. Fertigen Sie auch eine Skizze dieser Parallelogramme an.

a) $\mathbf{a} = 5\,\sigma_x + 2\,\sigma_y$, $\mathbf{b} = 2\,\sigma_x + 6\,\sigma_y$

b) $\mathbf{a} = 8\,\sigma_x + 7\,\sigma_y$, $\mathbf{b} = 2\,\sigma_x + 20\,\sigma_y$

c) $\mathbf{a} = 5\,\sigma_x - 5\,\sigma_y$, $\mathbf{b} = 3\,\sigma_x + 7\,\sigma_y$

d) $\mathbf{a} = 4\,\sigma_x + 16\,\sigma_y$, $\mathbf{b} = 9\,\sigma_x + 2\,\sigma_y$

Aufgabe 2:

Berechnen Sie den Flächeninhalt der Parallelogramme, die durch die gegebenen Vektoren aufgespannt werden, wobei die Länge $|\sigma_x|$ und $|\sigma_y|$ der Basisvektoren σ_x und σ_y mit 1 cm angesetzt werden soll.
Fertigen Sie auch eine Skizze dieser Parallelogramme an, falls dies möglich ist, und geben Sie an, um welche besonderen Parallelogramme es sich hierbei handelt.

a) $\mathbf{a} = 6\,\sigma_x + 4\,\sigma_y$, $\mathbf{b} = -4\,\sigma_x + 6\,\sigma_y$

b) $\mathbf{a} = -4{,}8\,\sigma_x - 3{,}4\,\sigma_y$, $\mathbf{b} = -5{,}1\,\sigma_x + 7{,}2\,\sigma_y$

c) $\mathbf{a} = 4\,\sigma_x + 3\,\sigma_y$, $\mathbf{b} = 12\,\sigma_x + 9\,\sigma_y$

d) $\mathbf{a} = 5\,\sigma_x + 20\,\sigma_y$, $\mathbf{b} = -\sigma_x - 4\,\sigma_y$

Aufgabe 3:

Lösen Sie die folgenden Linearen Gleichungssysteme und überprüfen Sie Ihre Lösungen mit einer Probe.

a) $\begin{aligned} 3x + 8y &= 28 \\ 6x + 2y &= 28 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} 4x + 9y &= 29 \\ 5x + 6y &= 31 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} 6x + 4y &= 6 \\ 2x + y &= 3 \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} 5x - 2y &= 6 \\ -2x - 3y &= 28 \end{aligned}$

Aufgabe 4:

Zur Herstellung einer einzigen Mengeneinheit (ME) des Endproduktes E_1 werden 3 ME des Rohstoffes R_1 und 6 ME des Rohstoffes R_2 benötigt.
Zur Herstellung einer einzigen Mengeneinheit des Endproduktes E_2 werden 8 ME des Rohstoffes R_1 und 2 ME des Rohstoffes R_2 benötigt.

Berechnen Sie, welche Menge an Endprodukten E_1 und E_2 hergestellt werden, wenn im Herstellungsprozess insgesamt genau 28 ME des Rohstoffes R_1 und 28 ME des Rohstoffes R_2 verbraucht werden.

(Hinweis: Es können Ergebnisse von Aufgabe 3 verwendet werden.)

Aufgabe 5:

Zur Herstellung einer einzigen Mengeneinheit des Endproduktes E_1 werden 2 ME des Rohstoffes R_1 und 5 ME des Rohstoffes R_2 benötigt.
Zur Herstellung einer einzigen Mengeneinheit des Endproduktes E_2 werden 7 ME des Rohstoffes R_1 und eine ME des Rohstoffes R_2 benötigt.

Berechnen Sie, welche Menge an Endprodukten E_1 und E_2 hergestellt werden, wenn im Herstellungsprozess insgesamt genau 2 050 ME des Rohstoffes R_1 und 1 000 ME des Rohstoffes R_2 verbraucht werden.

Aufgabe 6:

Zur Herstellung einer einzigen Mengeneinheit des Endproduktes E_1 werden 4 ME des Rohstoffes R_1 und eine ME des Rohstoffes R_2 benötigt.
Zur Herstellung einer einzigen Mengeneinheit des Endproduktes E_2 werden 3 ME des Rohstoffes R_1 und 5 ME des Rohstoffes R_2 benötigt.

Im ersten Quartal eines Jahres werden bei der Herstellung dieser beiden Endprodukte insgesamt genau 33 000 ME des ersten Rohstoffes R_1 und 38 000 ME des zweiten Rohstoffes R_2 verbraucht. Im zweiten Quartal eines Jahres werden dagegen insgesamt genau 32 000 ME des ersten Rohstoffes R_1 und 25 000 ME des zweiten Rohstoffes R_2 verbraucht.

Berechnen Sie, welche Menge an Endprodukten E_1 und E_2 im ersten Quartal und welche Mengen dieser Endprodukte im zweiten Quartal hergestellt wurden.

Aufgabe 7:

Ein Betrieb stellt aus den zwei Rohstoffen R_1 und R_2 die beiden Zwischenprodukte Z_1 und Z_2 her. Diese werden sodann zu den zwei Endprodukten E_1 und E_2 weiterverarbeitet.

Der Rohstoffbedarf des ersten Produktionsschrittes und der Gesamtrohstoffbedarf zur Produktion jeweils einer Einheit werden durch die folgenden Tabellen beschrieben:

	Z_1	Z_2
R_1	8	2
R_2	4	3

	E_1	E_2
R_1	42	28
R_2	23	26

Geben Sie die Zwischenbedarfsmatrix **B** an, die den Bedarf an Zwischenprodukten zur Produktion jeweils einer Einheit der Endprodukte im zweiten Produktionsschritt angibt.

Aufgabe 8:

Ein Betrieb stellt aus den zwei Rohstoffen R_1 und R_2 die beiden Zwischenprodukte Z_1 und Z_2 her. Diese werden sodann zu den drei Endprodukten E_1, E_2 und E_3 weiterverarbeitet.

Der Rohstoffbedarf des ersten Produktionsschrittes und der Gesamtrohstoffbedarf zur Produktion jeweils einer Einheit werden durch die folgenden Tabellen beschrieben:

	Z_1	Z_2
R_1	9	3
R_2	2	2

	E_1	E_2	E_3
R_1	48	21	84
R_2	12	14	32

Geben Sie die Zwischenbedarfsmatrix **B** an, die den Bedarf an Zwischenprodukten zur Produktion jeweils einer Einheit der Endprodukte im zweiten Produktionsschritt angibt.

Aufgabe 9:

Zur Herstellung einer einzigen Mengeneinheit des Endproduktes E_1 werden 7 ME des Rohstoffes R_1 und 4 ME des Rohstoffes R_2 benötigt.
Zur Herstellung einer einzigen Mengeneinheit des Endproduktes E_2 werden 5 ME des Rohstoffes R_1 und 3 ME des Rohstoffes R_2 benötigt.

Berechnen Sie, welche Mengen der Endprodukte E_1 und E_2 theoretisch hergestellt werden könnten, wenn genau eine ME des ersten Rohstoffes R_1 verbraucht werden soll.
Und berechnen Sie, welche Mengen der Endprodukte E_1 und E_2 theoretisch hergestellt werden könnten, wenn genau eine ME des zweiten Rohstoffes R_2 verbraucht werden soll.

Wie sind diese Ergebnisse zu deuten?
Geben Sie eine Interpretation der Ergebnisse an.

Aufgabe 10:

Zur Herstellung einer einzigen Mengeneinheit des Endproduktes E_1 werden 10 ME des Rohstoffes R_1 und 4 ME des Rohstoffes R_2 benötigt.
Zur Herstellung einer einzigen Mengeneinheit des Endproduktes E_2 werden 12 ME des Rohstoffes R_1 und 5 ME des Rohstoffes R_2 benötigt.

Berechnen Sie, welche Mengen der Endprodukte E_1 und E_2 theoretisch hergestellt werden könnten, wenn genau eine ME des ersten Rohstoffes R_1 verbraucht werden soll.
Und berechnen Sie, welche Mengen der Endprodukte E_1 und E_2 theoretisch hergestellt werden könnten, wenn genau eine ME des zweiten Rohstoffes R_2 verbraucht werden soll.

Geben Sie die Inverse der ursprünglichen Bedarfsmatrix an und machen Sie eine Probe.

Aufgabe 11:

Ermitteln Sie die Inversen der folgenden Matrizen und machen Sie eine Probe.

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 9 & 7 \end{pmatrix}$ b) $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 19 & 8 \end{pmatrix}$ c) $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 10 & 6 \\ 20 & 13 \end{pmatrix}$ d) $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & -2{,}5 \\ 0{,}2 & 3{,}4 \end{pmatrix}$

HWR Berlin, Sommersemester 2017

Wirtschaftsmathematik (LV-Nr. 200601.07)

Übungsblatt 9 – Aufgabenstellung

Aufgabe 1:

a) Laden Sie das Programm-Tool „**Geometric Algebra Algorithms Optimizer**" (GAALOP) aus dem Internet herunter, indem Sie auf der GAALOP-Homepage unter

www.gaalop.de

den Link „**Download**" anklicken und dann auf der Download-Seite

www.gaalop.de/download

den blau unterlegten Link „**download Gaalop**" aktivieren.

b) Nach der Installation kann GAALOP – in Abhängigkeit von der Konfiguration und den Sicherheitseinstellungen Ihres Computers – entweder durch Anklicken des „**Start**"-Icons oder durch direktes Aktivieren der Java-Datei „**java -jar starter-1.0.0.jar**" gestartet werden.

Aufgabe 2:

Machen Sie sich mit dem Umgang mit GAALOP vertraut, indem Sie sich selbst einfache Rechnungen zur Geometrischen Algebra ausdenken und diese dann mit GAALOP lösen.

Wählen Sie dabei die Pauli-Algebra des dreidimensionalen, Euklidischen Raumes als

Algebra to use: „**3d – vectors in 3d**"

auf der Grundlage von CluCalc.

Geben Sie beispielsweise die drei Vektoren
$$\mathbf{a} = 4\,\sigma_x + 8\,\sigma_y$$
$$\mathbf{b} = 10\,\sigma_x + 3\,\sigma_y$$
$$\mathbf{c} = 5\,\sigma_x - 5\,\sigma_y$$
ein und berechnen Sie die folgenden Summen bzw. Differenzen:

a) $\mathbf{p} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ b) $\mathbf{q} = 4\,\mathbf{a} + 2\,\mathbf{b}$ c) $\mathbf{r} = \mathbf{b} - 2\,\mathbf{c}$ d) $\mathbf{s} = 65\,\mathbf{a} - 60\,\mathbf{b} + 68\,\mathbf{c}$

Aufgabe 3:

Lösen Sie die Aufgaben des vorangegangenen Übungsblattes 8 mit Hilfe von GAALOP.

Die Aufgaben des Übungsblattes 8 bezogen sich auf Lineare Gleichungssysteme aus zwei linearen Gleichungen mit zwei Unbekannten. Diese Aufgaben können in der Geometrischen Algebra mit Vektoren, die in nur zwei Raumrichtungen zeigen und die sich somit in der xy-Ebene befinden, gelöst werden.

Auf den folgenden Seiten finden Sie Aufgaben, die sich auf Lineare Gleichungssysteme aus drei linearen Gleichungen beziehen. Zur Lösung dieser Gleichungen wird deshalb die Mathematik von Vektoren, die in alle drei Raumrichtungen x, y und z zeigen, benötigt.

Aufgabe 4:

a) Zur Herstellung einer einzigen Mengeneinheit (ME) des Endproduktes E_1 werden 5 ME des Rohstoffes R_1, 4 ME des Rohstoffes R_2 und 3 ME des Rohstoffes R_3 benötigt. Zur Herstellung einer einzigen Mengeneinheit des Endproduktes E_2 werden lediglich 2 ME des Rohstoffes R_3 benötigt.

Berechnen Sie mit Hilfe von GAALOP, welche Mengen an Endprodukten E_1 und E_2 hergestellt werden, wenn im Herstellungsprozess insgesamt genau 125 ME des Rohstoffes R_1, 100 ME des Rohstoffes R_2 und 145 ME des Rohstoffes R_3 verbraucht werden.

b) Zur Herstellung einer einzigen Mengeneinheit des Endproduktes E_1 werden 5 ME des Rohstoffes R_1, 4 ME des Rohstoffes R_2 und 3 ME des Rohstoffes R_3 benötigt. Zur Herstellung einer einzigen Mengeneinheit des Endproduktes E_2 werden 6 ME des Rohstoffes R_1, 7 ME des Rohstoffes R_2 und 8 ME des Rohstoffes R_3 benötigt.

Berechnen Sie mit Hilfe von GAALOP, welche Mengen an Endprodukten E_1 und E_2 hergestellt werden, wenn im Herstellungsprozess insgesamt genau 380 ME des Rohstoffes R_1, 370 ME des Rohstoffes R_2 und 360 ME des Rohstoffes R_3 verbraucht werden.

Geben Sie neben der Lösung, die Sie mit Hilfe von GAALOP ermittelt haben, auch die ausführliche Berechnung der Zwischenschritte in der Geometrischen Algebra an sowie eine einfache Lösung, die Ihnen mit einem konventionellen Ansatz gelingt, und machen Sie eine Probe.

Aufgabe 5:

Berechnen Sie mit Hilfe von GAALOP das Volumen der Parallelepipede, die durch die angegebenen Seitenvektoren aufgespannt werden. Dabei soll die Länge $|\sigma_x|$, $|\sigma_y|$ und $|\sigma_z|$ der Basisvektoren σ_x, σ_y und σ_z mit 1 cm angesetzt werden.

a) $\mathbf{a} = 4\,\sigma_x + 2\,\sigma_y$
$\mathbf{b} = 2\,\sigma_x + 4\,\sigma_y$
$\mathbf{c} = 3\,\sigma_z$

b) $\mathbf{a} = 4\,\sigma_x + 2\,\sigma_y$
$\mathbf{b} = 2\,\sigma_x + 4\,\sigma_y$
$\mathbf{c} = 5\,\sigma_y + 5\,\sigma_z$

c) $\mathbf{a} = 4\,\sigma_x + 2\,\sigma_y$
$\mathbf{b} = 2\,\sigma_x + 4\,\sigma_y$
$\mathbf{c} = 7\,\sigma_x + 7\,\sigma_y + 7\,\sigma_z$

d) $\mathbf{a} = 2\,\sigma_x + 5\,\sigma_y + 5\,\sigma_z$
$\mathbf{b} = 3\,\sigma_x + 3\,\sigma_y + 6\,\sigma_z$
$\mathbf{c} = 4\,\sigma_x + 4\,\sigma_y + 4\,\sigma_z$

e) $\mathbf{a} = 2\,\sigma_x + 6\,\sigma_y + 10\,\sigma_z$
$\mathbf{b} = 8\,\sigma_x + 3\,\sigma_y + 12\,\sigma_z$
$\mathbf{c} = 7\,\sigma_x + 9\,\sigma_y + 4\,\sigma_z$

f) $\mathbf{a} = 4\,\sigma_x + 8\,\sigma_y - 5\,\sigma_z$
$\mathbf{b} = 3\,\sigma_x - 7\,\sigma_y + 6\,\sigma_z$
$\mathbf{c} = -2\,\sigma_x + 9\,\sigma_y - \sigma_z$

Fertigen Sie für die ersten drei Teilaufgaben a), b) und c) auch eine Skizze dieser Parallelepipede an und vergleichen Sie die Ergebnisse aller Teilaufgaben mit dem Resultat, das Sie bei einer Berechnung der Determinanten mit Hilfe der Regel von Sarrus erhalten.

Aufgabe 6:

Lösen Sie die folgenden Linearen Gleichungssysteme mit Hilfe von GAALOP entweder direkt oder unter Angabe von Zwischenschritten und überprüfen Sie Ihre Lösungen mit einer Probe.

a)
$$\begin{aligned} 3x + 8y \phantom{{}+2z} &= 28 \\ 6x + 2y \phantom{{}+2z} &= 28 \\ 2x + 4y + 2z &= 28 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 8x + 5y + 10z &= 396 \\ 3x + 7y + 12z &= 375 \\ 2x + 6y + 14z &= 386 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} 3x - 5y + 6z &= 41 \\ -2x + 5y + 8z &= 111 \\ 7x + y + 9z &= 185 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} \tfrac{2}{5}x + \tfrac{7}{5}y + \tfrac{9}{5}z &= 210 \\ \tfrac{8}{5}x + \tfrac{1}{5}y + \tfrac{3}{5}z &= 138 \\ \tfrac{4}{5}x + \tfrac{12}{5}y + \tfrac{6}{5}z &= 282 \end{aligned}$$

Aufgabe 7:

Zur Herstellung einer einzigen Mengeneinheit des Endproduktes E_1 werden 7 ME des Rohstoffes R_1, 3 ME des Rohstoffes R_2 und 4 ME des Rohstoffes R_3 benötigt.
Zur Herstellung einer einzigen Mengeneinheit des Endproduktes E_2 werden 2 ME des Rohstoffes R_1, 9 ME des Rohstoffes R_2 und 6 ME des Rohstoffes R_3 benötigt.
Zur Herstellung einer einzigen Mengeneinheit des Endproduktes E_3 werden 5 ME des Rohstoffes R_1 und 8 ME des Rohstoffes R_3 benötigt.

Berechnen Sie mit Hilfe von GAALOP, welche Mengen an Endprodukten E_1, E_2 und E_3 hergestellt werden, wenn im Herstellungsprozess 500 ME des Rohstoffes R_1, 780 ME des Rohstoffes R_2 und 880 ME des Rohstoffes R_3 verbraucht werden.

Aufgabe 8:

Zur Herstellung einer einzigen Mengeneinheit des Endproduktes E_1 werden 12 ME des Rohstoffes R_1, 20 ME des Rohstoffes R_2 und 16 ME des Rohstoffes R_3 benötigt.
Zur Herstellung einer einzigen Mengeneinheit des Endproduktes E_2 werden 30 ME des Rohstoffes R_1, 15 ME des Rohstoffes R_2 und 28 ME des Rohstoffes R_3 benötigt.
Zur Herstellung einer einzigen Mengeneinheit des Endproduktes E_3 werden 10 ME des Rohstoffes R_1, 8 ME des Rohstoffes R_2 und 25 ME des Rohstoffes R_3 benötigt.

Berechnen Sie mit Hilfe von GAALOP, welche Mengen an Endprodukten E_1, E_2 und E_3 hergestellt werden, wenn im Herstellungsprozess 12 000 ME des Rohstoffes R_1, 13 900 ME des Rohstoffes R_2 und 18 300 ME des Rohstoffes R_3 verbraucht werden.

Aufgabe 9:

Zur Herstellung einer einzigen Mengeneinheit des Endproduktes E_1 werden 9 ME des Rohstoffes R_1, 2 ME des Rohstoffes R_2 und 7 ME des Rohstoffes R_3 benötigt.
Zur Herstellung einer einzigen Mengeneinheit des Endproduktes E_2 werden 3 ME des Rohstoffes R_1, 2 ME des Rohstoffes R_2 und 5 ME des Rohstoffes R_3 benötigt.
Zur Herstellung einer einzigen Mengeneinheit des Endproduktes E_3 werden 4 ME des Rohstoffes R_1, 3 ME des Rohstoffes R_2 und 2 ME des Rohstoffes R_3 benötigt.

Im ersten Quartal eines Jahres werden bei der Herstellung dieser drei Endprodukte insgesamt 98 ME des ersten Rohstoffes R_1, 35 ME des zweiten Rohstoffes R_2 und 76 ME des dritten Rohstoffes R_3 verbraucht.
Im zweiten Quartal des gleichen Jahres werden dagegen insgesamt 61 ME des ersten Rohstoffes R_1, 30 ME des zweiten Rohstoffes R_2 und 59 ME des dritten Rohstoffes R_3 verbraucht.

Berechnen Sie mit Hilfe von GAALOP, welche Menge der Endprodukte E_1, E_2 und E_3 im ersten Quartal und welche Mengen dieser Endprodukte im zweiten Quartal hergestellt wurden.

Aufgabe 10:

Ein Betrieb stellt aus den drei Rohstoffen R_1, R_2 und R_3 die drei Zwischenprodukte Z_1, Z_2 und Z_3 her. Diese werden sodann zu den zwei Endprodukten E_1 und E_2 weiterverarbeitet.

Der Rohstoffbedarf des ersten Produktionsschrittes und der Gesamtrohstoffbedarf zur Produktion jeweils einer Einheit der Endprodukte werden durch die folgenden Tabellen beschrieben:

	Z_1	Z_2	Z_3
R_1	10	15	11
R_2	17	20	16
R_3	12	14	25

	E_1	E_2
R_1	964	814
R_2	1409	1184
R_3	1320	1093

Bestimmen Sie mit Hilfe von GAALOP die Zwischenbedarfsmatrix **B**, die im zweiten Produktionsschritt den Bedarf an Zwischenprodukten zur Produktion jeweils einer Einheit der Endprodukte angibt und machen Sie eine Probe.

Aufgabe 11:

Ein Betrieb stellt aus den drei Rohstoffen R_1, R_2 und R_3 die drei Zwischenprodukte Z_1, Z_2 und Z_3 her. Diese werden sodann zu den drei Endprodukten E_1, E_2 und E_3 weiterverarbeitet.

Der Rohstoffbedarf des ersten Produktionsschrittes und der Gesamtrohstoffbedarf zur Produktion jeweils einer Einheit der Endprodukte werden durch die folgenden Tabellen beschrieben:

	Z_1	Z_2	Z_3
R_1	8	6	6
R_2	7	5	7
R_3	5	4	0

	E_1	E_2	E_3
R_1	228	186	308
R_2	214	166	282
R_3	108	107	160

Bestimmen Sie mit Hilfe von GAALOP die Zwischenbedarfsmatrix **B**, die im zweiten Produktionsschritt den Bedarf an Zwischenprodukten zur Produktion jeweils einer Einheit der Endprodukte angibt und machen Sie eine Probe.

Aufgabe 12:

Ein Betrieb stellt aus den drei Rohstoffen R_1, R_2 und R_3 die drei Zwischenprodukte Z_1, Z_2 und Z_3 her. Diese werden sodann zu den drei Endprodukten E_1, E_2 und E_3 weiterverarbeitet.

Der Rohstoffbedarf des ersten Produktionsschrittes und der Gesamtrohstoffbedarf zur Produktion jeweils einer Einheit der Endprodukte werden durch die folgenden Tabellen beschrieben:

	Z_1	Z_2	Z_3
R_1	82	63	20
R_2	44	19	37
R_3	10	52	92

	E_1	E_2	E_3
R_1	4496	5462	4815
R_2	2530	3482	2801
R_3	3224	4062	4646

Bestimmen Sie mit Hilfe von GAALOP die Zwischenbedarfsmatrix **B**, die im zweiten Produktionsschritt den Bedarf an Zwischenprodukten zur Produktion jeweils einer Einheit der Endprodukte angibt und machen Sie eine Probe.

Aufgabe 13:

Zur Herstellung einer einzigen Mengeneinheit des Endproduktes E_1 werden 3 ME des Rohstoffes R_1, 2 ME des Rohstoffes R_2 und 8 ME des Rohstoffes R_3 benötigt.
Zur Herstellung einer einzigen Mengeneinheit des Endproduktes E_2 werden 5 ME des Rohstoffes R_1, 6 ME des Rohstoffes R_2 und 7 ME des Rohstoffes R_3 benötigt.
Zur Herstellung einer einzigen Mengeneinheit des Endproduktes E_3 werden 4 ME des Rohstoffes R_1, 3 ME des Rohstoffes R_2 und 10 ME des Rohstoffes R_3 benötigt.

Berechnen Sie mit Hilfe von GAALOP, welche Mengen der Endprodukte E_1, E_2 und E_3 theoretisch hergestellt werden könnten, wenn genau eine ME des ersten Rohstoffes R_1 verbraucht werden soll.

Berechnen Sie mit Hilfe von GAALOP, welche Mengen der Endprodukte E_1, E_2 und E_3 theoretisch hergestellt werden könnten, wenn genau eine ME des zweiten Rohstoffes R_2 verbraucht werden soll.

Und berechnen Sie mit Hilfe von GAALOP, welche Mengen der Endprodukte E_1, E_2 und E_3 theoretisch hergestellt werden könnten, wenn genau eine ME des dritten Rohstoffes R_3 verbraucht werden soll.

Geben Sie auf Grundlage der eben berechneten Werte die Inverse der ursprünglichen Bedarfsmatrix an und machen Sie eine Probe.

Aufgabe 14:

Ermitteln Sie mit Hilfe von GAALOP die Inversen der folgenden Matrizen (sofern sie existieren) und machen Sie jeweils eine Probe.

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 7 & 2 & 6 \\ 6 & 3 & 8 \end{pmatrix}$

b) $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 7 \\ 4 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$

c) $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$

d) $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 8 \\ 10 & 5 & 10 \\ 10 & 20 & 15 \end{pmatrix}$

HWR Berlin, Sommersemester 2017

Wirtschaftsmathematik (LV-Nr. 200 601.07)

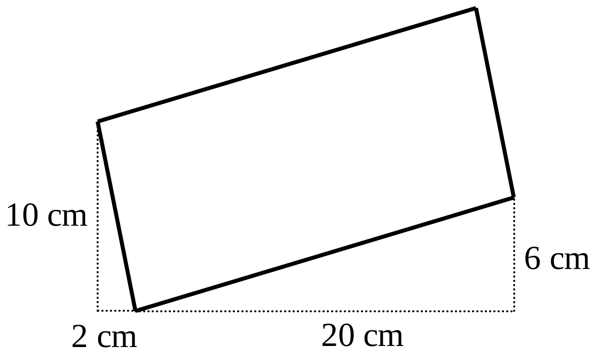
Übungsblatt 21 – Wiederholungsaufgaben zur Linearen Algebra

Aufgabe 1:
Aufgabe 2:
Aufgabe 3:
Aufgabe 4:
Aufgabe 5:
Aufgabe 6:
Aufgabe 7:

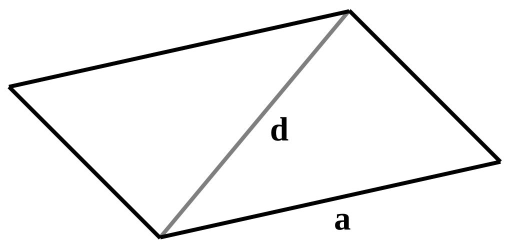
Standard-Problemstellungen zur Linearen Algebra, die ohne Rückgriff auf die Geometrische Algebra gelöst werden.

Aufgabe 8:

a) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Parallelogramms.



b) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Parallelogramms, wenn die Basisvektoren σ_x und σ_y eine Länge von jeweils 1 cm aufweisen.



$\mathbf{a} = 18\,\sigma_x + \;\; 4\,\sigma_y$

$\mathbf{d} = 10\,\sigma_x + 12\,\sigma_y$

Aufgabe 9:

Zur Herstellung einer einzigen Mengeneinheit des Endproduktes E_1 werden 8 ME des Rohstoffes R_1 und 5 ME des Rohstoffes R_2 benötigt.
Zur Herstellung einer einzigen Mengeneinheit des Endproduktes E_2 werden 10 ME des Rohstoffes R_1 und 15 ME des Rohstoffes R_2 benötigt.

Berechnen Sie, welche Menge an Endprodukten E_1 und E_2 hergestellt werden, wenn im Herstellungsprozess insgesamt genau 280 ME des ersten Rohstoffes R_1 und ebenfalls 280 ME des zweiten Rohstoffes R_2 verbraucht werden.

Aufgabe 10:

Ein Betrieb stellt aus den zwei Rohstoffen R_1 und R_2 die zwei Zwischenprodukte Z_1 und Z_2 her. Aus diesen Zwischenprodukten werden die zwei Endprodukte E_1 und E_2 gefertigt.

Zur Herstellung einer einzigen Mengeneinheit des ersten Zwischenproduktes Z_1 werden 7 ME des ersten Rohstoffes R_1 und 8 ME des Rohstoffes R_2 benötigt.
Zur Herstellung einer einzigen Mengeneinheit des zweiten Zwischenproduktes Z_2 werden 3 ME des ersten Rohstoffes R_1 und 9 ME des zweiten Rohstoffes R_2 benötigt.

Zur Herstellung einer einzigen Mengeneinheit des ersten Endproduktes E_1 werden insgesamt 94 ME des ersten Rohstoffes R_1 und 152 ME des zweiten Rohstoffes R_2 benötigt.
Zur Herstellung einer einzigen Mengeneinheit des zweiten Endproduktes E_2 werden insgesamt 80 ME des ersten Rohstoffes R_1 und 175 ME des zweiten Rohstoffes R_2 benötigt.

Berechnen Sie die Bedarfsmatrix **B** der zweiten Produktionsstufe, die den Bedarf an Zwischenprodukten zur Produktion der Endprodukte angibt.

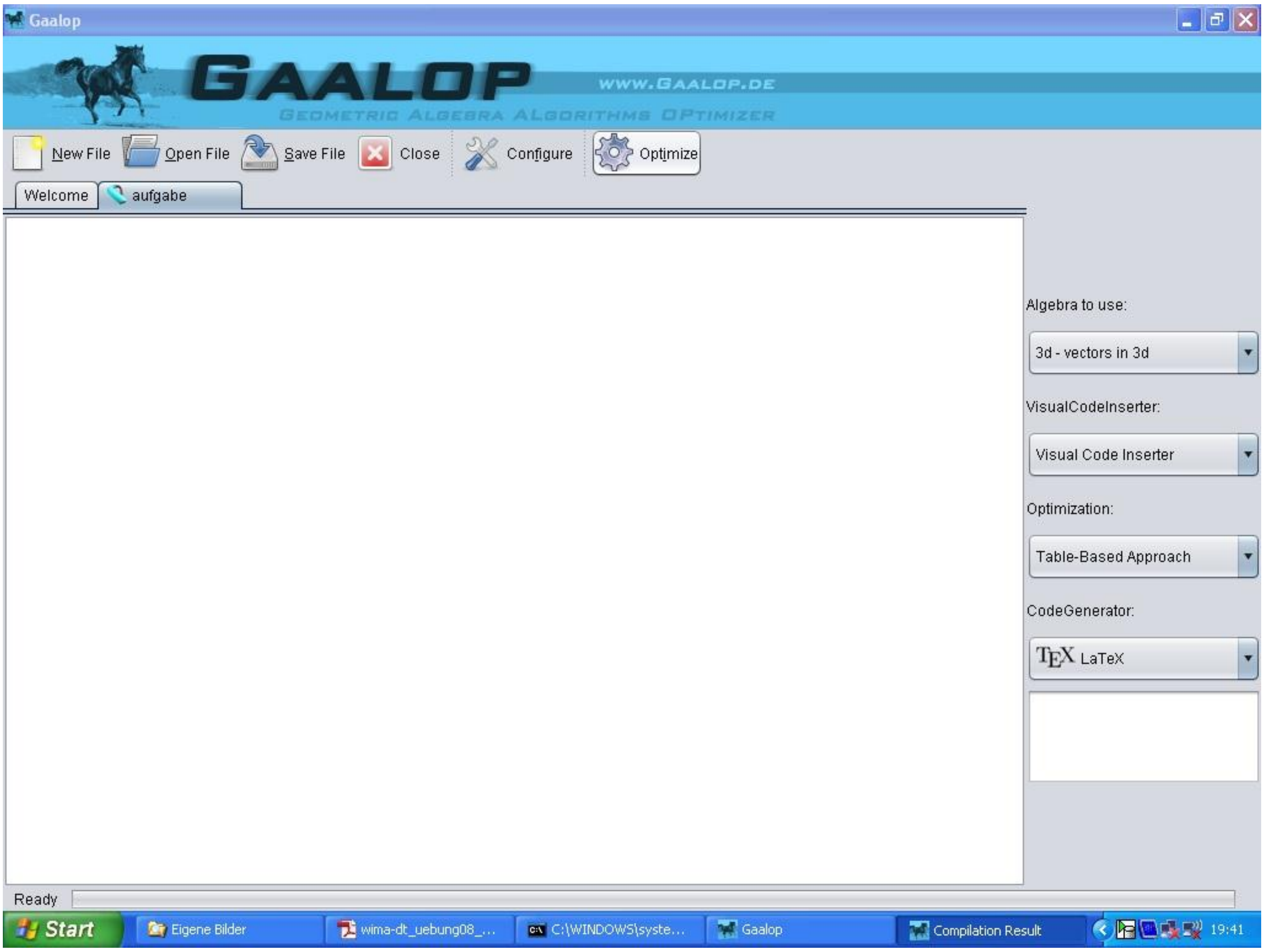
Aufgabe 11:

Zur Herstellung einer einzigen Mengeneinheit des Endproduktes E_1 werden 7 ME des Rohstoffes R_1, 6 ME des Rohstoffes R_2 und 5 ME des Rohstoffes R_3 benötigt.
Zur Herstellung einer einzigen Mengeneinheit des Endproduktes E_2 werden 9 ME des Rohstoffes R_1, 8 ME des Rohstoffes R_2 und 7 ME des Rohstoffes R_3 benötigt.
Zur Herstellung einer einzigen Mengeneinheit des Endproduktes E_3 werden 5 ME des Rohstoffes R_1, 4 ME des Rohstoffes R_2 und 3 ME des Rohstoffes R_3 benötigt.

Im Herstellungsprozess werden nun insgesamt 359 ME des ersten Rohstoffes R_1, 308 ME des zweiten Rohstoffes R_2 und 257 ME des dritten Rohstoffes R_3 verbraucht.

a) Geben Sie das Lineare Gleichungssystem an, das gelöst werden muss, wenn die Herstellungsmengen der Endprodukte E_1, E_2 und E_3 berechnet werden sollen.

b) Tragen Sie in die auf der folgenden Seite angegebenen GAALOP-Benutzeroberfläche ein, wie Sie dieses Gleichungssystem mit GAALOP lösen können.



Ein entsprechend der Aufgabenstellung b) eingegebenes GAALOP-Programm wird durch Anklicken des Optimize-Buttons gestartet. Im Compiler-Feld erscheint allerdings nicht die erwartete Lösung von $x = 18$

$y = 17$

$z = 16$, sondern die Angabe, dass die Lösungswerte undefiniert sind.

c) Überprüfen Sie durch eine Probe, ob die erwartete Lösung falsch ist, oder ob es sich tatsächlich hierbei um korrekte Lösungswerte dieser Aufgabe handelt.

d) Was lief bei der Aufgabenlösung mit Hilfe von GAALOP schief?
Geben Sie an, warum GAALOP die Lösungswerte als undefiniert angibt – obwohl Sie diese doch in Aufgabenteil c) überprüften.

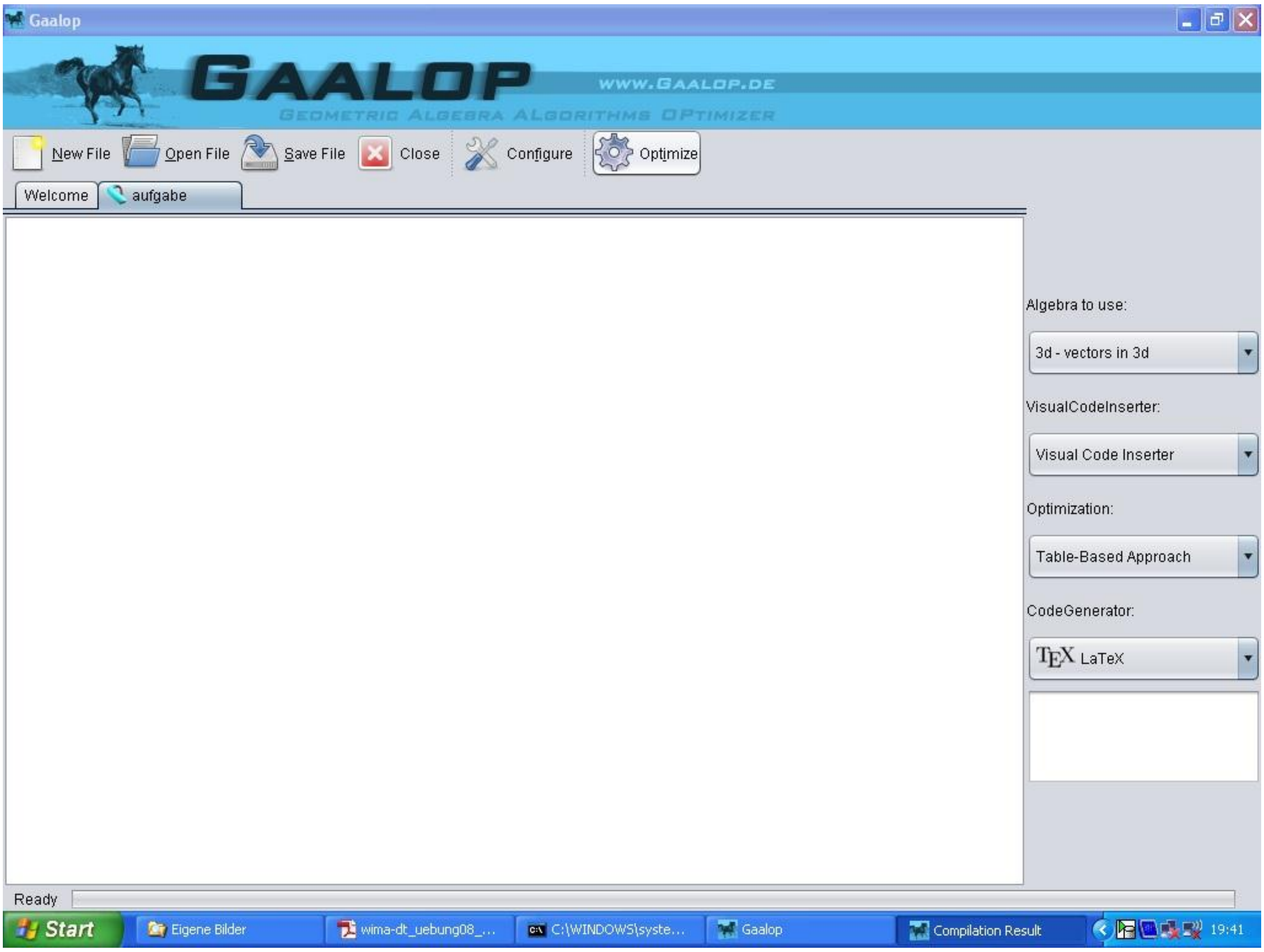
Aufgabe 12:

Zur Herstellung einer einzigen Mengeneinheit des Endproduktes E_1 werden 7 ME des Rohstoffes R_1, 6 ME des Rohstoffes R_2 und 5 ME des Rohstoffes R_3 benötigt.
Zur Herstellung einer einzigen Mengeneinheit des Endproduktes E_2 werden 9 ME des Rohstoffes R_1, 8 ME des Rohstoffes R_2 und 7 ME des Rohstoffes R_3 benötigt.
Zur Herstellung einer einzigen Mengeneinheit des Endproduktes E_3 werden 5 ME des Rohstoffes R_1, 4 ME des Rohstoffes R_2 und 2 ME des Rohstoffes R_3 benötigt.

Im Herstellungsprozess werden nun insgesamt 422 ME des ersten Rohstoffes R_1, 362 ME des zweiten Rohstoffes R_2 und 283 ME des dritten Rohstoffes R_3 verbraucht.

a) Geben Sie das Lineare Gleichungssystem an, das gelöst werden muss, wenn die Herstellungsmengen der Endprodukte E_1, E_2 und E_3 berechnet werden sollen.

b) Tragen Sie in die unten angegebene GAALOP-Benutzeroberfläche ein, wie Sie dieses Gleichungssystem mit GAALOP lösen können.

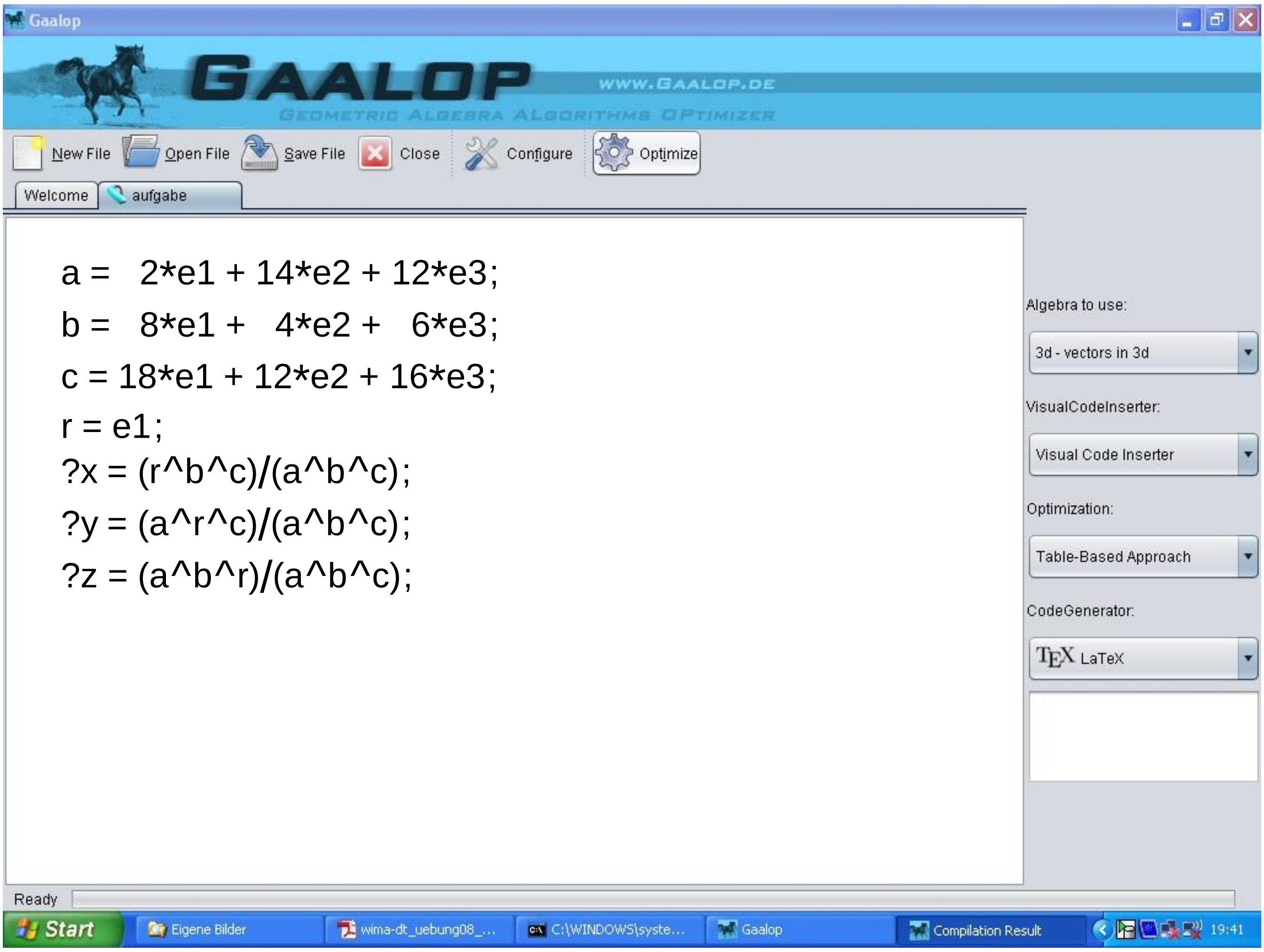


c) Ein entsprechend der Aufgabenstellung b) eingegebenes GAALOP-Programm wird durch Anklicken des Optimize-Buttons gestartet. Im Compiler-Feld erscheinen die folgenden Lösungswerte: $x = 21$
$y = 20$
$z = 19$

Überprüfen Sie durch eine Probe, ob diese Lösungswerte korrekt sind.

Aufgabe 13:

Mit Hilfe von GAALOP wird folgende Rechnung durchgeführt:



a) Geben Sie an, welches mathematische Objekt mit dieser Rechnung berechnet wurde.

b) Überprüfen Sie mit einer Probe, ob die folgenden Lösungswerte die korrekten Ergebnisse dieser GAALOP-Aufgabe darstellen:

$x = 1$

$y = 10$

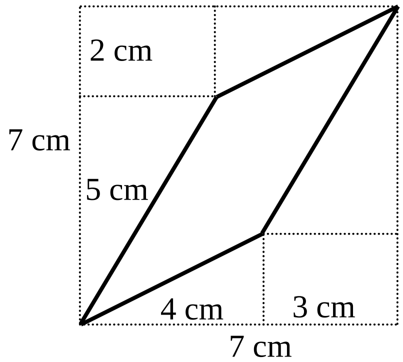
$z = -4{,}5$

Wirtschaftsmathematik (LV-Nr. 200601.07)

Übungsblatt 1 – Lösungen

Aufgabe 3:

Ein möglicher Lösungsansatz, der Ihnen aus der Schule bekannt sein sollte, besteht in einer Einbettung des Parallelogramms in ein großes Rechteck, das hier aufgrund der gewählten Seitenlängen ein Quadrat sein wird.



$$
\begin{aligned}
A_{\text{Parallelogramm}} &= A_{\text{Gesamtquadrat}} - 2 \cdot A_{\text{Rechteck}} - 2 \cdot A_{\text{großes Dreieck}} - 2 \cdot A_{\text{kleines Dreieck}} \\
&= 7\,\text{cm} \cdot 7\,\text{cm} - 2 \cdot 3\,\text{cm} \cdot 2\,\text{cm} - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 5\,\text{cm} \cdot 3\,\text{cm} - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4\,\text{cm} \cdot 2\,\text{cm} \\
&= 49\,\text{cm}^2 - 2 \cdot 6\,\text{cm}^2 - 2 \cdot 7{,}5\,\text{cm}^2 - 2 \cdot 4\,\text{cm}^2 \\
&= 49\,\text{cm}^2 - 12\,\text{cm}^2 - 15\,\text{cm}^2 - 8\,\text{cm}^2 \\
&= 14\,\text{cm}^2
\end{aligned}
$$

Aufgabe 4:

Der Lösungsansatz von Grassmann beruht auf den Vertauschungseigenschaften der von ihm definierten (also „erfundenen“) Basisvektoren, die wir hier aus historischen Gründen mit σ_x, σ_y und σ_z (Pauli-Vektoren) bezeichnen:

σ_x = ein Schritt in x-Richtung = Basisvektor in x-Richtung

σ_y = ein Schritt in y-Richtung = Basisvektor in y-Richtung

σ_z = ein Schritt in z-Richtung = Basisvektor in z-Richtung

Da alle diese Basisvektoren jeweils die Länge von einer Längeneinheit haben sollten, legte Hermann Grassmann (und später Wolfgang Pauli) in seiner Definition (seiner „Erfindung“) das Quadrat dieser Einheitsvektoren auf Eins fest:

$\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = 1$ $\Rightarrow$ Dies bezeichnet man als ***Normierung***.

Außerdem entschied sich Hermann Grassmann (und später Wolfgang Pauli) dafür, ganz anders zu rechnen, als wir dies von den reellen Zahlen gewohnt sind.

Bei den reellen Zahlen ändert sich das Ergebnis nicht, wenn bei einer Multiplikation die Reihenfolge der Faktoren geändert wird. Beispielsweise ist das Ergebnis von 3 mal 7 genau gleich dem Ergebnis von 7 mal 3 (nämlich in beiden Fällen 21):

$3 \cdot 7 = 7 \cdot 3$ $\Rightarrow$ Dieses Verhalten nennt man ***Kommutativität***.

Bei den Pauli-Vektoren dagegen ändert sich das Ergebnis, wenn bei einer Multiplikation die Reihenfolge der Basisvektoren geändert wird: Es muss dann ein zusätzliches negatives Vorzeichen berücksichtigt werden:

$$\sigma_x \sigma_y = -\sigma_y \sigma_x$$

$$\sigma_y \sigma_z = -\sigma_z \sigma_y$$

$$\sigma_z \sigma_x = -\sigma_x \sigma_z$$ $\Rightarrow$ Dieses Verhalten nennt man ***Anti–Kommutativität***.

Hermann Grassmann (und später Wolfgang Pauli) hat diese algebraischen Regeln deshalb so gewählt (also „erfunden“), weil dies die Hintereinander-Ausführung von Schritten in unterschiedlichen Richtungen gut beschreibt.

Gehen wir erst einen Schritt in die x-Richtung und dann einen Schritt in die y-Richtung (also mathematisch $\sigma_x \sigma_y$), dann bewegen wir uns so wie die Autos im Kreisverkehr (nämlich entgegen dem Uhrzeigersinn, siehe linkes Bild). Gehen wir erst einen Schritt in die y-Richtung und dann einen Schritt in die x-Richtung (also mathematisch $\sigma_y \sigma_x$), dann bewegen wir uns wie ein Geisterfahren im Kreisverkehr (nämlich im Uhrzeigersinn, siehe rechtes Bild).

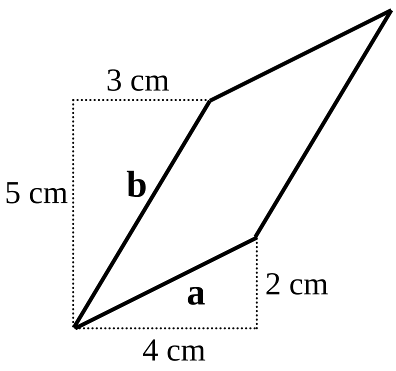
Mathematisch positive Orientierung
(Autos im Kreisverkehr)

Mathematisch negative Orientierung
(Geisterfahrer im Kreisverkehr)

Also: $\sigma_x \sigma_y = -\sigma_y \sigma_x$ $\Rightarrow$ Dies ist eine grundlegende Regel der ***Pauli-Algebra***.
(eigentlich erfunden von Hermann Grassmann)

Geometrisch wird durch das zusätzliche Minuszeichen somit die Umkehrung der Orientierung (also der Drehrichtung) beschrieben, während algebraisch durch das zusätzliche Minuszeichen die Reihenfolgeumkehr der beiden anti-kommutierenden Faktoren beschrieben wird.

Jetzt kann der Flächeninhalt des gegebenen Parallelogramms sehr einfach dadurch ermittelt werden, indem die beiden Vektoren, die das Parallelogramm aufspannen, miteinander multipliziert werden:



Der erste Vektor **a** geht gleichzeitig vier LE (Längeneinheiten) in x-Richtung und 2 LE in y-Richtung:

$\Rightarrow$ $\mathbf{a} = 4\,\sigma_x + 2\,\sigma_y$

Der zweite Vektor **b** geht gleichzeitig drei LE in x-Richtung und 5 LE in y-Richtung:

$\Rightarrow$ $\mathbf{b} = 3\,\sigma_x + 5\,\sigma_y$

Multiplikation der Seitenvektoren des Parallelogramms:

$$\mathbf{a}\,\mathbf{b} = (4\,\sigma_x + 2\,\sigma_y)\,(3\,\sigma_x + 5\,\sigma_y)$$

$$= 4\cdot 3\,\sigma_x^{2} + 4\cdot 5\,\sigma_x\sigma_y + 2\cdot 3\,\sigma_y\sigma_x + 2\cdot 5\,\sigma_y^{2}$$

$$= 12\,\underset{\substack{\uparrow\\ 1}}{\sigma_x^{2}} + 20\,\sigma_x\sigma_y + 6\,\underset{\substack{\uparrow\\ -\,\sigma_x\sigma_y}}{\sigma_y\sigma_x} + 10\,\underset{\substack{\uparrow\\ 1}}{\sigma_y^{2}}$$

$$= 12\cdot 1 + 20\,\sigma_x\sigma_y + 6\,(-\,\sigma_x\sigma_y) + 10\cdot 1$$

$$= 12 + 20\,\sigma_x\sigma_y - 6\,\sigma_x\sigma_y + 10$$

$$= 22 + 14\,\sigma_x\sigma_y$$

Dieser Teil des Produkts, der zwei Basisvektoren aufweist, wird äußeres Produkt der beiden Vektoren **a** und **b** genannt. Für diesen Teil wird in der Mathematik ein ***Keil*** $\wedge$ als Symbol verwendet. Der Betrag des äußeren Produkts gibt den Flächeninhalt |A| des Parallelogramms an:

$\Rightarrow$ $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = 14\,\sigma_x\sigma_y$

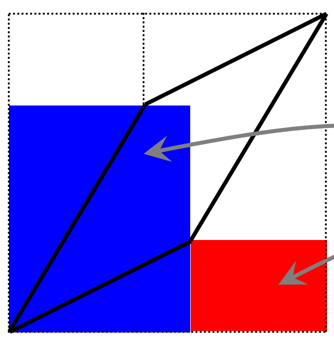
$\Rightarrow$ $|A| = 14$

$\Rightarrow$ Der Flächeninhalt des Parallelogramms beträgt 14 cm^2.

Auch dieser Keil $\wedge$ und die damit beschriebene Algebra ist eine Erfindung. Diese Algebra wird ***Grassmann-Algebra*** genannt. Rechnungen, die nur Keil-Produkte (äußere Produkte) beinhalten, sind Rechnungen, die dieser Grassmann-Algebra folgen.

Bis HIER handelt es sich um die Wiederholung des Lösungsansatzes von Grassmann, den Sie in der Vorlesung kennengelernt haben. Jetzt folgt die Lösung der Übungsaufgabe.

Vergleich der schulischen Lösung mit der Lösung von Grassmann:



$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = 4\,\sigma_x \cdot 5\,\sigma_y - 3\,\sigma_x \cdot 2\,\sigma_y$$

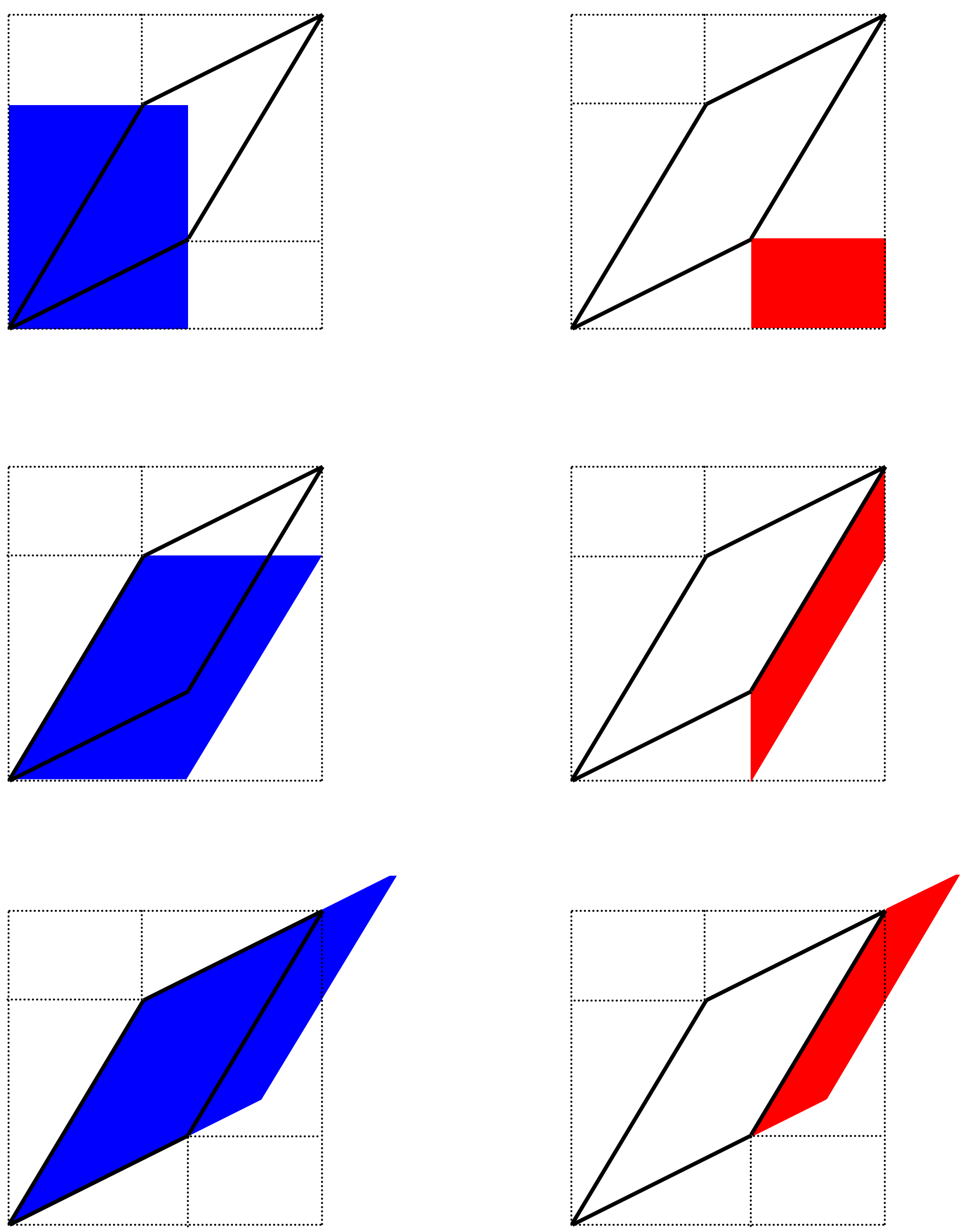
$$= 20\,\sigma_x\sigma_y - 6\,\sigma_x\sigma_y$$

$$= 14\,\sigma_x\sigma_y$$

$4\,\sigma_x \cdot 5\,\sigma_y = 20\,\sigma_x\sigma_y$

$3\,\sigma_x \cdot 2\,\sigma_y = 6\,\sigma_x\sigma_y$

Durch Parallelverschiebung lässt sich zeigen, dass der Flächeninhalt des Parallelogramms der Differenz der blauen und roten Rechteck-Flächen entspricht.



⇒ Wird von der blau markierten Parallelogrammfläche links die rot markierte kleinere Parallelogrammfläche rechts subtrahiert, ergibt sich der Flächeninhalt des ursprünglich gegebenen Parallelogramms. Der Flächeninhalt des Parallelogramms entspricht somit tatsächlich der Differenz der blauen und roten Rechteck-Flächen, die die Grundlage der Grassmannschen Rechnung bilden.

Um diese andere Form der Zerlegung von Parallelogrammen mit Hilfe einer äußeren Algebra mathematisch korrekt und auch algebraisch konsistent zu formulieren, benötigte die Menschheit über 4½ Jahrtausende: von den Anfängen der Mathematik im Zweistromland bis ins Jahr 1844, als Grassmann seine Ausdehnungslehre veröffentlichte und „durch diese Anwendung auch die Algebra eine wesentlich veränderte Gestalt gewinnen“ konnte (Zitat aus Hermann Grassmann: Die Wissenschaft der extensiven Größe oder die Ausdehnungslehre. Erster Theil, die lineale Ausdehnungslehre enthaltend. Verlag von Otto Wigand, Leipzig 1844, S. 71).

Aufgabe 5:

a) $\mathbf{a} = 9\ \sigma_x$
$\mathbf{b} = 3\ \sigma_x + 5\ \sigma_y$

$\mathbf{a\ b} = (9\ \sigma_x)\ (3\ \sigma_x + 5\ \sigma_y)$
$= 27\ \sigma_x^2 + 45\ \sigma_x\sigma_y$
$= 27 + 45\ \sigma_x\sigma_y \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = 45\ \sigma_x\sigma_y$
$\Rightarrow \quad |A| = 45$
$\Rightarrow$ Der Flächeninhalt des Parallelogramms beträgt 45 cm^2.

b) $\mathbf{a} = 4{,}2\ \sigma_x + 1{,}6\ \sigma_y$
$\mathbf{b} = 3{,}2\ \sigma_x + 3{,}9\ \sigma_y$

$\mathbf{a\ b} = (4{,}2\ \sigma_x + 1{,}6\ \sigma_y)\ (3{,}2\ \sigma_x + 3{,}9\ \sigma_y)$
$= 13{,}44\ \sigma_x^2 + 16{,}38\ \sigma_x\sigma_y + 5{,}12\ \sigma_y\sigma_x + 6{,}24\ \sigma_y^2$
$= 13{,}44 + 16{,}38\ \sigma_x\sigma_y - 5{,}12\ \sigma_x\sigma_y + 6{,}24$
$= 19{,}68 + 11{,}26\ \sigma_x\sigma_y \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = 11{,}26\ \sigma_x\sigma_y$
$\Rightarrow \quad |A| = 11{,}26$
$\Rightarrow$ Der Flächeninhalt des Parallelogramms beträgt 11,26 cm^2.

c) $\mathbf{a} = 6\ \sigma_x + 3\ \sigma_y$
$\mathbf{b} = -\ 5\ \sigma_x + 10\ \sigma_y$

$\mathbf{a\ b} = (6\ \sigma_x + 3\ \sigma_y)\ (-\ 5\ \sigma_x + 10\ \sigma_y)$
$= -\ 30\ \sigma_x^2 + 60\ \sigma_x\sigma_y - 15\ \sigma_y\sigma_x + 30\ \sigma_y^2$
$= -\ 30 + 60\ \sigma_x\sigma_y + 15\ \sigma_x\sigma_y + 30$
$= 0 + 75\ \sigma_x\sigma_y$
$= 75\ \sigma_x\sigma_y \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = 75\ \sigma_x\sigma_y$
$\Rightarrow \quad |A| = 75$
$\Rightarrow$ Der Flächeninhalt des Parallelogramms (das hier auch ein Rechteck ist) beträgt 75 cm^2.

d) $\mathbf{a} = 30\ \sigma_x + 15\ \sigma_y$
$\mathbf{b} = -\ 40\ \sigma_x + 25\ \sigma_y$

$\mathbf{a\ b} = (30\ \sigma_x + 15\ \sigma_y)\ (-\ 40\ \sigma_x + 25\ \sigma_y)$
$= -\ 1200\ \sigma_x^2 + 750\ \sigma_x\sigma_y - 600\ \sigma_y\sigma_x + 375\ \sigma_y^2$
$= -\ 1200 + 750\ \sigma_x\sigma_y + 600\ \sigma_x\sigma_y + 375$
$= -\ 825 + 1350\ \sigma_x\sigma_y \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = 1350\ \sigma_x\sigma_y$
$\Rightarrow \quad |A| = 1350$
$\Rightarrow$ Der Flächeninhalt des Parallelogramms beträgt 1350 cm^2.

Aufgabe 9:

a) $$400\left[\frac{1{,}085^{12}-1}{0{,}085}\right] = 7\,819{,}699917 \approx 7\,819{,}6999$$

b) $$400\left[\frac{1-\frac{1}{1{,}085^{12}}}{0{,}085}\right] = 2\,937{,}874428 \approx 2\,937{,}8744$$

Enthält eine Formel einen Doppelbruch, so setzen Sie das Gleichheitszeichen bitte immer in Höhe des Hauptbruchstrichs.

c) $$\frac{400\cdot 1{,}085}{1-\frac{1}{(1+0{,}085)^{12}}} = 695{,}180475 \approx 695{,}1805$$

Wenn die Dezimalziffer, die auf die letzte vorgesehene Dezimalstelle folgt, größer oder gleich 5 ist, dann wird die letzte Dezimalstelle aufgerundet.

d) $$\sqrt[5]{\frac{1{,}56\cdot 10^{8}}{34\cdot(5+\ln 300)}} = 13{,}378939 \approx 13{,}3789$$

e) $$\frac{e^{\left(320\pi-10^{3}\right)}}{\ln\frac{1}{440}} = -\,33{,}232583 \approx -\,33{,}2326$$

f) $$-2{,}95+\log_{10}\left[\frac{1-\frac{3}{5}}{\frac{27}{6}-3}\right] = -\,3{,}524032 \approx -\,3{,}5240$$

Um anzudeuten, dass das Ergebnis auf vier Nachkommastellen genau gerundet ist, wird als vierte Nachkommaziffer eine Null gesetzt.
Das Ergebnis wird somit als $-3{,}5240$ (und nicht $-3{,}524$) geschrieben.

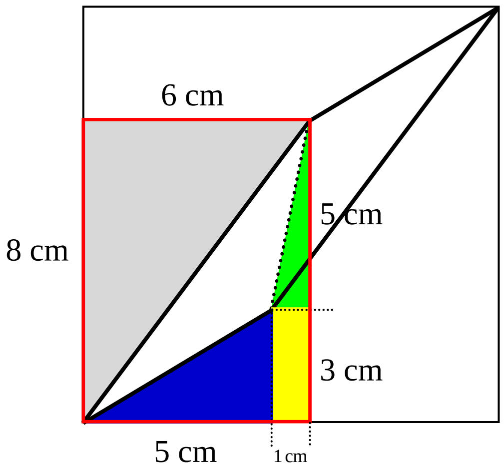
HWR Berlin, Sommersemester 2017

Wirtschaftsmathematik (LV-Nr. 200 601.07)

Ergänzung von Übungsblatt 1 – Lösungen

Aufgabe 1:

a) Lösungsstrategie von Hayate



Wenn nicht das große schwarz umrandete Quadrat, sondern das kleinere rot umrandete Rechteck als Ausgangspunkt einer Flächenzerlegung gewählt wird, kann die Hälfte der Parallelogrammfläche berechnet werden, indem von diesem rot umrandeten Rechteck die Flächen des grauen, des blauen und des grünen Dreiecks sowie die Fläche des gelben Rechtecks subtrahiert werden.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\,A_{\text{parallelogramm}} &= A_{\text{rot umrandetes Rechteck}} - A_{\text{graues Dreieck}} - A_{\text{blaues Dreieck}} - A_{\text{grünes Dreieck}} - A_{\text{gelbes Rechteck}} \\ &= 6\,\text{cm}\cdot 8\,\text{cm} - \frac{1}{2}\cdot 6\,\text{cm}\cdot 8\,\text{cm} - \frac{1}{2}\cdot 5\,\text{cm}\cdot 3\,\text{cm} - \frac{1}{2}\cdot 1\,\text{cm}\cdot 5\,\text{cm} - 1\,\text{cm}\cdot 3\,\text{cm} \\ &= 48\,\text{cm}^2 - 24\,\text{cm}^2 - 7.5\,\text{cm}^2 - 2.5\,\text{cm}^2 - 3\,\text{cm}^2 \\ &= 11\,\text{cm}^2\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\quad A_{\text{parallelogramm}} = 2\cdot 11\,\text{cm}^2 = 22\,\text{cm}^2$$

b) Lösungsstrategie von Grassmann:

$$\mathbf{a} = 5\,\sigma_x + 3\,\sigma_y$$

$$\mathbf{b} = 6\,\sigma_x + 8\,\sigma_y$$

$$\begin{aligned}\mathbf{a\,b} &= (5\,\sigma_x + 3\,\sigma_y)\,(6\,\sigma_x + 8\,\sigma_y) \\ &= 5\cdot 6\,\sigma_x^2 + 5\cdot 8\,\sigma_x\sigma_y + 3\cdot 6\,\sigma_y\sigma_x + 3\cdot 8\,\sigma_y^2 \\ &= 30\,\sigma_x^2 + 40\,\sigma_x\sigma_y + 18\,\sigma_y\sigma_x + 24\,\sigma_y^2\end{aligned}$$

$= 30 \cdot 1 + 40\, \sigma_x\sigma_y + 18\, (-\, \sigma_x\sigma_y) + 24 \cdot 1$

$= 30 + 40\, \sigma_x\sigma_y - 18\, \sigma_x\sigma_y + 24$

$= 54 + (40 - 18)\, \sigma_x\sigma_y$

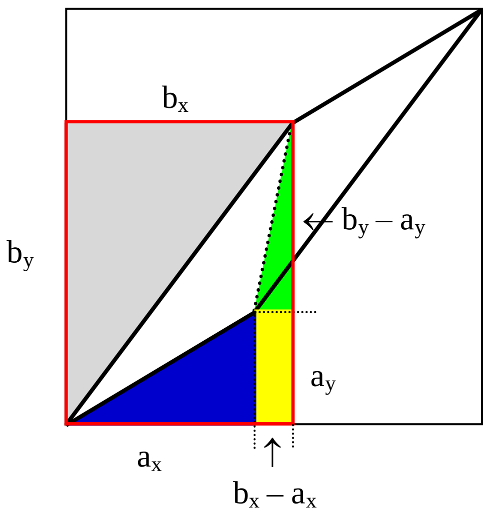
$= 54 + 22\, \sigma_x\sigma_y \qquad \Rightarrow \quad \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = 22\, \sigma_x\sigma_y$

$\Rightarrow \quad |\mathbf{A}| = |\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}| = 22$

$\Rightarrow$ Der Flächeninhalt des Parallelogramms beträgt 22 cm^2.

Aufgabe 2:

Verallgemeinerung von Aufgabenstellung 1: Ein Parallelogramm mit beliebigen Seitenlängen



$$\frac{1}{2}\, A_{\text{parallelogramm}} = A_{\text{rot umrandetes Rechteck}} - A_{\text{graues Dreieck}} - A_{\text{blaues Dreieck}} - A_{\text{grünes Dreieck}} - A_{\text{gelbes Rechteck}}$$

$$= b_x\, b_y - \frac{1}{2}\, b_x\, b_y - \frac{1}{2}\, a_x\, a_y - \frac{1}{2}\, (b_x - a_x)\, (b_y - a_y) - (b_x - a_x)\, a_y$$

$$= \frac{1}{2}\, b_x\, b_y - \frac{1}{2}\, a_x\, a_y - \frac{1}{2}\, (b_x - a_x)\, (b_y - a_y) - (b_x - a_x)\, a_y$$

$$\Rightarrow \quad A_{\text{parallelogramm}} = b_x\, b_y - a_x\, a_y - (b_x - a_x)\, (b_y - a_y) - 2\, (b_x - a_x)\, a_y$$

$$= b_x\, b_y - a_x\, a_y - (b_x\, b_y - b_x\, a_y - a_x\, b_y + a_x\, a_y) - 2\, b_x\, a_y + 2\, a_x\, a_y$$

$$= b_x\, b_y - a_x\, a_y - b_x\, b_y + b_x\, a_y + a_x\, b_y - a_x\, a_y - 2\, b_x\, a_y + 2\, a_x\, a_y$$

$$= b_x\, a_y + a_x\, b_y - 2\, b_x\, a_y$$

$$= a_x\, b_y - a_y\, b_x$$ QED (quod erat demonstrandum; was zu zeigen war)

HWR Berlin, Sommersemester 2017

Wirtschaftsmathematik (LV-Nr. 200 601.07)

Übungsblatt 3 – Lösungen

Aufgabe 1:

a) Marktgleichgewicht:

$$p_G = x_G + 15 = -2\,x_G + 60$$

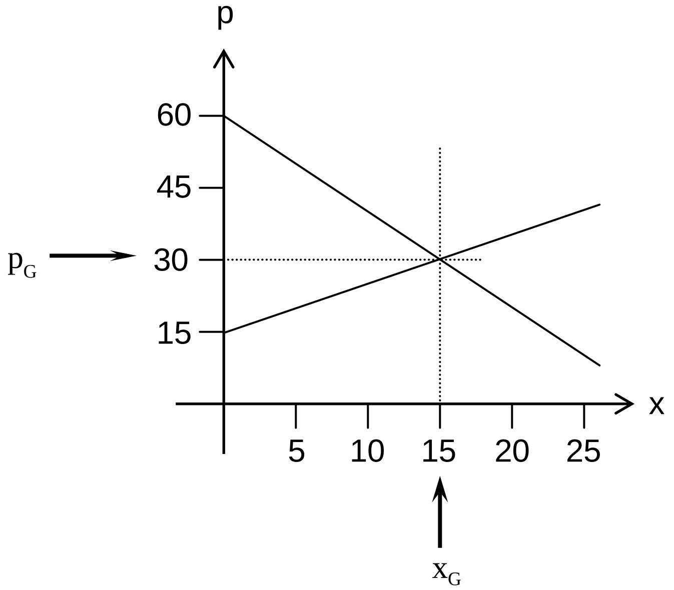
$$3\,x_G = 45$$

$$x_G = 15 \qquad \text{(Gleichgewichtsmenge)}$$

$p_G = 15 + 15$ oder $p_G = -2 \cdot 15 + 60$

$p_G = 30$ $\qquad p_G = -30 + 60 = 30$ (Gleichgewichtspreis)

b) Graphische Lösung:



c) Angebot: $p = x + 15 \;\Rightarrow\; x - p = -15 \;\Rightarrow\; \mathbf{1}\,x - \mathbf{1}\,p = -\mathbf{15}$

Nachfrage: $p = -2\,x + 60 \;\Rightarrow\; 2\,x + p = 60 \;\Rightarrow\; \mathbf{2}\,x + \mathbf{1}\,p = \mathbf{60}$

System zweier Linearer Gleichungen

Koeffizientenvektoren: $\mathbf{a} = \mathbf{1}\,\sigma_x + \mathbf{2}\,\sigma_y = \sigma_x + 2\,\sigma_y$

$\mathbf{b} = -\mathbf{1}\,\sigma_x + \mathbf{1}\,\sigma_y = -\sigma_x + \sigma_y$

Ergebnisvektor: $\mathbf{r} = -\mathbf{15}\,\sigma_x + \mathbf{60}\,\sigma_y = -15\,\sigma_x + 60\,\sigma_y$

Das folgende System aus zwei Linearen Gleichungen muss gelöst werden:

$$\mathbf{a}\,x + \mathbf{b}\,p = \mathbf{r}$$

Äußere Produkte: $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \sigma_x\sigma_y - 2\,\sigma_y\sigma_x = \sigma_x\sigma_y + 2\,\sigma_x\sigma_y = 3\,\sigma_x\sigma_y$

$\mathbf{r} \wedge \mathbf{b} = -15\,\sigma_x\sigma_y - 60\,\sigma_y\sigma_x = -15\,\sigma_x\sigma_y + 60\,\sigma_x\sigma_y = 45\,\sigma_x\sigma_y$

$\mathbf{a} \wedge \mathbf{r} = 60\,\sigma_x\sigma_y - 30\,\sigma_y\sigma_x = 60\,\sigma_x\sigma_y + 30\,\sigma_x\sigma_y = 90\,\sigma_x\sigma_y$

Lösungen: $x_G = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{r} \wedge \mathbf{b}) = \frac{45}{3} = 15$ (Gleichgewichtsmenge)

$p_G = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{a} \wedge \mathbf{r}) = \frac{90}{3} = 30$ (Gleichgewichtspreis)

Aufgabe 2:

a) Marktgleichgewicht: $p_G = 3\,x_G + 40 = -x_G + 120$

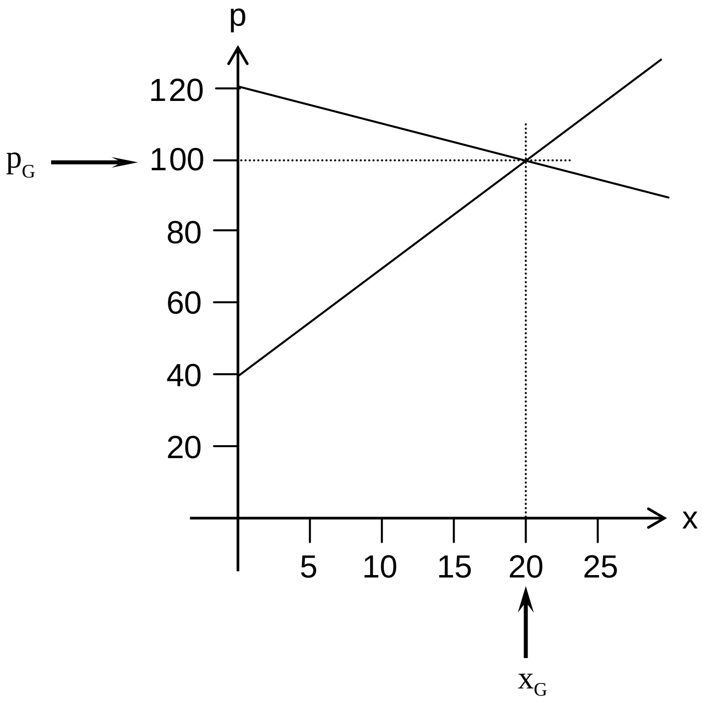
$4\,x_G = 80$

$x_G = 20$ (Gleichgewichtsmenge)

$p_G = 3 \cdot 20 + 40$ oder $p_G = -20 + 120$

$p_G = 60 + 40 = 100$ $\qquad p_G = 100$ (Gleichgewichtspreis)

Graphische Lösung:



b) Marktgleichgewicht: $p_G = 3\,x_G + 20 = -\frac{1}{2}\,x_G + 90$

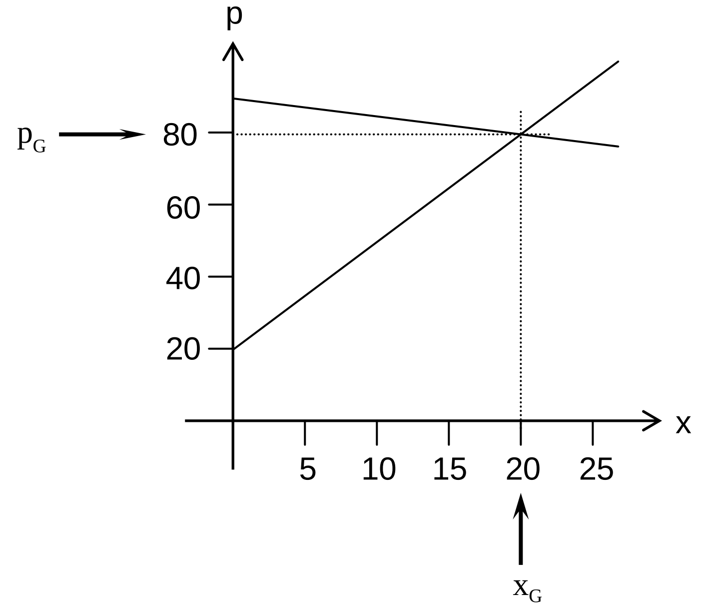
$3{,}5\,x_G = 70$

$x_G = 20$ (Gleichgewichtsmenge)

$p_G = 3 \cdot 20 + 20$ oder $p_G = -\frac{1}{2} \cdot 20 + 90$

$p_G = 60 + 20 = 80$ $\qquad p_G = -10 + 90 = 80$ (Gleichgewichtspreis)

Graphische Lösung:



c) Marktgleichgewicht: $p_G = \frac{1}{4} x_G + 400 = -\frac{1}{2} x_G + 1000$

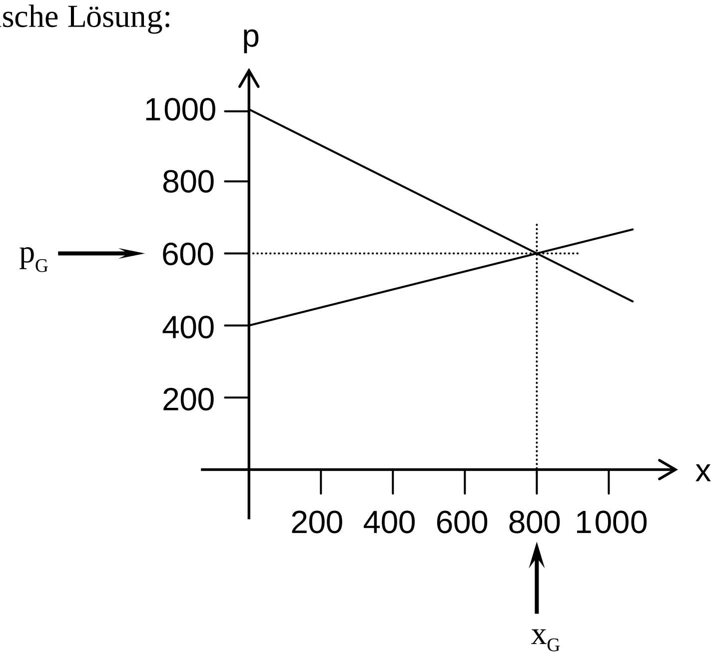
$$0{,}75\, x_G = 600$$

$$x_G = 800 \quad \text{(Gleichgewichtsmenge)}$$

$p_G = \frac{1}{4} \cdot 800 + 400$ oder $p_G = -\frac{1}{2} \cdot 800 + 1000$

$p_G = 200 + 400 = 600$ $p_G = -400 + 1000 = 600$ (Gleichgewichtspreis)

Graphische Lösung:



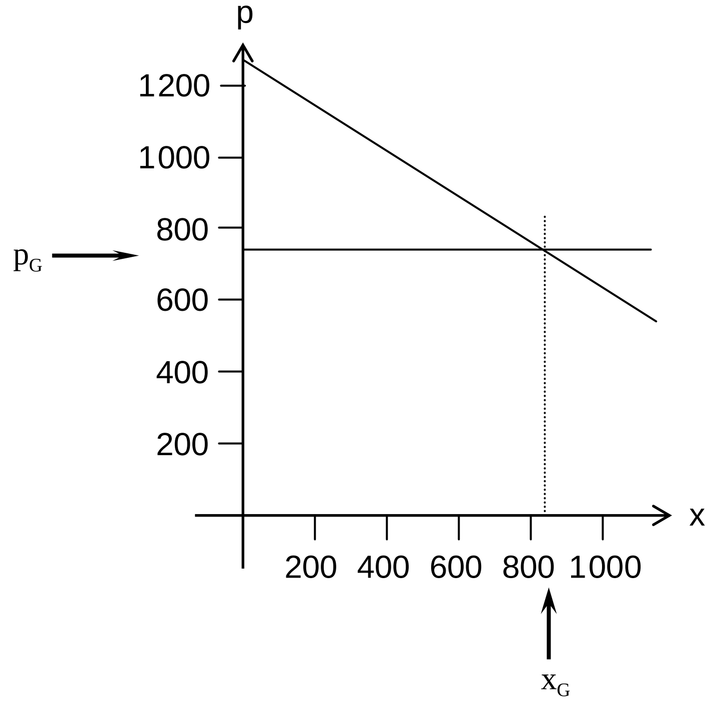
d) Marktgleichgewicht: $p_G = 750 = -\frac{5}{8} x_G + 1270$

$$0{,}625\, x_e = 520$$

$$x_G = 832 \quad \text{(Gleichgewichtsmenge)}$$

$$p_G = 750 \qquad \text{oder} \qquad p_G = -\frac{5}{8} \cdot 832 + 1270 = 750 \quad \text{(Gleichgewichtspreis)}$$

Graphische Lösung:



Aufgabe 3:

Die Angebots- und Nachfragefunktionen bilden ein System zweier Linearer Gleichungen.

(2a) Angebot: $p = 3x + 40 \quad \Rightarrow \quad 3x - p = -40 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{3}\, x - \mathbf{1}\, p = \mathbf{-40}$

Nachfrage: $p = -x + 120 \quad \Rightarrow \quad x + p = 120 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{1}\, x + \mathbf{1}\, p = \mathbf{120}$

Paulivektoren:

$$\mathbf{a} = \mathbf{3}\, \sigma_x + \mathbf{1}\, \sigma_y = 3\, \sigma_x + \sigma_y$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{-1}\, \sigma_x + \mathbf{1}\, \sigma_y = -\sigma_x + \sigma_y$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{-40}\, \sigma_x + \mathbf{120}\, \sigma_y = -40\, \sigma_x + 120\, \sigma_y$$

Äußere Produkte:

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = 3\, \sigma_x\sigma_y - \sigma_y\sigma_x = 3\, \sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_y = 4\, \sigma_x\sigma_y$$

$$\mathbf{r} \wedge \mathbf{b} = -40\, \sigma_x\sigma_y - 120\, \sigma_y\sigma_x = -40\, \sigma_x\sigma_y + 120\, \sigma_x\sigma_y = 80\, \sigma_x\sigma_y$$

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{r} = 360\, \sigma_x\sigma_y - 40\, \sigma_y\sigma_x = 360\, \sigma_x\sigma_y + 40\, \sigma_x\sigma_y = 400\, \sigma_x\sigma_y$$

Lösungen:

$$x_G = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1} (\mathbf{r} \wedge \mathbf{b}) = \frac{80}{4} = 20 \qquad \text{(Gleichgewichtsmenge)}$$

$$p_G = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1} (\mathbf{a} \wedge \mathbf{r}) = \frac{400}{4} = 100 \qquad \text{(Gleichgewichtspreis)}$$

(2b) Angebot: $p = 3x + 20 \quad \Rightarrow \quad 3x - p = -20 \quad \Rightarrow \quad 3x - 1p = -20$

Nachfrage: $p = -\frac{1}{2}x + 90 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}x + p = 90 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}x + 1p = 90$

Paulivektoren: $\mathbf{a} = 3\,\sigma_x + 0{,}5\,\sigma_y$

$\mathbf{b} = -\sigma_x + \sigma_y$

$\mathbf{r} = -20\,\sigma_x + 90\,\sigma_y$

Äußere Produkte: $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = 3\,\sigma_x\sigma_y - 0{,}5\,\sigma_y\sigma_x = 3\,\sigma_x\sigma_y + 0{,}5\sigma_x\sigma_y = 3{,}5\,\sigma_x\sigma_y$

$\mathbf{r} \wedge \mathbf{b} = -20\,\sigma_x\sigma_y - 90\,\sigma_y\sigma_x = -20\,\sigma_x\sigma_y + 90\,\sigma_x\sigma_y = 70\,\sigma_x\sigma_y$

$\mathbf{a} \wedge \mathbf{r} = 270\,\sigma_x\sigma_y - 10\,\sigma_y\sigma_x = 270\,\sigma_x\sigma_y + 10\,\sigma_x\sigma_y = 280\,\sigma_x\sigma_y$

Lösungen: $x_G = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{r} \wedge \mathbf{b}) = \frac{70}{3{,}5} = 20$ (Gleichgewichtmenge)

$p_G = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{a} \wedge \mathbf{r}) = \frac{280}{3{,}5} = 80$ (Gleichgewichtspreis)

(2c) Angebot: $p = \frac{1}{4}x + 400 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{4}x - p = -400 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{4}x - 1p = -400$

Nachfrage: $p = -\frac{1}{2}x + 1000 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}x + p = 1000 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}x + 1p = 1000$

Paulivektoren: $\mathbf{a} = 0{,}25\,\sigma_x + 0{,}5\,\sigma_y$

$\mathbf{b} = -\sigma_x + \sigma_y$

$\mathbf{r} = -400\,\sigma_x + 1000\,\sigma_y$

Äußere Produkte: $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = 0{,}25\,\sigma_x\sigma_y - 0{,}5\,\sigma_y\sigma_x = 0{,}25\,\sigma_x\sigma_y + 0{,}5\sigma_x\sigma_y = 0{,}75\,\sigma_x\sigma_y$

$\mathbf{r} \wedge \mathbf{b} = -400\,\sigma_x\sigma_y - 1000\,\sigma_y\sigma_x = -400\,\sigma_x\sigma_y + 1000\,\sigma_x\sigma_y = 600\,\sigma_x\sigma_y$

$\mathbf{a} \wedge \mathbf{r} = 250\,\sigma_x\sigma_y - 200\,\sigma_y\sigma_x = 250\,\sigma_x\sigma_y + 200\,\sigma_x\sigma_y = 450\,\sigma_x\sigma_y$

Lösungen: $x_G = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{r} \wedge \mathbf{b}) = \frac{600}{0{,}75} = 800$ (Gleichgewichtsmenge)

$p_G = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{a} \wedge \mathbf{r}) = \frac{450}{0{,}75} = 600$ (Gleichgewichtspreis)

(2d) Angebot: $p = 750 \quad \Rightarrow \quad p = 750 \quad \Rightarrow \quad 0x + 1p = 750$

Nachfrage: $p = -\frac{5}{8}x + 1270 \quad \Rightarrow \quad \frac{5}{8}x + p = 1270 \quad \Rightarrow \quad \frac{5}{8}x + 1p = 1270$

Paulivektoren: $\mathbf{a} = 0\,\sigma_x + 0{,}625\,\sigma_y = 0{,}625\,\sigma_y$

$\mathbf{b} = \sigma_x + \sigma_y$

$\mathbf{r} = 750\,\sigma_x + 1270\,\sigma_y$

Äußere Produkte: $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = 0{,}625\ \sigma_y\sigma_x = -\,0{,}625\ \sigma_x\sigma_y$

$\mathbf{r} \wedge \mathbf{b} = 750\ \sigma_x\sigma_y + 1270\ \sigma_y\sigma_x = 750\ \sigma_x\sigma_y - 1270\ \sigma_x\sigma_y = -\,520\ \sigma_x\sigma_y$

$\mathbf{a} \wedge \mathbf{r} = 468{,}75\ \sigma_y\sigma_x = -\,468{,}75\ \sigma_x\sigma_y$

Lösungen: $x_G = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\ (\mathbf{r} \wedge \mathbf{b}) = \dfrac{-520}{-0{,}625} = 832$ (Gleichgewichtsmenge)

$p_G = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\ (\mathbf{a} \wedge \mathbf{r}) = \dfrac{-468{,}75}{-0{,}625} = 750$ (Gleichgewichtspreis)

Aufgabe 4:

a) Marktgleichgewicht: $x_G = \frac{1}{3} p_G - 4 = -2\, p_G + 206$

$$\frac{1}{3} p_G = -2\, p_G + 210$$

$$\frac{7}{3} p_G = 210$$

$$p_G = 90$$ (Gleichgewichtspreis)

$x_G = \frac{1}{3} \cdot 90 - 4$ oder $x_G = -2 \cdot 90 + 206$

$x_G = 30 - 4 = 26$ $\quad x_G = -180 + 206 = 26$ (Gleichgewichtsmenge)

b) Marktgleichgewicht: $x_G = \frac{2}{5} (p_G - 80) = 319 - \frac{5}{7} p_G$

$$\frac{2}{5} p_G - 32 = 319 - \frac{5}{7} p_G$$

$$\frac{14+25}{35} p_G = 351$$

$$p_G = 351 \cdot \frac{35}{39} = 315$$ (Gleichgewichtspreis)

$x_G = \frac{2}{5} (315 - 80)$ oder $x_G = 319 - \frac{5}{7} \cdot 315$

$x_G = \frac{2}{5} \cdot 235 = 94$ $\quad x_G = 319 - 225 = 94$ (Gleichgewichtsmenge)

Aufgabe 5:

Die Angebots- und Nachfragefunktionen bilden ein System zweier Linearer Gleichungen.

a) Angebot: $x = \frac{1}{3} p - 4 \quad \Rightarrow \quad x - \frac{1}{3} p = -4$

Nachfrage: $x = -2\, p + 206 \quad \Rightarrow \quad x + 2\, p = 206$

Paulivektoren: $\mathbf{a} = \sigma_x + \sigma_y$

$\mathbf{b} = -\frac{1}{3}\,\sigma_x + 2\,\sigma_y$

$\mathbf{r} = -4\,\sigma_x + 206\,\sigma_y$

Äußere Produkte: $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \left(2 + \frac{1}{3}\right)\sigma_x\sigma_y = \frac{7}{3}\,\sigma_x\sigma_y$

$\mathbf{r} \wedge \mathbf{b} = \left(-\ 8 + \frac{206}{3}\right)\sigma_x\sigma_y = \frac{182}{3}\,\sigma_x\sigma_y$

$\mathbf{a} \wedge \mathbf{r} = (206 + 4)\,\sigma_x\sigma_y = 210\,\sigma_x\sigma_y$

Lösungen: $x_G = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{r} \wedge \mathbf{b}) = \dfrac{\frac{182}{3}}{\frac{7}{3}} = \frac{182}{3}\cdot\frac{3}{7} = \frac{182}{7} = 26$ (Gleichgewichtsmenge)

$p_G = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{a} \wedge \mathbf{r}) = \dfrac{210}{\frac{7}{3}} = 210\cdot\frac{3}{7} = 90$ (Gleichgewichtspreis)

b) Angebot: $x = \frac{2}{5}(p - 80) = \frac{2}{5}\,p - 32 \quad \Rightarrow \quad x - \frac{2}{5}\,p = -32$

Nachfrage: $x = 319 - \frac{5}{7}\,p \quad \Rightarrow \quad x + \frac{5}{7}\,p = 319$

Paulivektoren: $\mathbf{a} = \sigma_x + \sigma_y$

$\mathbf{b} = -\frac{2}{5}\,\sigma_x + \frac{5}{7}\,\sigma_y$

$\mathbf{r} = -32\,\sigma_x + 319\,\sigma_y$

Äußere Produkte: $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \left(\frac{5}{7} + \frac{2}{5}\right)\sigma_x\sigma_y = \frac{39}{35}\,\sigma_x\sigma_y$

$\mathbf{r} \wedge \mathbf{b} = \left(-\frac{160}{7} + \frac{638}{5}\right)\sigma_x\sigma_y = \frac{3666}{35}\,\sigma_x\sigma_y$

$\mathbf{a} \wedge \mathbf{r} = (319 + 32)\,\sigma_x\sigma_y = 351\,\sigma_x\sigma_y$

Lösungen: $x_G = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{r} \wedge \mathbf{b}) = \dfrac{\frac{3666}{35}}{\frac{39}{35}} = \frac{3666}{35}\cdot\frac{35}{39} = \frac{3666}{39} = 94$ (Gleichgewichtsmenge)

$p_G = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{a} \wedge \mathbf{r}) = \dfrac{351}{\frac{39}{35}} = 351\cdot\frac{35}{39} = 315$ (Gleichgewichtspreis)

HWR Berlin, Sommersemester 2017

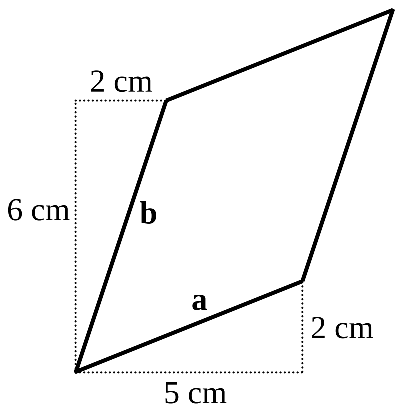
Wirtschaftsmathematik (LV-Nr. 200 601.07)

Übungsblatt 8 – Lösungen

Aufgabe 1:

a) $\mathbf{a} = 5\,\sigma_x + 2\,\sigma_y$
$\mathbf{b} = 2\,\sigma_x + 6\,\sigma_y$

Skizze:



$$
\begin{aligned}
\mathbf{a}\,\mathbf{b} &= (5\,\sigma_x + 2\,\sigma_y)\,(2\,\sigma_x + 6\,\sigma_y) \\
&= 5 \cdot 2\,\sigma_x^2 + 5 \cdot 6\,\sigma_x\sigma_y + 2 \cdot 2\,\sigma_y\sigma_x + 2 \cdot 6\,\sigma_y^2 \\
&= 10\,\sigma_x^2 + 30\,\sigma_x\sigma_y + 4\,\sigma_y\sigma_x + 12\,\sigma_y^2 \\
&= 10 \cdot 1 + 30\,\sigma_x\sigma_y + 4\,(-\,\sigma_x\sigma_y) + 12 \cdot 1 \\
&= 10 + 30\,\sigma_x\sigma_y - 4\,\sigma_x\sigma_y + 12 \\
&= 22 + 26\,\sigma_x\sigma_y
\end{aligned}
$$

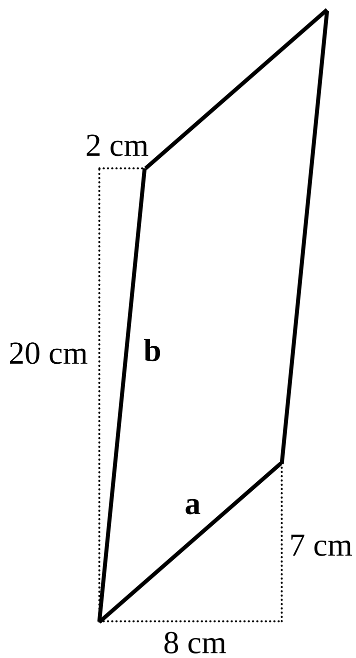
$\Rightarrow$ $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = 26\,\sigma_x\sigma_y$

$\Rightarrow$ $|A| = 26$

$\Rightarrow$ Der Flächeninhalt des Parallelogramms beträgt 26 cm^2.

b) $\mathbf{a} = 8\,\sigma_x + 7\,\sigma_y$
$\mathbf{b} = 2\,\sigma_x + 20\,\sigma_y$

Skizze:



$$
\begin{aligned}
\mathbf{a}\,\mathbf{b} &= (8\,\sigma_x + 7\,\sigma_y)\,(2\,\sigma_x + 20\,\sigma_y) \\
&= 8 \cdot 2\,\sigma_x^2 + 8 \cdot 20\,\sigma_x\sigma_y + 7 \cdot 2\,\sigma_y\sigma_x + 7 \cdot 20\,\sigma_y^2 \\
&= 16\,\sigma_x^2 + 160\,\sigma_x\sigma_y + 14\,\sigma_y\sigma_x + 140\,\sigma_y^2 \\
&= 16 \cdot 1 + 160\,\sigma_x\sigma_y + 14\,(-\,\sigma_x\sigma_y) + 140 \cdot 1 \\
&= 16 + 160\,\sigma_x\sigma_y - 14\,\sigma_x\sigma_y + 140 \\
&= 156 + 146\,\sigma_x\sigma_y
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = 146\,\sigma_x\sigma_y$

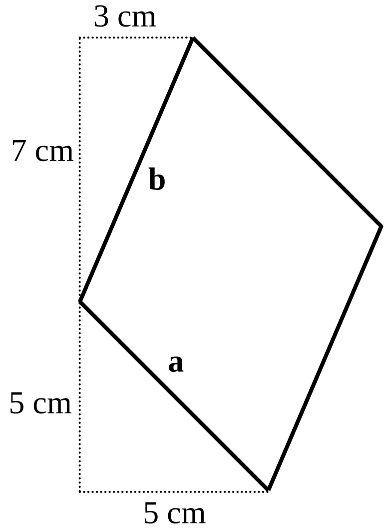
$\Rightarrow$ $|A| = 146$

$\Rightarrow$ Der Flächeninhalt des Parallelogramms beträgt 146 cm^2.

c) $\mathbf{a} = 5\,\sigma_x - 5\,\sigma_y$

$\mathbf{b} = 3\,\sigma_x + 7\,\sigma_y$

Skizze:



$$\begin{aligned}\mathbf{a}\,\mathbf{b} &= (5\,\sigma_x - 5\,\sigma_y)\,(3\,\sigma_x + 7\,\sigma_y)\\ &= 5\cdot 3\,\sigma_x^2 + 5\cdot 7\,\sigma_x\sigma_y - 5\cdot 3\,\sigma_y\sigma_x - 5\cdot 7\,\sigma_y^2\\ &= 15\,\sigma_x^2 + 35\,\sigma_x\sigma_y - 15\,\sigma_y\sigma_x - 35\,\sigma_y^2\\ &= 15\cdot 1 + 35\,\sigma_x\sigma_y - 15\,(-\sigma_x\sigma_y) - 35\cdot 1\\ &= 15 + 35\,\sigma_x\sigma_y + 15\,\sigma_x\sigma_y - 35\\ &= -20 + 50\,\sigma_x\sigma_y\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = 50\,\sigma_x\sigma_y$

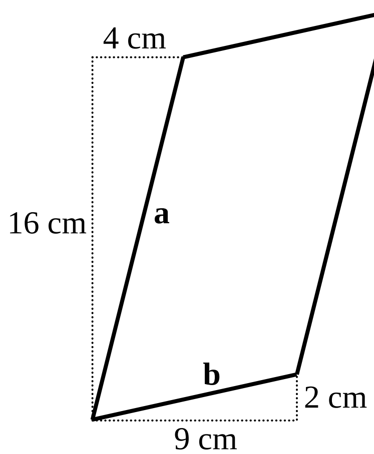
$\Rightarrow$ $|A| = 50$

$\Rightarrow$ Der Flächeninhalt des Parallelogramms beträgt 50 cm^2.

d) $\mathbf{a} = 4\,\sigma_x + 16\,\sigma_y$

$\mathbf{b} = 9\,\sigma_x + 2\,\sigma_y$

Skizze:



$$\begin{aligned}\mathbf{a}\,\mathbf{b} &= (4\,\sigma_x + 16\,\sigma_y)\,(9\,\sigma_x + 2\,\sigma_y)\\ &= 4\cdot 9\,\sigma_x^2 + 4\cdot 2\,\sigma_x\sigma_y + 16\cdot 9\,\sigma_y\sigma_x + 16\cdot 2\,\sigma_y^2\\ &= 36\,\sigma_x^2 + 8\,\sigma_x\sigma_y + 144\,\sigma_y\sigma_x + 32\,\sigma_y^2\\ &= 36\cdot 1 + 8\,\sigma_x\sigma_y + 144\,(-\sigma_x\sigma_y) + 32\cdot 1\\ &= 36 + 8\,\sigma_x\sigma_y - 144\,\sigma_x\sigma_y + 32\\ &= 68 - 136\,\sigma_x\sigma_y\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = -136\,\sigma_x\sigma_y$

$\Rightarrow$ $|A| = 136$

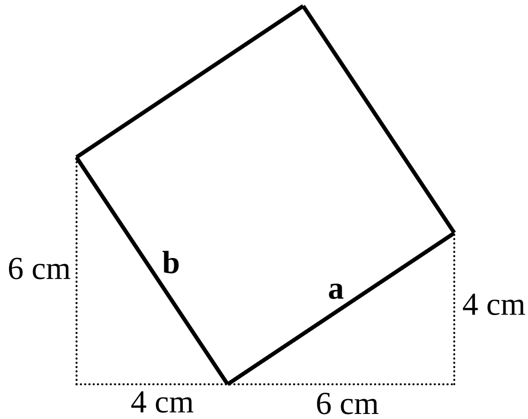
$\Rightarrow$ Der Flächeninhalt des Parallelogramms beträgt 136 cm^2.

Aufgabe 2:

a) $\mathbf{a} = 6\,\sigma_x + 4\,\sigma_y$

$\mathbf{b} = -4\,\sigma_x + 6\,\sigma_y$

Skizze:



$$\begin{aligned}\mathbf{a}\,\mathbf{b} &= (6\,\sigma_x + 4\,\sigma_y)\,(-4\,\sigma_x + 6\,\sigma_y)\\ &= 6\cdot(-4)\,\sigma_x^2 + 6\cdot 6\,\sigma_x\sigma_y + 4\cdot(-4)\,\sigma_y\sigma_x + 4\cdot 6\,\sigma_y^2\\ &= -24\,\sigma_x^2 + 36\,\sigma_x\sigma_y - 16\,\sigma_y\sigma_x + 24\,\sigma_y^2\\ &= -24\cdot 1 + 36\,\sigma_x\sigma_y - 16\,(-\sigma_x\sigma_y) + 24\cdot 1\\ &= -24 + 36\,\sigma_x\sigma_y + 16\,\sigma_x\sigma_y + 24\\ &= 0 + 52\,\sigma_x\sigma_y\\ &= 52\,\sigma_x\sigma_y\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = 52\, \sigma_x\sigma_y$

$\Rightarrow$ $|A| = 52$

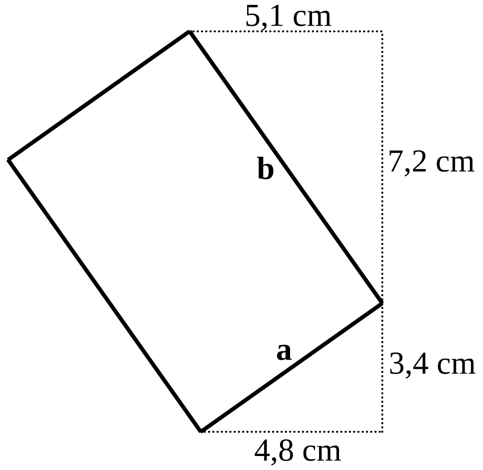
$\Rightarrow$ Der Flächeninhalt des Parallelogramms beträgt 52 cm^2.

Es handelt sich um ein Quadrat, da alle Seiten gleich lang sind und senkrecht aufeinander stehen.

b) $\mathbf{a} = -\,4{,}8\, \sigma_x - 3{,}4\, \sigma_y$
$\mathbf{b} = -\,5{,}1\, \sigma_x + 7{,}2\, \sigma_y$

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}\,\mathbf{b} &= (-\,4{,}8\, \sigma_x - 3{,}4\, \sigma_y)\,(-\,5{,}1\, \sigma_x + 7{,}2\, \sigma_y)\\
&= -\,4{,}8 \cdot (-\,5{,}1)\, \sigma_x^2 - 4{,}8 \cdot 7{,}2\, \sigma_x\sigma_y - 3{,}4 \cdot (-\,5{,}1)\, \sigma_y\sigma_x - 3{,}4 \cdot 7{,}2\, \sigma_y^2\\
&= 24{,}48\, \sigma_x^2 - 34{,}56\, \sigma_x\sigma_y + 17{,}34\, \sigma_y\sigma_x - 24{,}48\, \sigma_y^2\\
&= 24{,}48 \cdot 1 - 34{,}56\, \sigma_x\sigma_y + 17{,}34\,(-\, \sigma_x\sigma_y) - 24{,}48 \cdot 1\\
&= 24{,}48 - 34{,}36\, \sigma_x\sigma_y - 17{,}34\, \sigma_x\sigma_y - 24{,}48\\
&= 0 - 51{,}90\, \sigma_x\sigma_y\\
&= -\,51{,}90\, \sigma_x\sigma_y
\end{aligned}$$

Skizze:



$\Rightarrow$ $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = -\,51{,}90\, \sigma_x\sigma_y$

$\Rightarrow$ $|A| = 51{,}90$

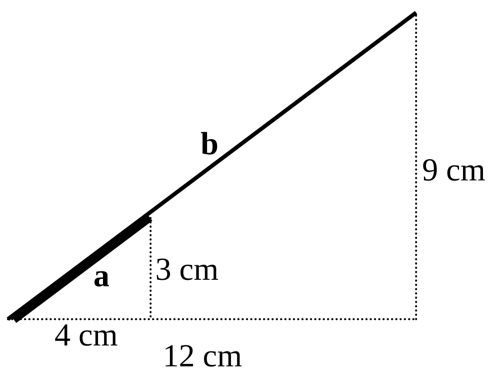
$\Rightarrow$ Der Flächeninhalt des Parallelogramms beträgt 51,90 cm^2.

Es handelt sich um ein Rechteck, da die Seiten senkrecht aufeinander stehen.

c) $\mathbf{a} = 4\, \sigma_x + 3\, \sigma_y$
$\mathbf{b} = 12\, \sigma_x + 9\, \sigma_y$

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}\,\mathbf{b} &= (4\, \sigma_x + 3\, \sigma_y)\,(12\, \sigma_x + 9\, \sigma_y)\\
&= 4 \cdot 12\, \sigma_x^2 + 4 \cdot 9\, \sigma_x\sigma_y + 3 \cdot 12\, \sigma_y\sigma_x + 3 \cdot 9\, \sigma_y^2\\
&= 48\, \sigma_x^2 + 36\, \sigma_x\sigma_y + 36\, \sigma_y\sigma_x + 27\, \sigma_y^2\\
&= 48 \cdot 1 + 36\, \sigma_x\sigma_y + 36\,(-\, \sigma_x\sigma_y) + 27 \cdot 1\\
&= 48 + 36\, \sigma_x\sigma_y - 36\, \sigma_x\sigma_y + 27\\
&= 75 + 0\, \sigma_x\sigma_y\\
&= 75
\end{aligned}$$

Skizze:



$\Rightarrow$ $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = 0\, \sigma_x\sigma_y = 0$

$\Rightarrow$ $|A| = 0$

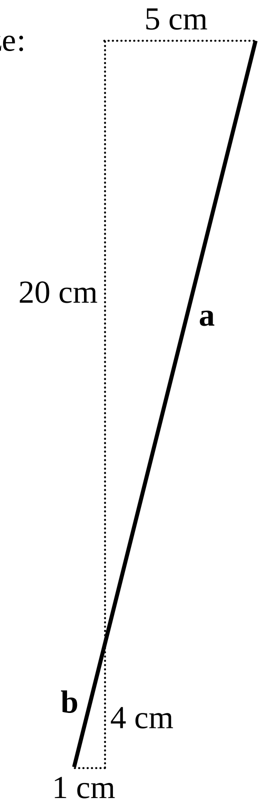
$\Rightarrow$ Der Flächeninhalt des Parallelogramms beträgt 0 cm^2.

Es kann kein Parallelogramm aufgespannt werden, da nicht nur gegenüber liegende Seiten, sondern auch benachbarte Seiten parallel zueinander verlaufen.

d) $\mathbf{a} = 5\,\sigma_x + 20\,\sigma_y$

$\mathbf{b} = -\sigma_x - 4\,\sigma_y$

Skizze:



$$
\begin{aligned}
\mathbf{a}\,\mathbf{b} &= (5\,\sigma_x + 20\,\sigma_y)\,(-\sigma_x - 4\,\sigma_y) \\
&= 5 \cdot (-1)\,\sigma_x^2 + 5 \cdot (-4)\,\sigma_x\sigma_y + 20 \cdot (-1)\,\sigma_y\sigma_x + 20 \cdot (-4)\,\sigma_y^2 \\
&= -5\,\sigma_x^2 + -20\,\sigma_x\sigma_y - 20\,\sigma_y\sigma_x - 80\,\sigma_y^2 \\
&= -5 \cdot 1 - 20\,\sigma_x\sigma_y - 20\,(-\sigma_x\sigma_y) - 80 \cdot 1 \\
&= -5 - 20\,\sigma_x\sigma_y + 20\,\sigma_x\sigma_y - 80 \\
&= -85 + 0\,\sigma_x\sigma_y \\
&= -85
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = 0\,\sigma_x\sigma_y = 0$

$\Rightarrow$ $|A| = 0$

$\Rightarrow$ Der Flächeninhalt des Parallelogramms beträgt 0 cm^2.

Es kann kein Parallelogramm aufgespannt werden, da benachbarte Seiten parallel zueinander verlaufen.

Aufgabe 3:

a) $3\,x + 8\,y = 28$
$6\,x + 2\,y = 28$ $\Rightarrow$ $\mathbf{a} = 3\,\sigma_x + 6\,\sigma_y$

$\mathbf{b} = 8\,\sigma_x + 2\,\sigma_y$

$\mathbf{r} = 28\,\sigma_x + 28\,\sigma_y$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow\quad \mathbf{a}\,\mathbf{b} &= (3\,\sigma_x + 6\,\sigma_y)\,(8\,\sigma_x + 2\,\sigma_y) \\
&= 24\,\sigma_x^2 + 6\,\sigma_x\sigma_y + 48\,\sigma_y\sigma_x + 12\,\sigma_y^2 \\
&= 36 - 42\,\sigma_x\sigma_y
\end{aligned}
$$

$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = -42\,\sigma_x\sigma_y$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow\quad \mathbf{r}\,\mathbf{b} &= (28\,\sigma_x + 28\,\sigma_y)\,(8\,\sigma_x + 2\,\sigma_y) \\
&= 224\,\sigma_x^2 + 56\,\sigma_x\sigma_y + 224\,\sigma_y\sigma_x + 56\,\sigma_y^2 \\
&= 280 - 168\,\sigma_x\sigma_y
\end{aligned}
$$

$\mathbf{r} \wedge \mathbf{b} = -168\,\sigma_x\sigma_y$

$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})\,x = \mathbf{r} \wedge \mathbf{b}$

$-42\,\sigma_x\sigma_y\,x = -168\,\sigma_x\sigma_y$

$\Rightarrow$ $x = 4$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow\quad \mathbf{a}\,\mathbf{r} &= (3\,\sigma_x + 6\,\sigma_y)\,(28\,\sigma_x + 28\,\sigma_y) \\
&= 84\,\sigma_x^2 + 84\,\sigma_x\sigma_y + 168\,\sigma_y\sigma_x + 168\,\sigma_y^2 \\
&= 252 - 84\,\sigma_x\sigma_y
\end{aligned}
$$

$\mathbf{a} \wedge \mathbf{r} = -84\,\sigma_x\sigma_y$

$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})\,y = \mathbf{a} \wedge \mathbf{r}$

$-42\,\sigma_x\sigma_y\,y = -84\,\sigma_x\sigma_y$

$\Rightarrow$ $y = 2$

Probe: $3 \cdot 4 + 8 \cdot 2 = 12 + 16 = 28$
$6 \cdot 4 + 2 \cdot 2 = 24 + 4 = 28$

b) $4x + 9y = 29$ $\Rightarrow$ $\mathbf{a} = 4\,\sigma_x + 5\,\sigma_y$
$5x + 6y = 31$ $\quad\mathbf{b} = 9\,\sigma_x + 6\,\sigma_y$
$\quad\mathbf{r} = 29\,\sigma_x + 31\,\sigma_y$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{a\,b} = (4\,\sigma_x + 5\,\sigma_y)\,(9\,\sigma_x + 6\,\sigma_y)$$
$$= 36\,\sigma_x^2 + 24\,\sigma_x\sigma_y + 45\,\sigma_y\sigma_x + 30\,\sigma_y^2$$
$$= 66 - 21\,\sigma_x\sigma_y$$

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = -21\,\sigma_x\sigma_y$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{r\,b} = (29\,\sigma_x + 31\,\sigma_y)\,(9\,\sigma_x + 6\,\sigma_y)$$
$$= 261\,\sigma_x^2 + 174\,\sigma_x\sigma_y + 279\,\sigma_y\sigma_x + 186\,\sigma_y^2$$
$$= 447 - 105\,\sigma_x\sigma_y$$

$$\mathbf{r} \wedge \mathbf{b} = -105\,\sigma_x\sigma_y$$

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})\,x = \mathbf{r} \wedge \mathbf{b}$$
$$-21\,\sigma_x\sigma_y\,x = -105\,\sigma_x\sigma_y$$
$$\Rightarrow \quad x = 5$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{a\,r} = (4\,\sigma_x + 5\,\sigma_y)\,(29\,\sigma_x + 31\,\sigma_y)$$
$$= 116\,\sigma_x^2 + 124\,\sigma_x\sigma_y + 145\,\sigma_y\sigma_x + 155\,\sigma_y^2$$
$$= 271 - 21\,\sigma_x\sigma_y$$

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{r} = -21\,\sigma_x\sigma_y$$

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})\,y = \mathbf{a} \wedge \mathbf{r}$$
$$-21\,\sigma_x\sigma_y\,y = -21\,\sigma_x\sigma_y$$
$$\Rightarrow \quad y = 1$$

Probe: $4 \cdot 5 + 9 \cdot 1 = 20 + 9 = 29$
$5 \cdot 5 + 6 \cdot 1 = 25 + 6 = 31$

c) $6x + 4y = 6$ $\Rightarrow$ $\mathbf{a} = 6\,\sigma_x + 2\,\sigma_y$
$2x + \;\; y = 3$ $\quad\mathbf{b} = 4\,\sigma_x + \;\;\sigma_y$
$\quad\mathbf{r} = 6\,\sigma_x + 3\,\sigma_y$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{a\,b} = (6\,\sigma_x + 2\,\sigma_y)\,(4\,\sigma_x + \sigma_y)$$
$$= 24\,\sigma_x^2 + 6\,\sigma_x\sigma_y + 8\,\sigma_y\sigma_x + 2\,\sigma_y^2$$
$$= 26 - 2\,\sigma_x\sigma_y$$

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = -2\,\sigma_x\sigma_y$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{r\,b} = (6\,\sigma_x + 3\,\sigma_y)\,(4\,\sigma_x + \sigma_y)$$
$$= 24\,\sigma_x^2 + 6\,\sigma_x\sigma_y + 12\,\sigma_y\sigma_x + 3\,\sigma_y^2$$
$$= 27 - 6\,\sigma_x\sigma_y$$

$$\mathbf{r} \wedge \mathbf{b} = -6\,\sigma_x\sigma_y$$

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})\,x = \mathbf{r} \wedge \mathbf{b}$$
$$-2\,\sigma_x\sigma_y\,x = -6\,\sigma_x\sigma_y$$
$$\Rightarrow \quad x = 3$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{a\,r} = (6\,\sigma_x + 2\,\sigma_y)\,(6\,\sigma_x + 3\,\sigma_y)$$
$$= 36\,\sigma_x^2 + 18\,\sigma_x\sigma_y + 12\,\sigma_y\sigma_x + 6\,\sigma_y^2$$
$$= 42 + 6\,\sigma_x\sigma_y$$

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{r} = 6\,\sigma_x\sigma_y$$

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})\,y = \mathbf{a} \wedge \mathbf{r}$$
$$-2\,\sigma_x\sigma_y\,y = 6\,\sigma_x\sigma_y$$
$$\Rightarrow \quad y = -3$$

Probe: $\quad 6 \cdot 3 + 4 \cdot (-3) = 18 - 12 = 6$

$\qquad\quad\; 2 \cdot 3 + \quad (-3) = \quad 6 - \;\; 3 = 3$

d) $\quad \begin{aligned} 5\,x - 2\,y &= 6 \\ -2\,x - 3\,y &= 28 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \mathbf{a} &= 5\,\sigma_x - 2\,\sigma_y \\ \mathbf{b} &= -2\,\sigma_x - 3\,\sigma_y \\ \mathbf{r} &= 6\,\sigma_x + 28\,\sigma_y \end{aligned}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \mathbf{a}\,\mathbf{b} &= (5\,\sigma_x - 2\,\sigma_y)\,(-2\,\sigma_x - 3\,\sigma_y) \\ &= -10\,\sigma_x^2 - 15\,\sigma_x\sigma_y + 4\,\sigma_y\sigma_x + 6\,\sigma_y^2 \\ &= -4 - 19\,\sigma_x\sigma_y \end{aligned}$$

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = -19\,\sigma_x\sigma_y$$

$$\left.\begin{aligned} \Rightarrow \quad \mathbf{r}\,\mathbf{b} &= (6\,\sigma_x + 28\,\sigma_y)\,(-2\,\sigma_x - 3\,\sigma_y) \\ &= -12\,\sigma_x^2 - 18\,\sigma_x\sigma_y - 56\,\sigma_y\sigma_x - 84\,\sigma_y^2 \\ &= -96 + 38\,\sigma_x\sigma_y \\ \mathbf{r} \wedge \mathbf{b} &= 38\,\sigma_x\sigma_y \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})\,x &= \mathbf{r} \wedge \mathbf{b} \\ -19\,\sigma_x\sigma_y\,x &= 38\,\sigma_x\sigma_y \\ \Rightarrow \quad x &= -2 \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} \Rightarrow \quad \mathbf{a}\,\mathbf{r} &= (5\,\sigma_x - 2\,\sigma_y)\,(6\,\sigma_x + 28\,\sigma_y) \\ &= 30\,\sigma_x^2 + 140\,\sigma_x\sigma_y - 12\,\sigma_y\sigma_x - 56\,\sigma_y^2 \\ &= -26 + 152\,\sigma_x\sigma_y \\ \mathbf{a} \wedge \mathbf{r} &= 152\,\sigma_x\sigma_y \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})\,y &= \mathbf{a} \wedge \mathbf{r} \\ -19\,\sigma_x\sigma_y\,y &= 152\,\sigma_x\sigma_y \\ \Rightarrow \quad y &= -8 \end{aligned}$$

Probe: $\quad 5 \cdot (-2) - 2 \cdot (-8) = -10 + 16 = 6$

$\qquad\quad -2 \cdot (-2) - 3 \cdot (-8) = \quad 4 + 24 = 28$

Aufgabe 4:

Das Lineare Gleichungssystem, das dieser Textaufgabe zugrunde liegt, entspricht dem Linearen Gleichungssystem von Aufgabe 3a. Es können deshalb die Ergebnisse dieser Aufgabe übernommen werden:

$$\begin{aligned} 3\,x + 8\,y &= 28 \\ 6\,x + 2\,y &= 28 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \mathbf{a} &= 3\,\sigma_x + 6\,\sigma_y \\ \mathbf{b} &= 8\,\sigma_x + 2\,\sigma_y \\ \mathbf{r} &= 28\,\sigma_x + 28\,\sigma_y \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} &= -42\,\sigma_x\sigma_y \\ \mathbf{r} \wedge \mathbf{b} &= -168\,\sigma_x\sigma_y \\ \mathbf{a} \wedge \mathbf{r} &= -84\,\sigma_x\sigma_y \end{aligned}$$

$$x = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{r} \wedge \mathbf{b}) = \frac{-168}{-42} = 4 \qquad y = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{a} \wedge \mathbf{r}) = \frac{-84}{-42} = 2$$

Probe:

		4
		2
3	8	28
6	2	28

Es werden 4 ME des ersten Endproduktes E_1 und 2 ME des zweiten Endproduktes E_2 hergestellt, wenn 28 ME des ersten Rohstoffes R_1 und 28 ME des zweiten Rohstoffes R_2 verbraucht werden.

Aufgabe 5:

$$\begin{aligned} 2x + 7y &= 2050 \\ 5x + y &= 1000 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \mathbf{a} &= 2\,\sigma_x + 5\,\sigma_y \\ \mathbf{b} &= 7\,\sigma_x + \sigma_y \\ \mathbf{r} &= 2050\,\sigma_x + 1000\,\sigma_y \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} &= -33\,\sigma_x\sigma_y \\ \mathbf{r} \wedge \mathbf{b} &= -4950\,\sigma_x\sigma_y \\ \mathbf{a} \wedge \mathbf{r} &= -8250\,\sigma_x\sigma_y \end{aligned}$$

$$x = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{r} \wedge \mathbf{b}) = \frac{-4950}{-33} = 150 \qquad y = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{a} \wedge \mathbf{r}) = \frac{-8250}{-33} = 250$$

Probe:		
		150
		250
2	7	2050
5	1	1000

Es werden 150 ME des ersten Endproduktes E_1 und 250 ME des zweiten Endproduktes E_2 hergestellt, wenn 2050 ME des ersten Rohstoffes R_1 und 1000 ME des zweiten Rohstoffes R_2 verbraucht werden.

Aufgabe 6:

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{P}} = \begin{array}{cc} \text{1. Quartal} & \text{2. Quartal} \\ \downarrow & \downarrow \end{array} \atop \underbrace{\begin{pmatrix} 33000 & 32000 \\ 38000 & 25000 \end{pmatrix}}_{\mathbf{R}}$$

R .... Matrix des quartalsweisen Rohstoffbedarfs (Rohstoffbedarfsmatrix)

P .... Matrix der quartalsweisen Produktion (Produktionsmatrix)

$$\begin{aligned} 4x_1 + 3y_1 &= 33000 \\ x_1 + 5y_1 &= 38000 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \mathbf{a} &= 4\,\sigma_x + \sigma_y \\ \mathbf{b} &= 3\,\sigma_x + 5\,\sigma_y \\ \mathbf{r_1} &= 33000\,\sigma_x + 38000\,\sigma_y \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} &= 17\,\sigma_x\sigma_y \\ \mathbf{r_1} \wedge \mathbf{b} &= 51000\,\sigma_x\sigma_y \\ \mathbf{a} \wedge \mathbf{r_1} &= 119000\,\sigma_x\sigma_y \end{aligned}$$

$$x_1 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{r_1} \wedge \mathbf{b}) = \frac{51000}{17} = 3000 \qquad y_1 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{a} \wedge \mathbf{r_1}) = \frac{119000}{17} = 7000$$

$$\begin{aligned} 4x_2 + 3y_2 &= 32000 \\ x_2 + 5y_2 &= 25000 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \mathbf{a} &= 4\,\sigma_x + \sigma_y \\ \mathbf{b} &= 3\,\sigma_x + 5\,\sigma_y \\ \mathbf{r_2} &= 32000\,\sigma_x + 25000\,\sigma_y \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} &= 17\,\sigma_x\sigma_y \\ \mathbf{r_2} \wedge \mathbf{b} &= 85000\,\sigma_x\sigma_y \\ \mathbf{a} \wedge \mathbf{r_2} &= 68000\,\sigma_x\sigma_y \end{aligned}$$

$$x_2 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{r_2} \wedge \mathbf{b}) = \frac{85000}{17} = 5000 \qquad y_2 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{a} \wedge \mathbf{r_2}) = \frac{68000}{17} = 4000$$

$\Rightarrow$ Die Matrix der quartalsweisen Produktion lautet: $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 3000 & 5000 \\ 7000 & 4000 \end{pmatrix}$

Probe:

		3000	5000
		7000	4000
4	3	33000	32000
1	5	38000	25000

Im ersten Quartal werden somit 3000 ME des ersten Endproduktes E_1 und 7000 ME des zweiten Endproduktes E_2 hergestellt.

Im zweiten Quartal werden dann 5000 ME des ersten Endproduktes E_1 und 4000 ME des zweiten Endproduktes E_2 hergestellt.

Aufgabe 7:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{B}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 42 & 28 \\ 23 & 26 \end{pmatrix}}_{\mathbf{G}} \qquad \mathbf{A\,B} = \mathbf{G}$$

G .... Gesamtbedarfsmatrix

B .... Bedarfsmatrix des zweiten Produktionsschritts

A .... Bedarfsmatrix des ersten Produktionsschritts

$$\begin{array}{lll} 8\,x_1 + 2\,y_1 = 42 & \Rightarrow\ \mathbf{a} = 8\,\sigma_x + 4\,\sigma_y & \Rightarrow\ \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = 16\,\sigma_x\sigma_y \\ 4\,x_1 + 3\,y_1 = 23 & \quad\ \mathbf{b} = 2\,\sigma_x + 3\,\sigma_y & \quad\ \mathbf{r_1} \wedge \mathbf{b} = 80\,\sigma_x\sigma_y \\ & \quad\ \mathbf{r_1} = 42\,\sigma_x + 23\,\sigma_y & \quad\ \mathbf{a} \wedge \mathbf{r_1} = 16\,\sigma_x\sigma_y \end{array}$$

$$x_1 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{r_1} \wedge \mathbf{b}) = \frac{80}{16} = 5 \qquad y_1 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{a} \wedge \mathbf{r_1}) = \frac{16}{16} = 1$$

$$\begin{array}{lll} 8\,x_2 + 2\,y_2 = 28 & \Rightarrow\ \mathbf{a} = 8\,\sigma_x + 4\,\sigma_y & \Rightarrow\ \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = 16\,\sigma_x\sigma_y \\ 4\,x_2 + 3\,y_2 = 26 & \quad\ \mathbf{b} = 2\,\sigma_x + 3\,\sigma_y & \quad\ \mathbf{r_2} \wedge \mathbf{b} = 32\,\sigma_x\sigma_y \\ & \quad\ \mathbf{r_2} = 28\,\sigma_x + 26\,\sigma_y & \quad\ \mathbf{a} \wedge \mathbf{r_2} = 96\,\sigma_x\sigma_y \end{array}$$

$$x_2 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{r_2} \wedge \mathbf{b}) = \frac{32}{16} = 2 \qquad y_2 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{a} \wedge \mathbf{r_2}) = \frac{96}{16} = 6$$

Probe:

		5	2
		1	6
8	2	42	28
4	3	23	26

$\Rightarrow$ Die Zwischenbedarfsmatrix lautet: $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$

Aufgabe 8:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}}_{\mathbf{B}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 48 & 21 & 84 \\ 12 & 14 & 32 \end{pmatrix}}_{\mathbf{G}}$$

G .... Gesamtbedarfsmatrix

B .... Bedarfsmatrix des zweiten Produktionsschritts

A .... Bedarfsmatrix des ersten Produktionsschritts

$$\begin{array}{llll} 9\,x_1 + 3\,y_1 = 48 & \Rightarrow\; \mathbf{a} = 9\,\sigma_x + 2\,\sigma_y & \Rightarrow & \mathbf{a}\wedge\mathbf{b} = 12\,\sigma_x\sigma_y \\ 2\,x_1 + 2\,y_1 = 12 & \quad\;\; \mathbf{b} = 3\,\sigma_x + 2\,\sigma_y & & \mathbf{r_1}\wedge\mathbf{b} = 60\,\sigma_x\sigma_y \\ & \quad\;\; \mathbf{r_1} = 48\,\sigma_x + 12\,\sigma_y & & \mathbf{a}\wedge\mathbf{r_1} = 12\,\sigma_x\sigma_y \end{array}$$

$$x_1 = (\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{r_1}\wedge\mathbf{b}) = \frac{60}{12} = 5 \qquad y_1 = (\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{a}\wedge\mathbf{r_1}) = \frac{12}{12} = 1$$

$$\begin{array}{llll} 9\,x_2 + 3\,y_2 = 21 & \Rightarrow\; \mathbf{a} = 9\,\sigma_x + 2\,\sigma_y & \Rightarrow & \mathbf{a}\wedge\mathbf{b} = 12\,\sigma_x\sigma_y \\ 2\,x_2 + 2\,y_2 = 14 & \quad\;\; \mathbf{b} = 3\,\sigma_x + 2\,\sigma_y & & \mathbf{r_2}\wedge\mathbf{b} = 0\,\sigma_x\sigma_y \\ & \quad\;\; \mathbf{r_2} = 21\,\sigma_x + 14\,\sigma_y & & \mathbf{a}\wedge\mathbf{r_2} = 84\,\sigma_x\sigma_y \end{array}$$

$$x_2 = (\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{r_2}\wedge\mathbf{b}) = \frac{0}{12} = 0 \qquad y_2 = (\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{a}\wedge\mathbf{r_2}) = \frac{84}{12} = 7$$

$$\begin{array}{llll} 9\,x_3 + 3\,y_3 = 84 & \Rightarrow\; \mathbf{a} = 9\,\sigma_x + 2\,\sigma_y & \Rightarrow & \mathbf{a}\wedge\mathbf{b} = 12\,\sigma_x\sigma_y \\ 2\,x_3 + 2\,y_3 = 32 & \quad\;\; \mathbf{b} = 3\,\sigma_x + 2\,\sigma_y & & \mathbf{r_3}\wedge\mathbf{b} = 72\,\sigma_x\sigma_y \\ & \quad\;\; \mathbf{r_3} = 84\,\sigma_x + 32\,\sigma_y & & \mathbf{a}\wedge\mathbf{r_3} = 120\,\sigma_x\sigma_y \end{array}$$

$$x_3 = (\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{r_3}\wedge\mathbf{b}) = \frac{72}{12} = 6 \qquad y_3 = (\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{a}\wedge\mathbf{r_3}) = \frac{120}{12} = 10$$

Probe:				
		5	0	6
		1	7	10
9	3	48	21	84
2	2	12	14	32

$\Rightarrow$ Die Zwischenbedarfsmatrix lautet: $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 6 \\ 1 & 7 & 10 \end{pmatrix}$

Aufgabe 9:

1. Teilaufgabe: Verbrauch einer einzigen ME des ersten Rohstoffes R_1

$$\begin{array}{llll} 7\,x + 5\,y = 1 & \Rightarrow\; \mathbf{a} = 7\,\sigma_x + 4\,\sigma_y & \Rightarrow & \mathbf{a}\wedge\mathbf{b} = 1\,\sigma_x\sigma_y = \sigma_x\sigma_y \\ 4\,x + 3\,y = 0 & \quad\;\; \mathbf{b} = 5\,\sigma_x + 3\,\sigma_y & & \mathbf{r_1}\wedge\mathbf{b} = 3\,\sigma_x\sigma_y \\ & \quad\;\; \mathbf{r_1} = 1\,\sigma_x = \sigma_x & & \mathbf{a}\wedge\mathbf{r_1} = -\,4\,\sigma_x\sigma_y \end{array}$$

$x_1 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{r_1} \wedge \mathbf{b}) = \dfrac{3}{1} = 3 \qquad y_1 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{a} \wedge \mathbf{r_1}) = \dfrac{-4}{1} = -4$

Ökonomische Interpretation:

Wenn im Produktionsprozess genau eine einzige ME des ersten Rohstoffes R_1 verbraucht werden soll, werden 3 ME des ersten Endproduktes E_1 und (– 4) ME des zweiten Endproduktes E_2 hergestellt. Die Herstellung einer negativen Anzahl an Endprodukten ist allerdings problematisch.

Werden (– 4) ME hergestellt, bedeutet dies, dass zu der bereits produzierten Menge an Endprodukten (– 4) ME dazukommen und die Zahl (– 4) addiert wird. Mathematisch entspricht dies einer Subtraktion von 4. Nach Ende des Produktionsprozesses sind also 4 ME des Endproduktes E_2 weniger vorhanden.

Die 4 ME des Endproduktes E_2 wurden also nicht produziert, sondern verbraucht und (theoretisch verlustfrei) wieder in die ursprünglichen Rohstoffe R_1 und R_2 zerlegt.

Die korrekte ökonomische Interpretation lautet somit: Wenn im Produktionsprozess genau eine einzige ME des ersten Rohstoffes R_1 verbraucht werden soll, werden 3 ME des ersten Endproduktes E_1 hergestellt und zusätzlich 4 ME des zweiten Endproduktes E_2 verbraucht.

2. Teilaufgabe: Verbrauch einer einzigen ME des zweiten Rohstoffes R_2

$$\begin{array}{lclcl}
7\,x + 5\,y = 0 & \Rightarrow & \mathbf{a} = 7\,\sigma_x + 4\,\sigma_y & \Rightarrow & \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = 1\,\sigma_x\sigma_y = \sigma_x\sigma_y \\
4\,x + 3\,y = 1 & & \mathbf{b} = 5\,\sigma_x + 3\,\sigma_y & & \mathbf{r_2} \wedge \mathbf{b} = -5\,\sigma_x\sigma_y \\
 & & \mathbf{r_2} = 1\,\sigma_y = \sigma_y & & \mathbf{a} \wedge \mathbf{r_2} = 7\,\sigma_x\sigma_y
\end{array}$$

$x_2 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{r_2} \wedge \mathbf{b}) = \dfrac{-5}{1} = -5 \qquad y_2 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{a} \wedge \mathbf{r_2}) = \dfrac{-4}{1} = 7$

Ökonomische Interpretation:

Wenn im Produktionsprozess genau eine einzige ME des zweiten Rohstoffes R_2 verbraucht werden soll, werden zusätzlich 5 ME des ersten Endproduktes E_1 verbraucht und 7 ME des zweiten Endproduktes E_2 hergestellt.

Negative Herstellungsmengen gibt es in realen wirtschaftlichen Situationen nur äußerst selten, da in der Regel eine verlustfreie Zerlegung der produzierten Endprodukte in die ursprünglichen Rohstoffe kaum (und nur unter einem erhöhten Kostenaufwand) möglich ist.

Mathematisch haben die eben diskutierten Ergebnisse jedoch eine extrem wichtige Bedeutung, die sich bei der Probe zeigt.

Probe:

$$\begin{array}{r|l}
 & \left.\begin{array}{cc} 3 & -5 \\ -4 & 7 \end{array}\right\} \text{Inverse } \mathbf{A}^{-1} \text{ der Matrix } \mathbf{A} \\
\hline
\text{Ursprüngliche Matrix } \mathbf{A} \left\{\begin{array}{cc} 7 & 5 \\ 4 & 3 \end{array}\right. & \left.\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right\} \text{Einheitsmatrix } \mathbf{E}
\end{array}$$

Mathematische Interpretation:

Die Ergebnismatrix $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$ ist die Inverse der Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 10:

1. Teilaufgabe: Verbrauch einer einzigen ME des ersten Rohstoffes R_1

$$\begin{array}{lcl}
10\,x + 12\,y = 1 & \Rightarrow \quad \mathbf{a} = 10\,\sigma_x + 4\,\sigma_y & \Rightarrow \quad \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = 2\,\sigma_x\sigma_y \\
\;\;4\,x + \;\;5\,y = 0 & \quad\;\;\, \mathbf{b} = 12\,\sigma_x + 5\,\sigma_y & \quad\;\;\, \mathbf{r_1} \wedge \mathbf{b} = 5\,\sigma_x\sigma_y \\
 & \quad\;\;\, \mathbf{r_1} = 1\,\sigma_x = \sigma_x & \quad\;\;\, \mathbf{a} \wedge \mathbf{r_1} = -\,4\,\sigma_x\sigma_y
\end{array}$$

$$x_1 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{r_1} \wedge \mathbf{b}) = \frac{5}{2} = 2{,}5 \qquad y_1 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{a} \wedge \mathbf{r_1}) = \frac{-4}{2} = -\,2$$

Ökonomische Interpretation:

Wenn im Produktionsprozess genau eine einzige ME des ersten Rohstoffes R_1 verbraucht werden soll, werden 2,5 ME des ersten Endproduktes E_1 hergestellt und zusätzlich 2 ME des zweiten Endproduktes E_2 verbraucht.

2. Teilaufgabe: Verbrauch einer einzigen ME des zweiten Rohstoffes R_2

$$\begin{array}{lcl}
10\,x + 12\,y = 0 & \Rightarrow \quad \mathbf{a} = 10\,\sigma_x + 4\,\sigma_y & \Rightarrow \quad \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = 2\,\sigma_x\sigma_y \\
\;\;4\,x + \;\;5\,y = 1 & \quad\;\;\, \mathbf{b} = 12\,\sigma_x + 5\,\sigma_y & \quad\;\;\, \mathbf{r_2} \wedge \mathbf{b} = -\,12\,\sigma_x\sigma_y \\
 & \quad\;\;\, \mathbf{r_2} = 1\,\sigma_y = \sigma_y & \quad\;\;\, \mathbf{a} \wedge \mathbf{r_2} = 10\,\sigma_x\sigma_y
\end{array}$$

$$x_2 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{r_2} \wedge \mathbf{b}) = \frac{-12}{2} = -\,6 \qquad y_2 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{a} \wedge \mathbf{r_2}) = \frac{10}{2} = 5$$

Ökonomische Interpretation:

Wenn im Produktionsprozess genau eine einzige ME des zweiten Rohstoffes R_2 verbraucht werden soll, werden zusätzlich 6 ME des ersten Endproduktes E_1 verbraucht und 5 ME des zweiten Endproduktes E_2 hergestellt.

Probe:

$$\begin{array}{r|l}
 & \left.\begin{array}{rr} 2{,}5 & -\,6 \\ -\,2 & 5 \end{array}\right\} \text{Inverse } \mathbf{A}^{-1} \text{ der Matrix } \mathbf{A} \\ \hline
\text{Ursprüngliche Matrix } \mathbf{A} \left\{\begin{array}{rr} 10 & 12 \\ 4 & 5 \end{array}\right. & \left.\begin{array}{rr} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right\} \text{Einheitsmatrix } \mathbf{E}
\end{array}$$

Ergebnis:

Die Inverse der ursprünglichen Bedarfsmatrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 10 & 12 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ lautet $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 2{,}5 & -\,6 \\ -\,2 & 5 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 11:

a)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 9 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{llll}
\Rightarrow & \mathbf{a} = 5\,\sigma_x + 9\,\sigma_y & \Rightarrow \quad \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = -\,\sigma_x\sigma_y & \\
 & \mathbf{b} = 4\,\sigma_x + 7\,\sigma_y & \quad\;\;\, \mathbf{r_1} \wedge \mathbf{b} = 7\,\sigma_x\sigma_y & \mathbf{r_2} \wedge \mathbf{b} = -\,4\,\sigma_x\sigma_y \\
 & \mathbf{r_1} = \sigma_x & \quad\;\;\, \mathbf{a} \wedge \mathbf{r_1} = -\,9\,\sigma_x\sigma_y & \mathbf{a} \wedge \mathbf{r_2} = 5\,\sigma_x\sigma_y \\
 & \mathbf{r_2} = \sigma_y & &
\end{array}$$

$x_1 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1} (\mathbf{r_1} \wedge \mathbf{b}) = \frac{7}{-1} = -7 \qquad y_1 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1} (\mathbf{a} \wedge \mathbf{r_1}) = \frac{-9}{-1} = 9$

$x_2 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1} (\mathbf{r_2} \wedge \mathbf{b}) = \frac{-4}{-1} = 4 \qquad y_2 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1} (\mathbf{a} \wedge \mathbf{r_2}) = \frac{5}{-1} = -5$

Probe:

$$\begin{array}{cc|cc} & & -7 & 4 \\ & & 9 & -5 \\ \hline 5 & 4 & 1 & 0 \\ 9 & 7 & 0 & 1 \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & 4 \\ 9 & -5 \end{pmatrix}$$

b) $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 19 & 8 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a} = 10\,\sigma_x + 19\,\sigma_y \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = 4\,\sigma_x\sigma_y$

$\mathbf{b} = 4\,\sigma_x + 8\,\sigma_y \qquad \mathbf{r_1} \wedge \mathbf{b} = 8\,\sigma_x\sigma_y \qquad \mathbf{r_2} \wedge \mathbf{b} = -4\,\sigma_x\sigma_y$

$\mathbf{r_1} = \sigma_x \qquad \mathbf{a} \wedge \mathbf{r_1} = -19\,\sigma_x\sigma_y \qquad \mathbf{a} \wedge \mathbf{r_2} = 10\,\sigma_x\sigma_y$

$\mathbf{r_2} = \sigma_y$

$x_1 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1} (\mathbf{r_1} \wedge \mathbf{b}) = \frac{8}{4} = 2 \qquad y_1 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1} (\mathbf{a} \wedge \mathbf{r_1}) = \frac{-19}{4} = -4{,}75$

$x_2 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1} (\mathbf{r_2} \wedge \mathbf{b}) = \frac{-4}{4} = -1 \qquad y_2 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1} (\mathbf{a} \wedge \mathbf{r_2}) = \frac{10}{4} = 2{,}5$

Probe:

$$\begin{array}{cc|cc} & & 2 & -1 \\ & & -4{,}75 & 2{,}5 \\ \hline 10 & 4 & 1 & 0 \\ 19 & 8 & 0 & 1 \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{B}^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -19 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4{,}75 & 2{,}5 \end{pmatrix}$$

c) $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 10 & 6 \\ 20 & 13 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a} = 10\,\sigma_x + 20\,\sigma_y \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = 10\,\sigma_x\sigma_y$

$\mathbf{b} = 6\,\sigma_x + 13\,\sigma_y \qquad \mathbf{r_1} \wedge \mathbf{b} = 13\,\sigma_x\sigma_y \qquad \mathbf{r_2} \wedge \mathbf{b} = -6\,\sigma_x\sigma_y$

$\mathbf{r_1} = \sigma_x \qquad \mathbf{a} \wedge \mathbf{r_1} = -20\,\sigma_x\sigma_y \qquad \mathbf{a} \wedge \mathbf{r_2} = 10\,\sigma_x\sigma_y$

$\mathbf{r_2} = \sigma_y$

$x_1 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1} (\mathbf{r_1} \wedge \mathbf{b}) = \frac{13}{10} = 1{,}3 \qquad y_1 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1} (\mathbf{a} \wedge \mathbf{r_1}) = \frac{-20}{10} = -2$

$x_2 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1} (\mathbf{r_2} \wedge \mathbf{b}) = \frac{-6}{10} = -0{,}6 \qquad y_2 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1} (\mathbf{a} \wedge \mathbf{r_2}) = \frac{10}{10} = 1$

Probe:

$$\begin{array}{cc|cc} & & 1{,}3 & -0{,}6 \\ & & -2 & 1 \\ \hline 10 & 6 & 1 & 0 \\ 20 & 13 & 0 & 1 \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{C}^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 13 & -6 \\ -20 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}3 & -0{,}6 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

d) $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & -2{,}5 \\ 0{,}2 & 3{,}4 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $\mathbf{a} = 0{,}2\ \sigma_y$ $\Rightarrow$ $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = 0{,}5\ \sigma_x\sigma_y$

$\mathbf{b} = -2{,}5\ \sigma_x + 3{,}4\ \sigma_y$ $\quad \mathbf{r_1} \wedge \mathbf{b} = 3{,}4\ \sigma_x\sigma_y$ $\quad \mathbf{r_2} \wedge \mathbf{b} = 2{,}5\ \sigma_x\sigma_y$

$\mathbf{r_1} = \sigma_x$ $\quad \mathbf{a} \wedge \mathbf{r_1} = -0{,}2\ \sigma_x\sigma_y$ $\quad \mathbf{a} \wedge \mathbf{r_2} = 0$

$\mathbf{r_2} = \sigma_y$

$x_1 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{r_1} \wedge \mathbf{b}) = \dfrac{3{,}4}{0{,}5} = 2 \cdot 3{,}4 = 6{,}8$ $\qquad y_1 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{a} \wedge \mathbf{r_1}) = \dfrac{-0{,}2}{0{,}5} = 2 \cdot (-0{,}2) = -0{,}4$

$x_2 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{r_2} \wedge \mathbf{b}) = \dfrac{2{,}5}{0{,}5} = 2 \cdot 2{,}5 = 5$ $\qquad y_2 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{a} \wedge \mathbf{r_2}) = \dfrac{0}{0{,}5} = 2 \cdot 0 = 0$

Probe:

$$\begin{array}{cc|cc} & & 6{,}8 & 5 \\ & & -0{,}4 & 0 \\ \hline 0 & -2{,}5 & 1 & 0 \\ 0{,}2 & 3{,}4 & 0 & 1 \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{D}^{-1} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 3{,}4 & 2{,}5 \\ -0{,}2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6{,}8 & 5 \\ -0{,}4 & 0 \end{pmatrix}$$

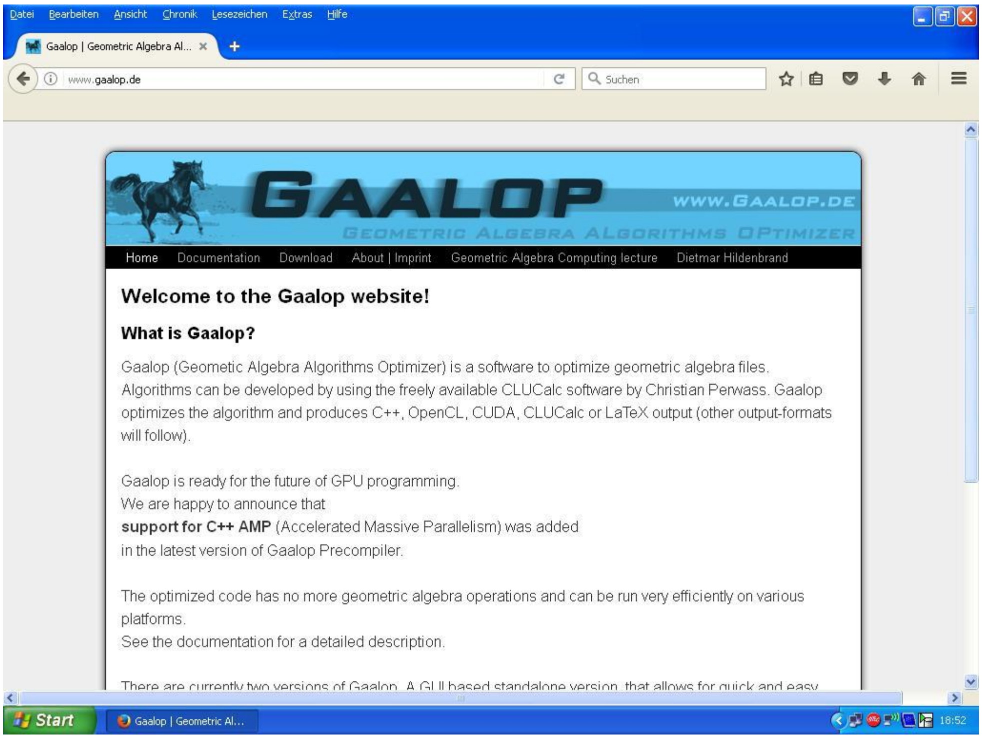
HWR Berlin, Sommersemester 2017

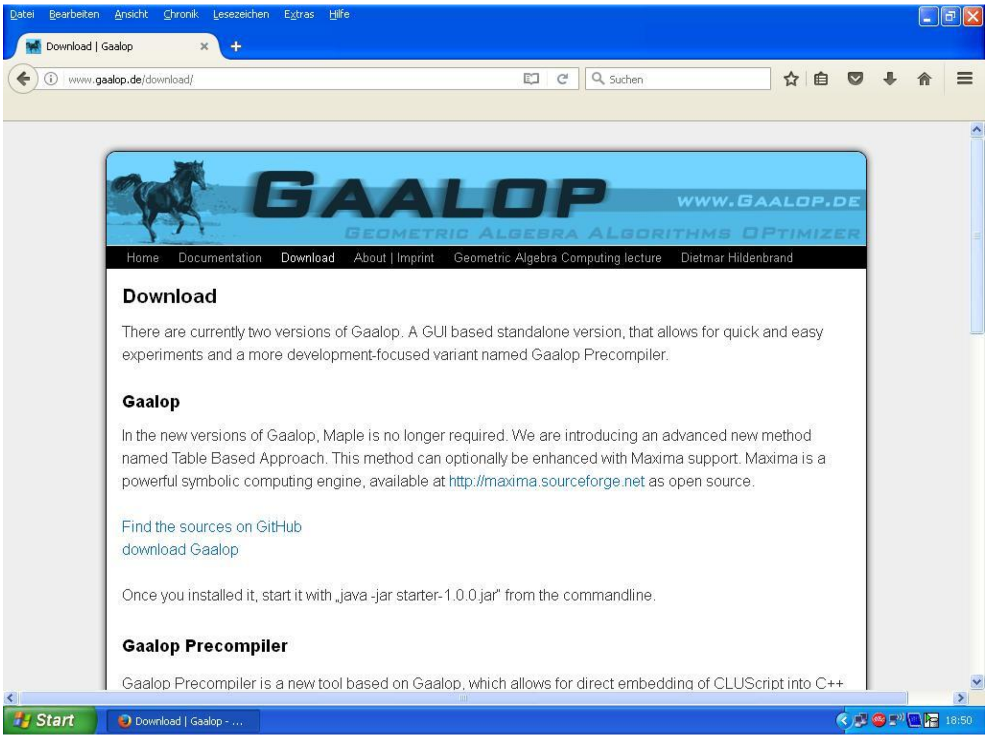
Wirtschaftsmathematik (LV-Nr. 200 601.07)

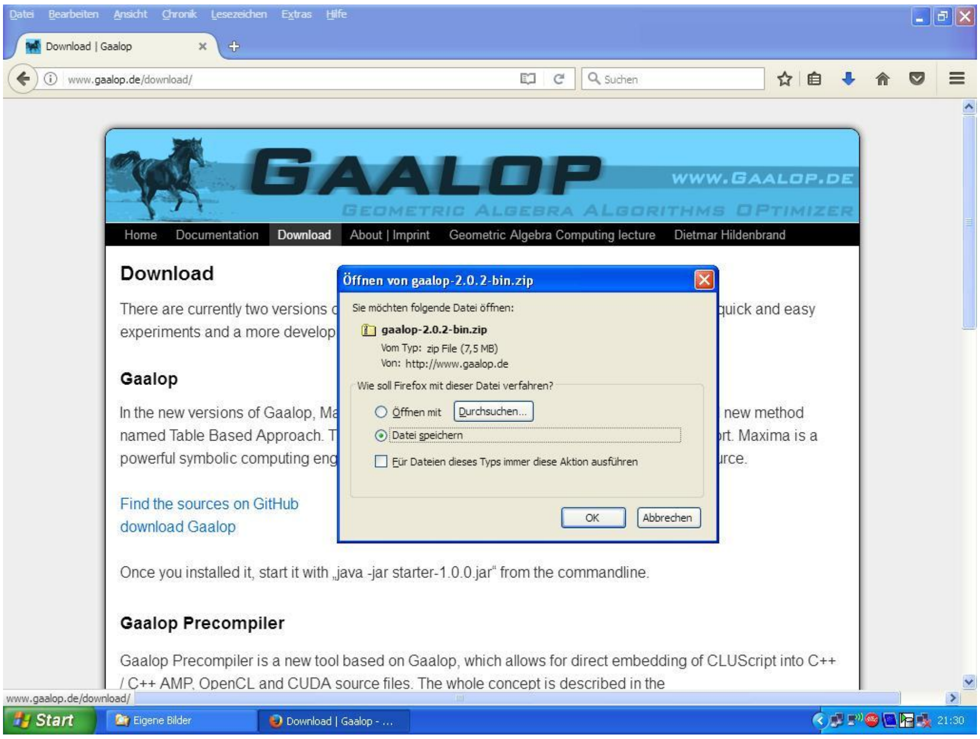
Übungsblatt 9 – Lösungen

Aufgabe 1:

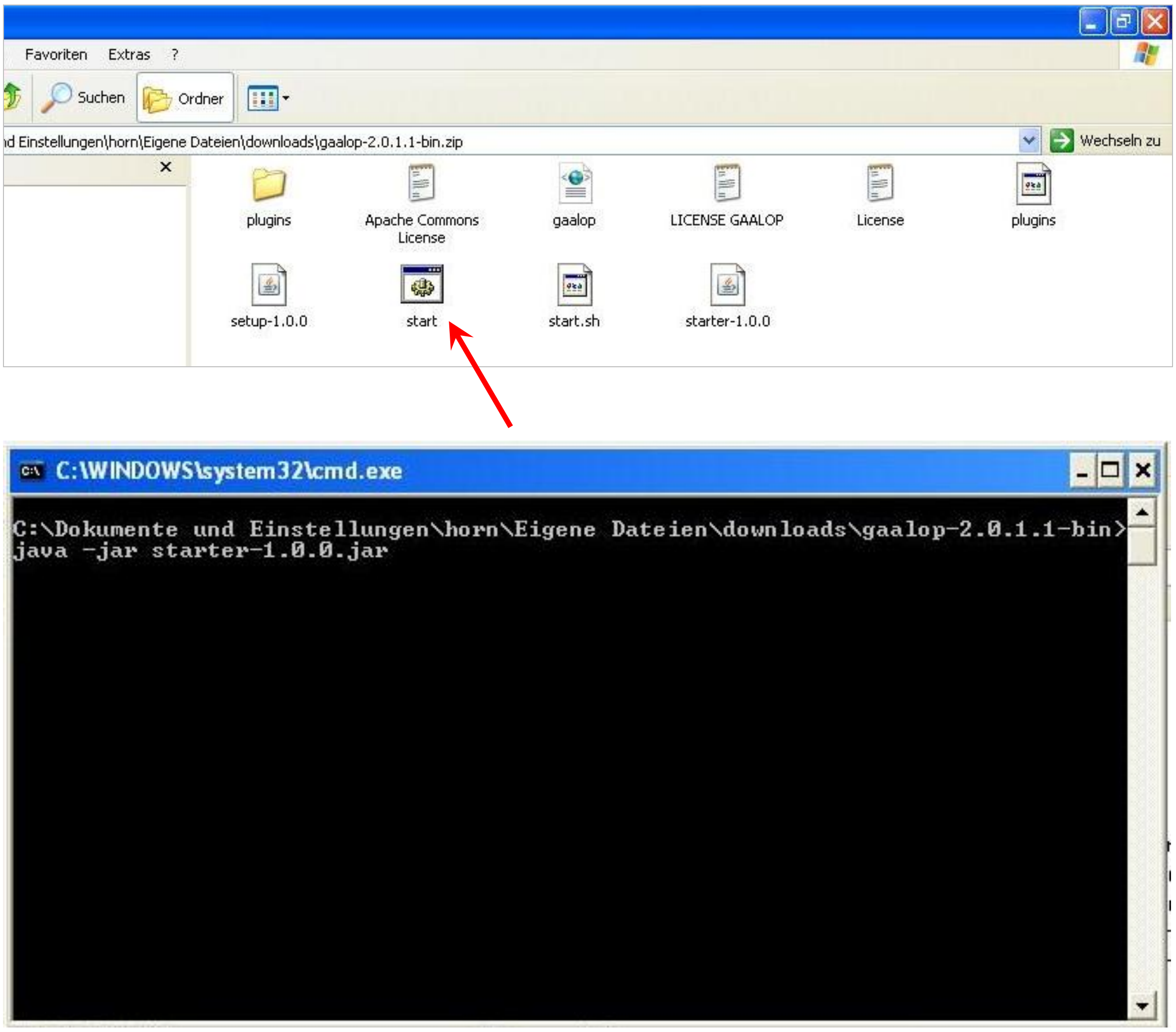
a) Download von GAALOP:





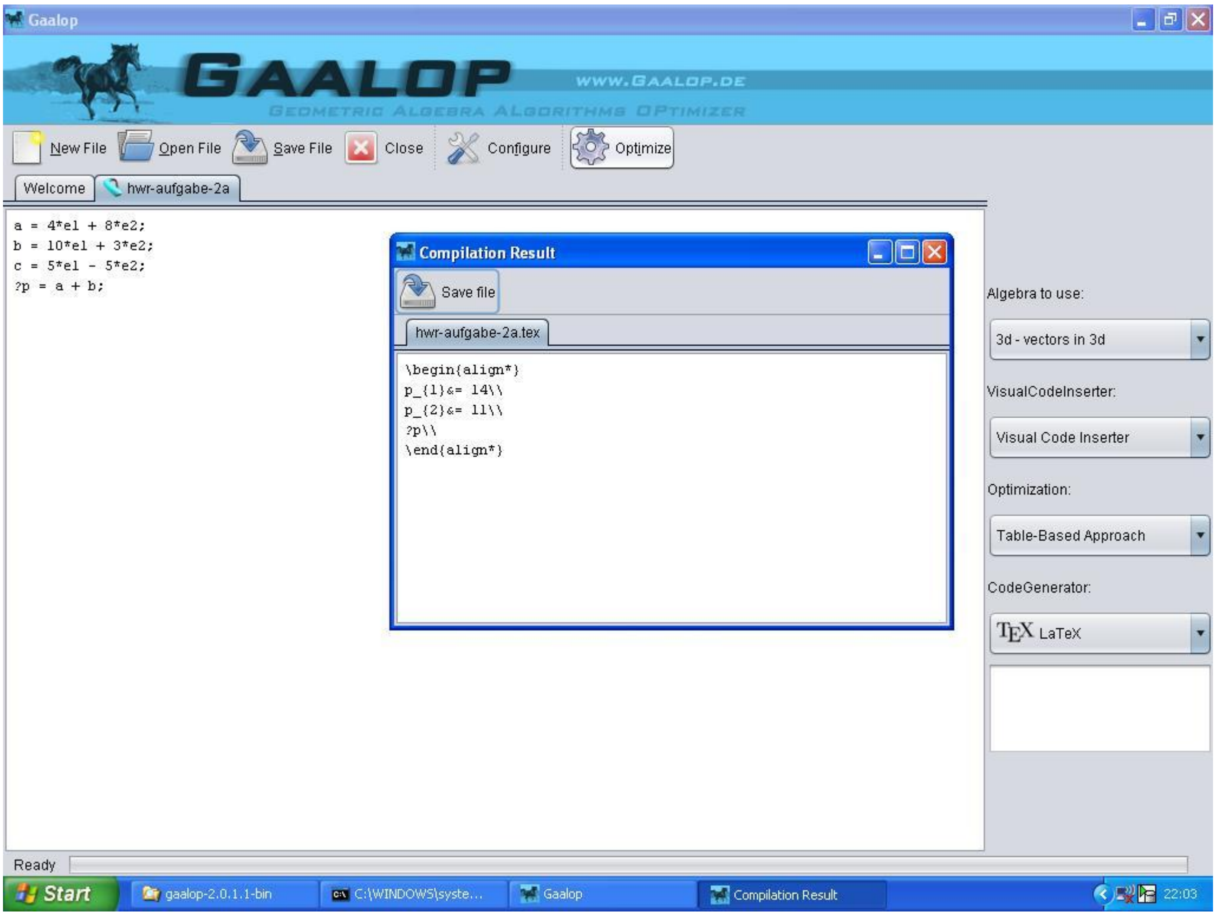


b) Start von GAALOP



Aufgabe 2:

a)



Interpretation des Ergebnisses:

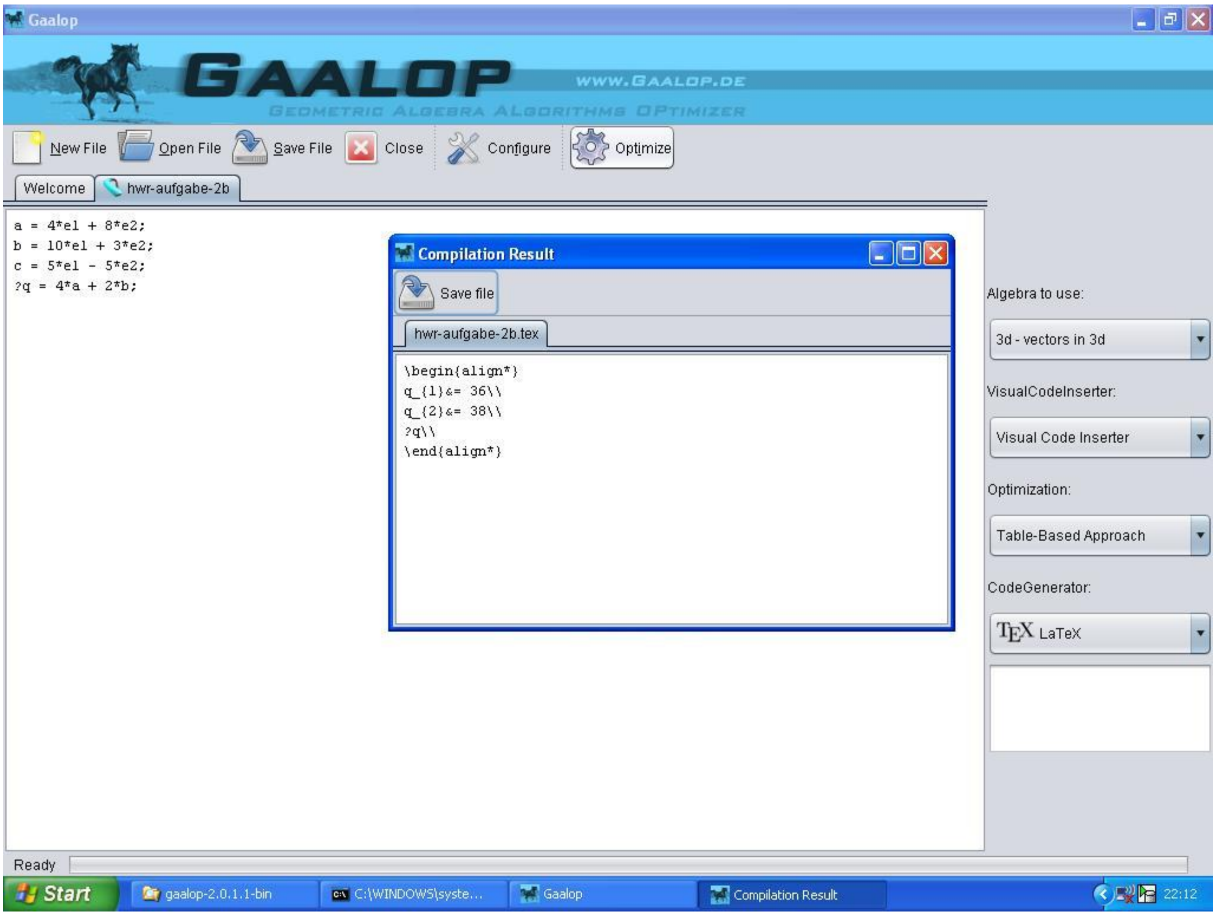
Skalare (zahlenartige) Komponente ohne Richtung:	p_{0} &= 0
Vektorielle (streckenartige) Komponente in σ_x-Richtung:	p_{1} &= 14 $\rightarrow$ 14 σ_x
Vektorielle (streckenartige) Komponente in σ_y-Richtung:	p_{2} &= 11 $\rightarrow$ 11 σ_y
Vektorielle (streckenartige) Komponente in σ_z-Richtung:	p_{3} &= 0
Bivektorielle (flächenartige) Komponente in $\sigma_x\sigma_y$-Richtung:	p_{4} &= 0
Bivektorielle (flächenartige) Komponente in $\sigma_x\sigma_z$-Richtung:	p_{5} &= 0
Bivektorielle (flächenartige) Komponente in $\sigma_y\sigma_z$-Richtung:	p_{6} &= 0
Trivektorielle (volumenartige) Komponente in $\sigma_x\sigma_y\sigma_z$-Richtung:	p_{7} &= 0

In der Pauli-Algebra weist jede Größe acht Komponenten auf. Es werden allerdings nur die Komponenten im Compiler-Feld aufgeführt, die nicht Null sind, hier also die Komponenten in σ_x- und σ_y-Richtung. Alle nicht aufgeführten Komponenten werden automatisch mit dem Wert Null besetzt.

Das Ergebnis lautet somit in Pauli-Notation:

$\mathbf{p} = (4\,\sigma_x + 8\,\sigma_y) + (10\,\sigma_x + 3\,\sigma_y) = 14\,\sigma_x + 11\,\sigma_y$

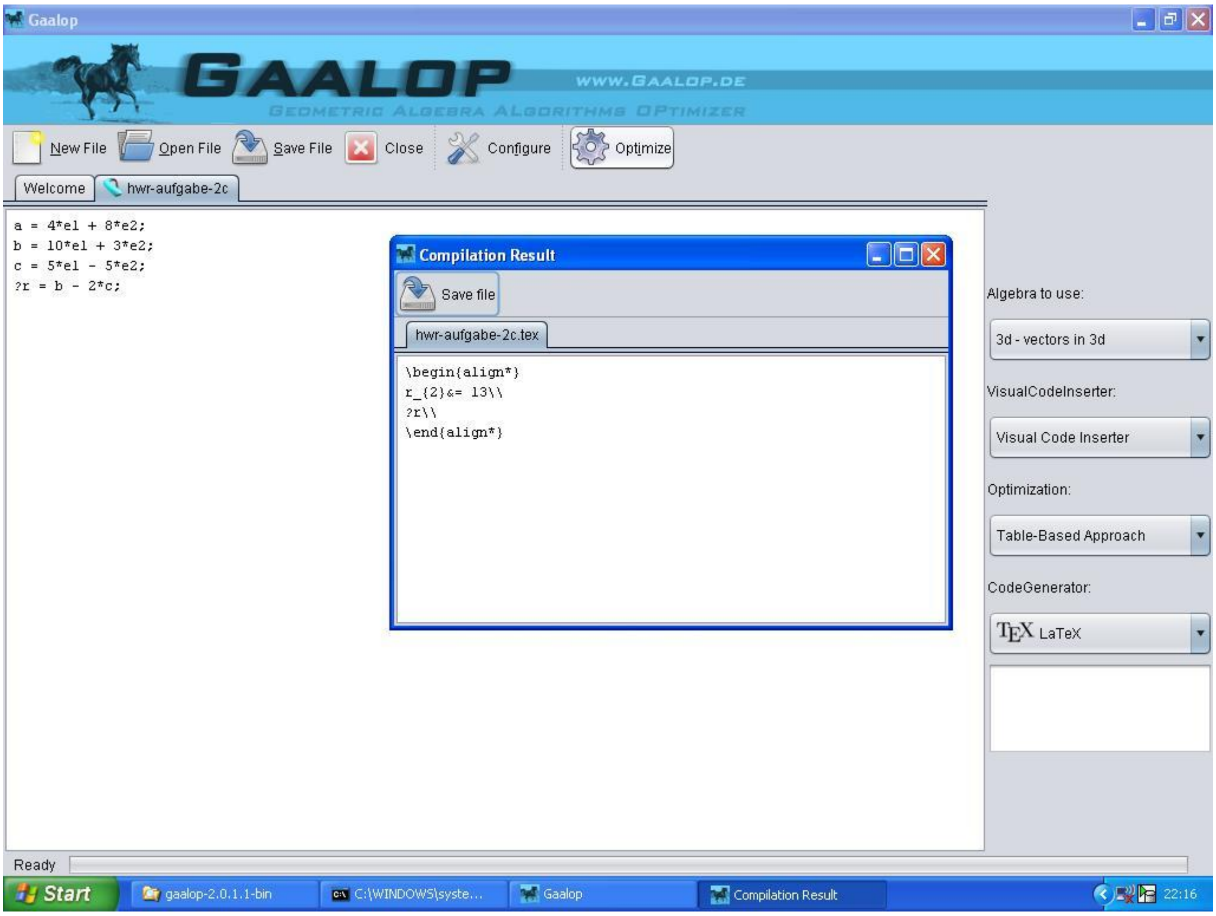
b)



Ergebnis in Pauli-Notation:

$\mathbf{q} = 4 \cdot (4\,\sigma_x + 8\,\sigma_y) + 2 \cdot (10\,\sigma_x + 3\,\sigma_y) = 36\,\sigma_x + 38\,\sigma_y$

c)

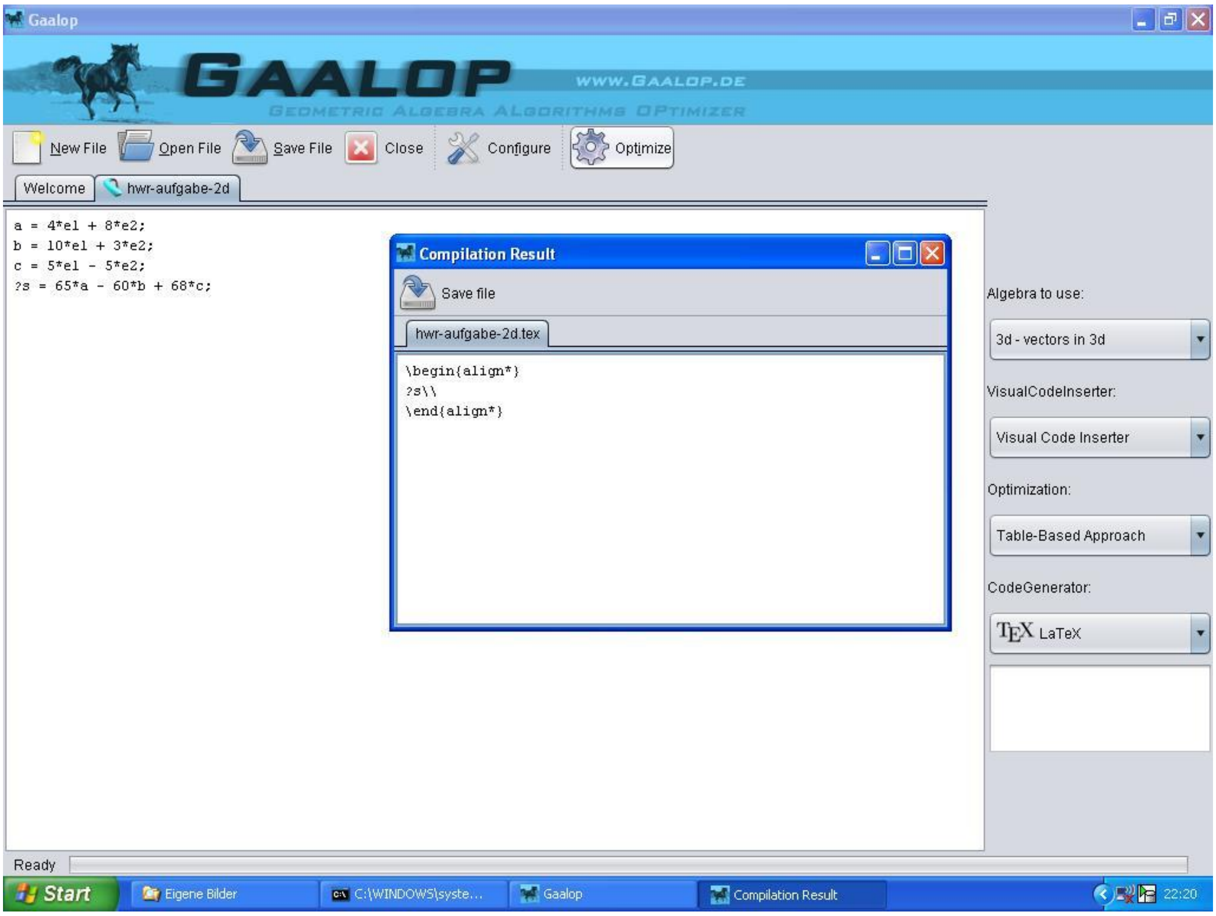


Ergebnis in Pauli-Notation:

$\mathbf{r} = (10\ \sigma_x + 3\ \sigma_y) - 2 \cdot (5\ \sigma_x - 5\ \sigma_y) = 0\ \sigma_x + 13\ \sigma_y = 13\ \sigma_y$

Da keine σ_x-Komponente r_{1} im Compiler-Feld aufgeführt wird, ist diese automatisch Null: r_{1} &= 0.

d)



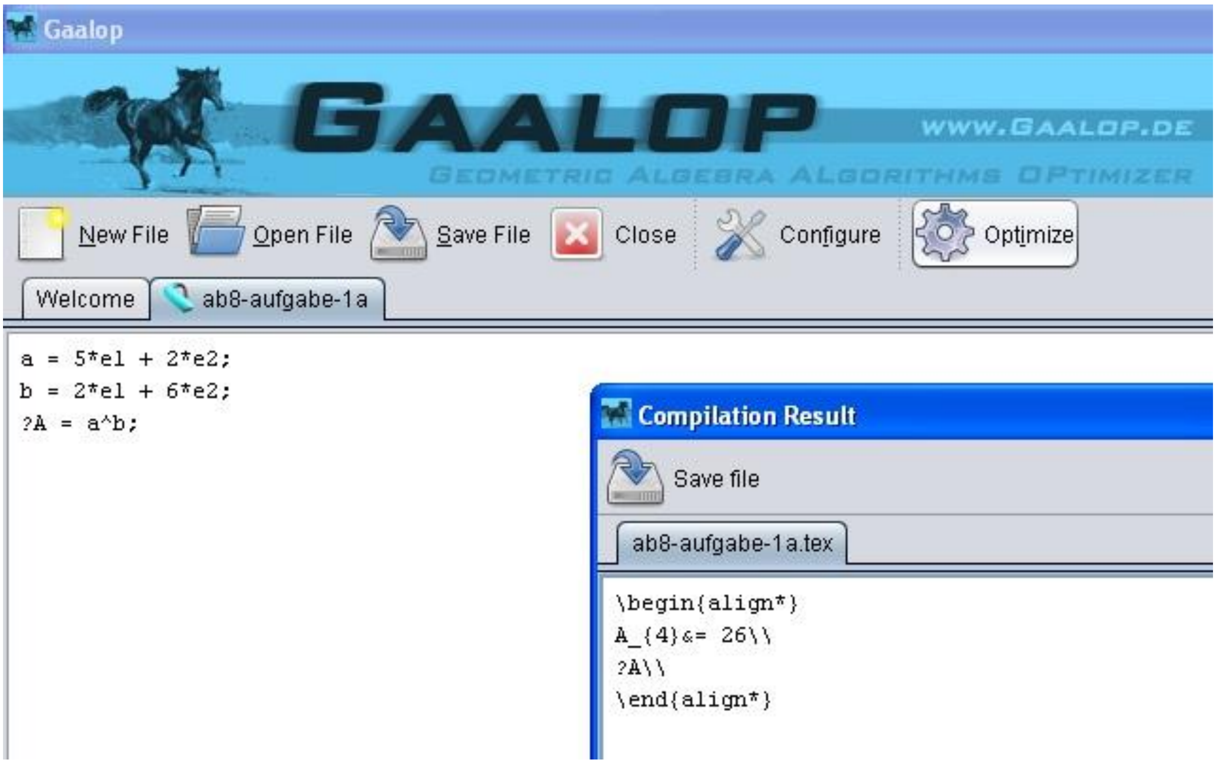
Da weder eine σ_x-Komponente s_{1}, noch eine σ_y-Komponente s_{2} im Compiler-Feld aufgeführt werden, sind beide Komponenten automatisch Null: s_{1} &= 0
s_{2} &= 0.

Ergebnis in Pauli-Notation:

$\mathbf{s} = 65 \cdot (4\,\sigma_x + 8\,\sigma_y) - 60 \cdot (10\,\sigma_x + 3\,\sigma_y) + 68 \cdot (5\,\sigma_x - 5\,\sigma_y) = 0\,\sigma_x + 0\,\sigma_y = 0$

Aufgabe 3 → Aufgabe 1 von Übungsblatt 8:

1) a)

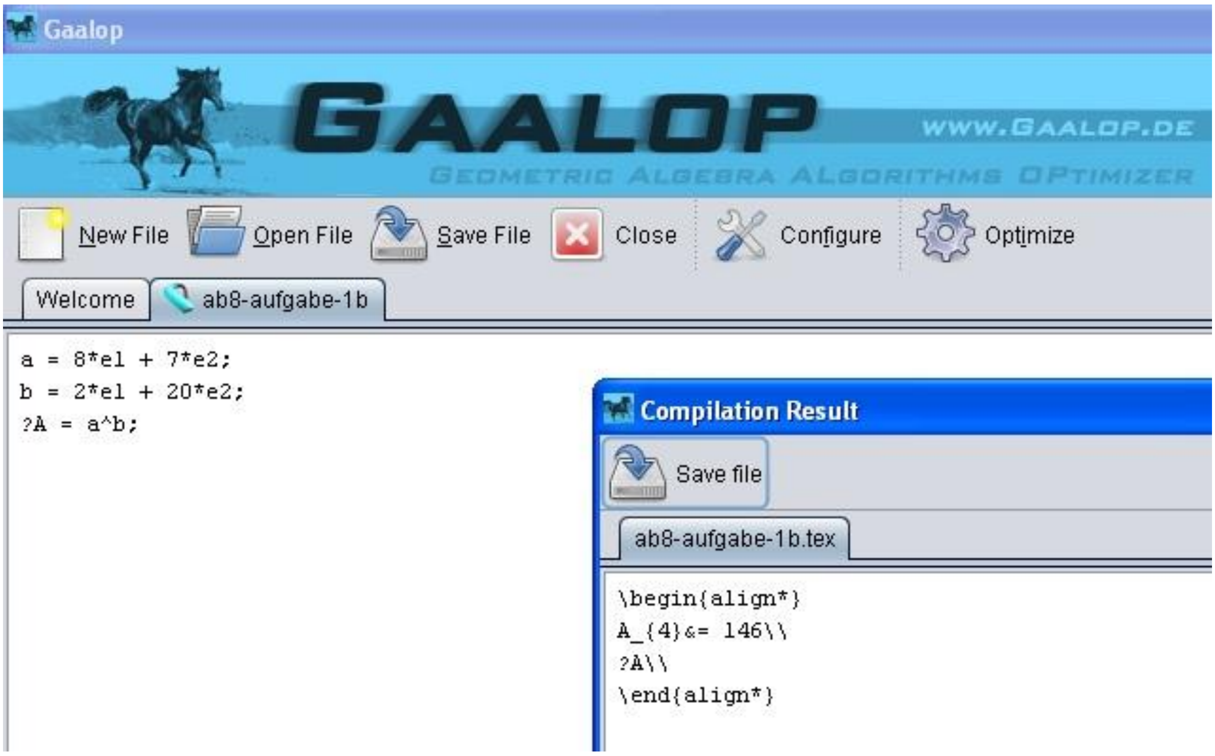


Ergebnis in Pauli-Notation:

$\mathbf{A} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = 26\,\sigma_x\sigma_y$ $\quad\Rightarrow\quad$ $|\mathbf{A}| = 26$

$\Rightarrow$ Der Flächeninhalt des Parallelogramms beträgt 26 cm^2.

1) b)

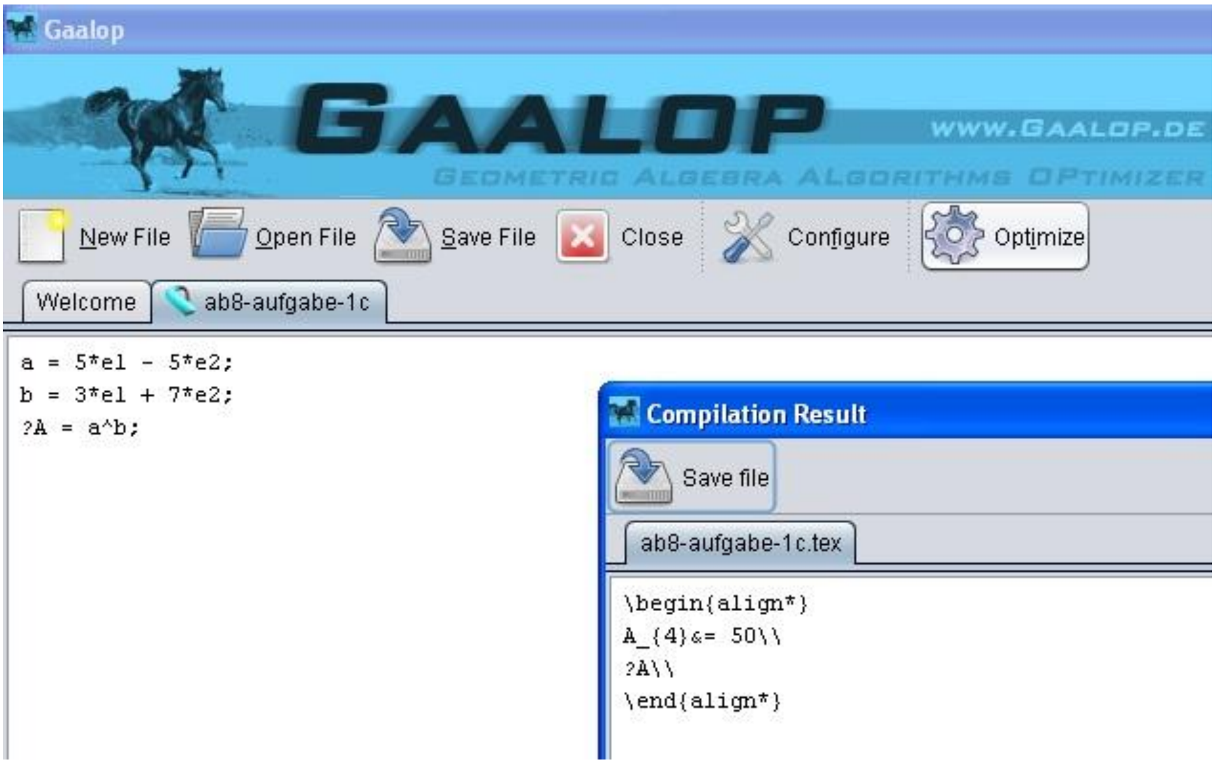


Ergebnis in Pauli-Notation:

$\mathbf{A} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = 146\,\sigma_x\sigma_y$ $\quad\Rightarrow\quad$ $|\mathbf{A}| = 146$

$\Rightarrow$ Der Flächeninhalt des Parallelogramms beträgt 146 cm^2.

1) c)

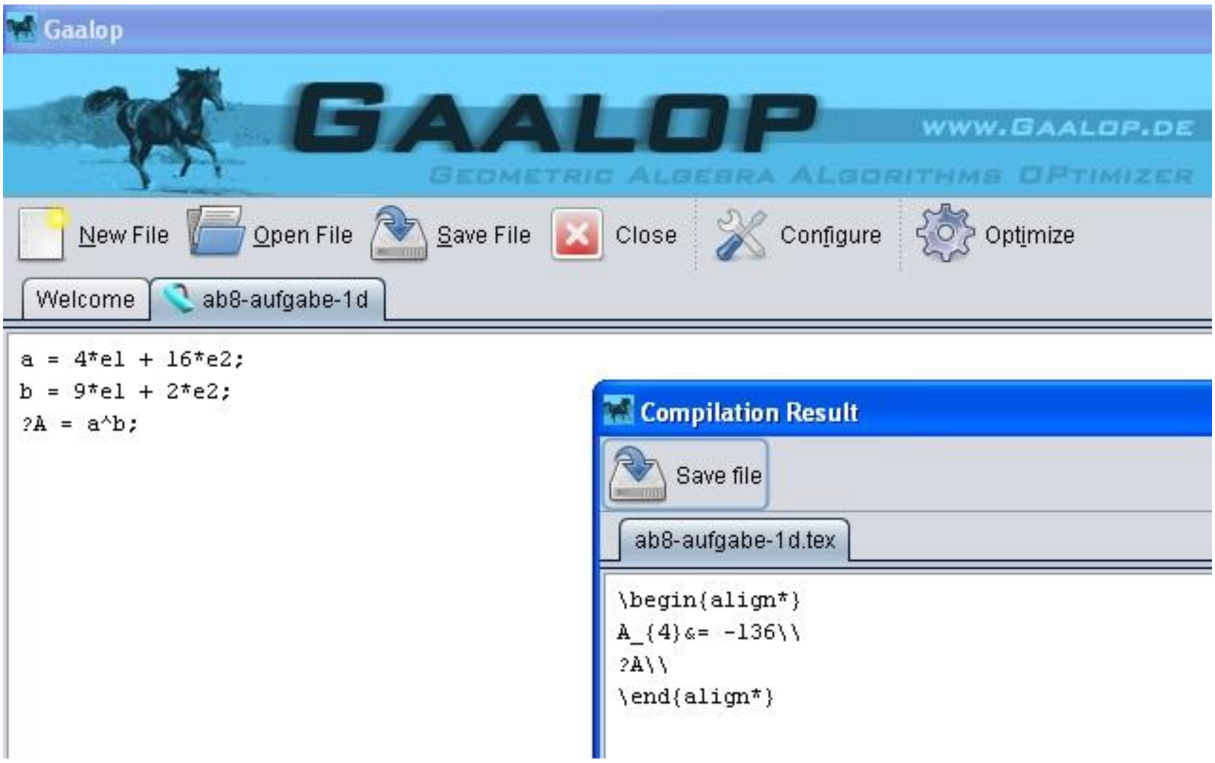


Ergebnis in Pauli-Notation:

$\mathbf{A} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = 50\ \sigma_x\sigma_y$ $\Rightarrow$ $|\mathbf{A}| = 50$

$\Rightarrow$ Der Flächeninhalt des Parallelogramms beträgt 50 cm^2.

1) d)



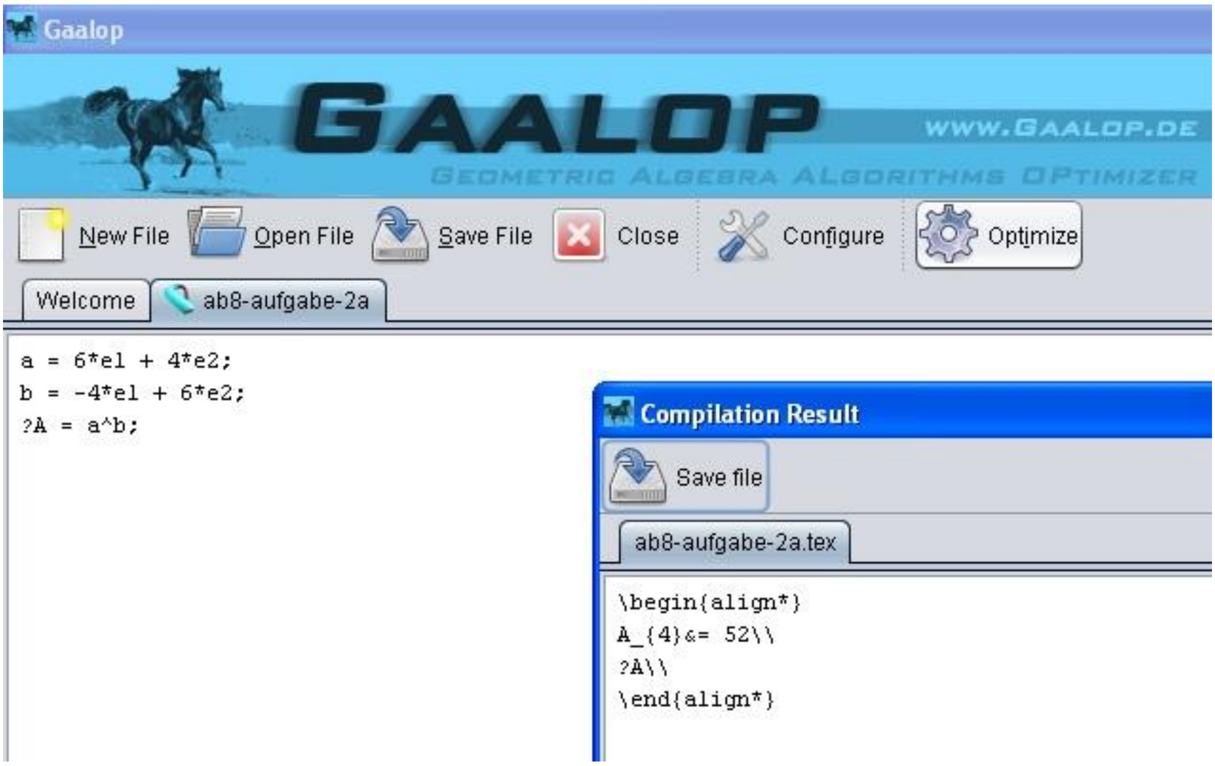
Ergebnis in Pauli-Notation:

$\mathbf{A} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = -\,136\ \sigma_x\sigma_y$ $\Rightarrow$ $|\mathbf{A}| = 136$

$\Rightarrow$ Der Flächeninhalt des Parallelogramms beträgt 136 cm^2.

Aufgabe 3 $\rightarrow$ Aufgabe 2 von Übungsblatt 8:

2) a)

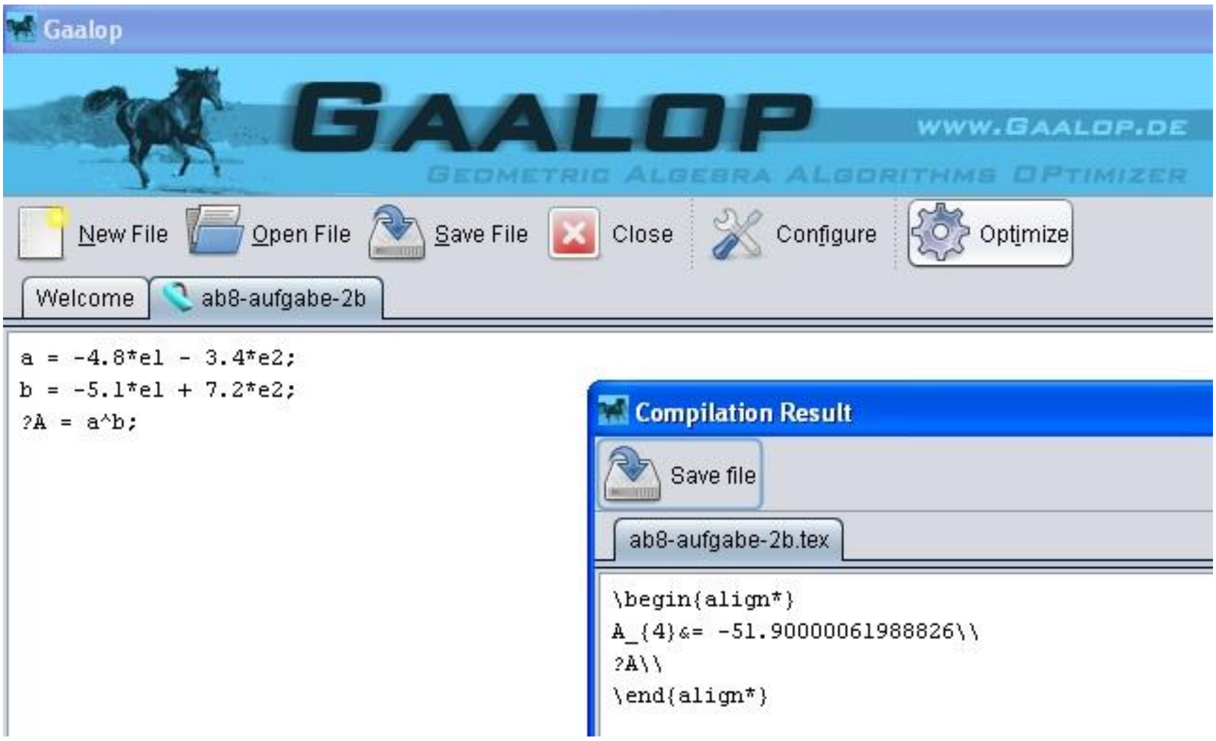


Ergebnis in Pauli-Notation:

$\mathbf{A} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = 52\ \sigma_x\sigma_y \qquad \Rightarrow \quad |\mathbf{A}| = 52$

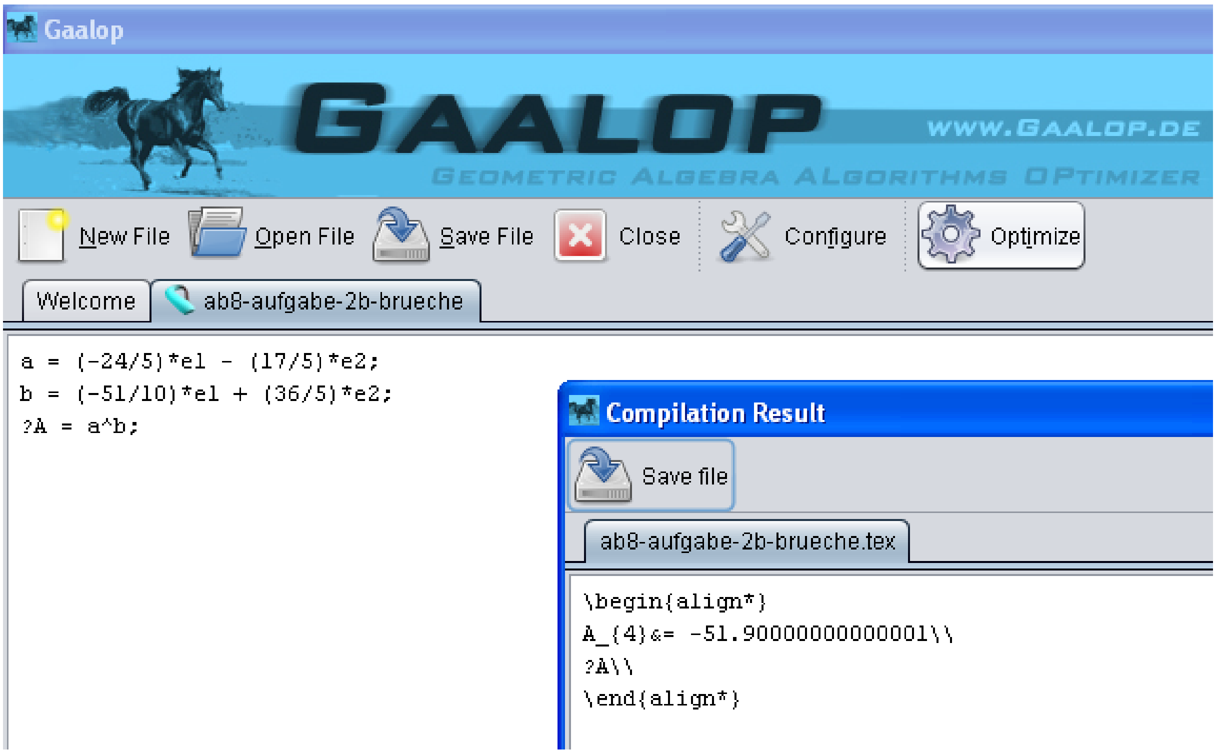
$\Rightarrow$ Der Flächeninhalt des Quadrats beträgt 52 cm^2.

2) b) Lösung mit ungenauem Ergebnis:



Hinweis: GAALOP befindet sich noch in der Entwicklung. An dieser Stelle zeigt das Programm noch unerwünschte Rundungsungenauigkeiten, die in künftigen Versionen behoben werden. Die hinteren Dezimalziffern sind hier also zu vernachlässigen. Ein korrektes Ergebnis ergibt sich jedoch, wenn die Koeffizienten in ganzzahligen Bruchdarstellungen angegeben werden.

Lösung mit genauerem Ergebnis:

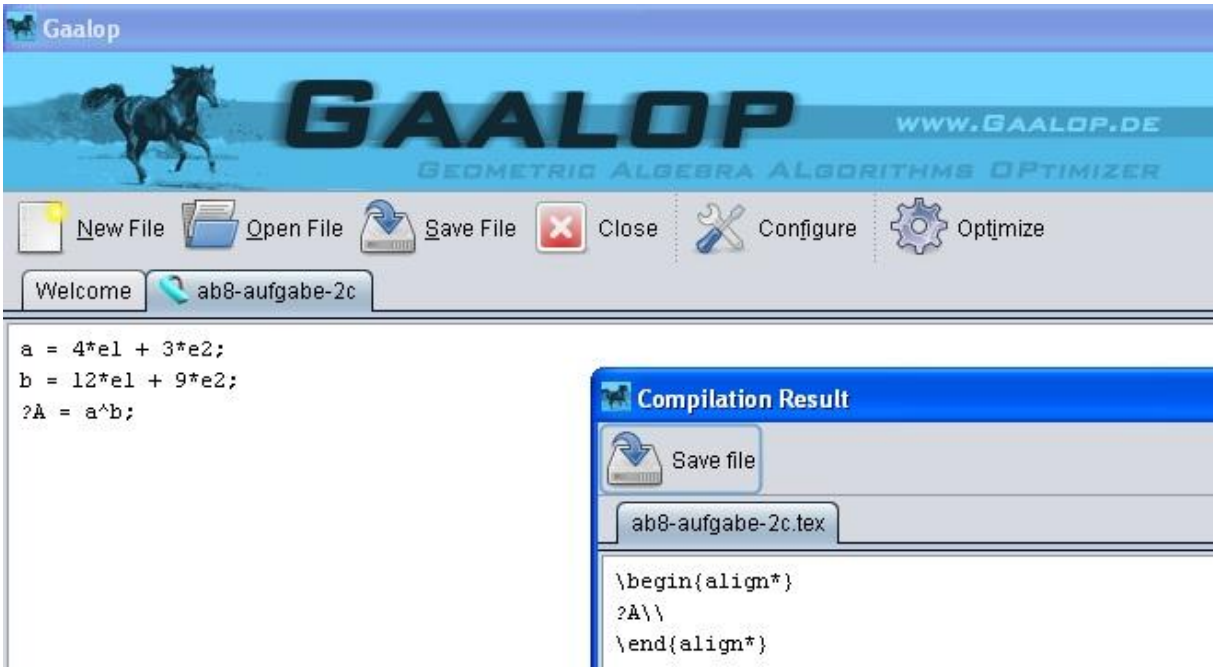


Ergebnis in Pauli-Notation:

$\mathbf{A} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = -51{,}90\ \sigma_x\sigma_y \quad \Rightarrow \quad |\mathbf{A}| = 51{,}90$

$\Rightarrow$ Der Flächeninhalt des Rechtecks beträgt 51,90 cm^2.

2) c)



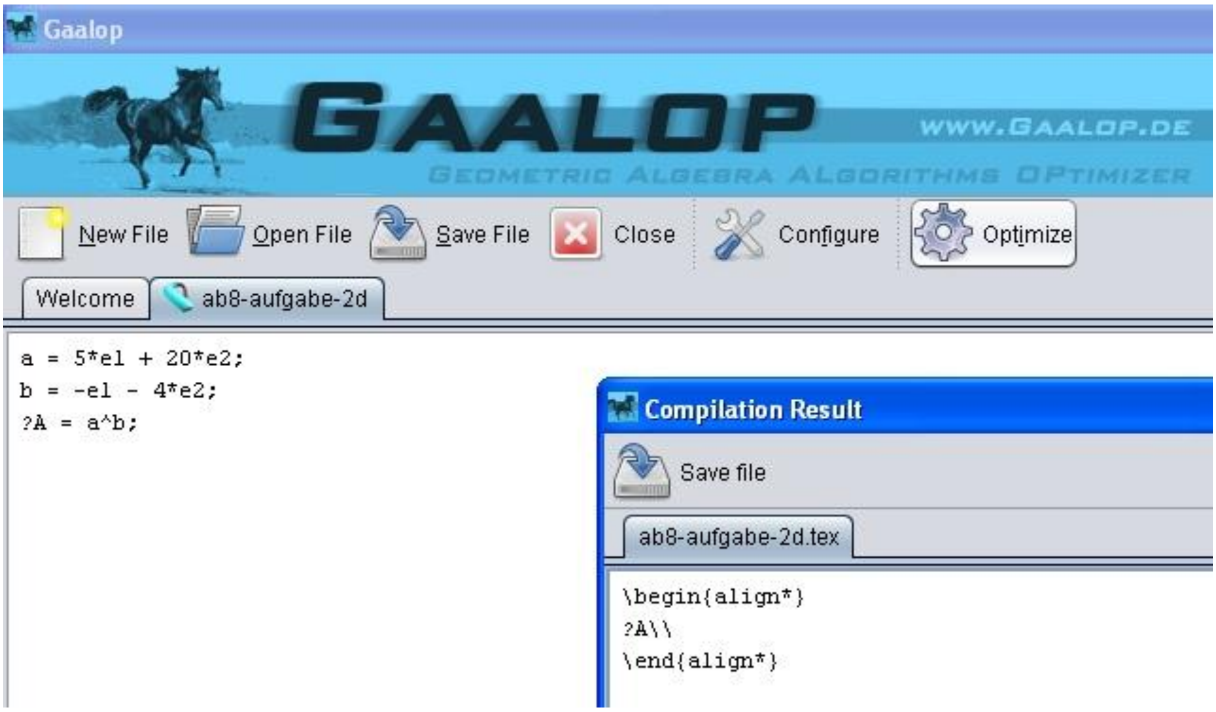
Da keine $\sigma_x\sigma_y$-Komponente A_{4} im Compiler-Feld aufgeführt wird, ist diese Null: A_{4}&= 0

Ergebnis in Pauli-Notation:

$\mathbf{A} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = 0\ \sigma_x\sigma_y \quad \Rightarrow \quad |\mathbf{A}| = 0$

$\Rightarrow$ Der Flächeninhalt beträgt 0 cm^2, da kein Parallelogramm mit den gegebenen Seitenvektoren gebildet werden kann.

2) d)



Da keine $\sigma_x\sigma_y$-Komponente A_{4} im Compiler-Feld aufgeführt wird, ist diese Null: A_{4} &= 0

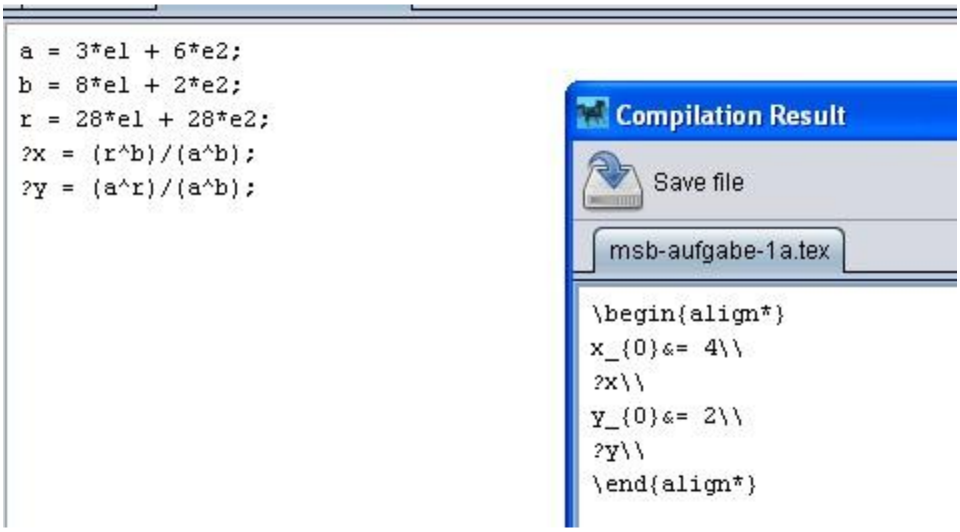
Ergebnis in Pauli-Notation:

$\mathbf{A} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = 0\ \sigma_x\sigma_y$ $\quad\Rightarrow\quad |\mathbf{A}| = 0$

$\Rightarrow$ Der Flächeninhalt beträgt 0 cm^2, da kein Parallelogramm mit den gegebenen Seitenvektoren gebildet werden kann.

Aufgabe 3 → Aufgaben 3 & 4 von Übungsblatt 8:

3) a) & 4)



Lösung des Linearen Gleichungssystems:

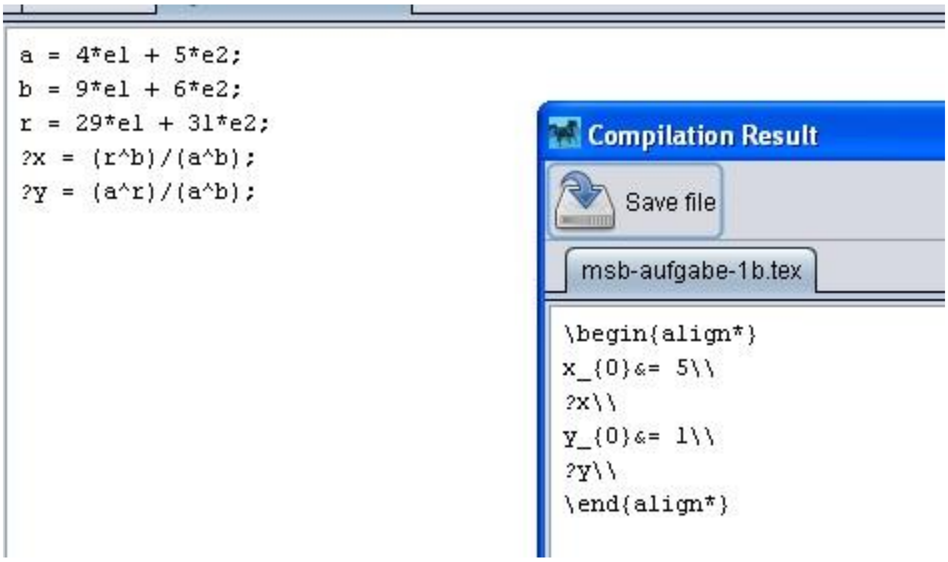
$x = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{r} \wedge \mathbf{b}) = (\mathbf{r} \wedge \mathbf{b}) \,/\, (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = 4$

$y = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{a} \wedge \mathbf{r}) = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{r}) \,/\, (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = 2$

Hinweis: Bei konsistenten, lösbaren linearen Gleichungssystemen weisen $(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})$, $(\mathbf{a} \wedge \mathbf{r})$ und $(\mathbf{r} \wedge \mathbf{b})$ die gleiche räumliche Orientierung auf (d.h. sie liegen parallel zueinander). Deshalb kommutieren diese äußeren Produkte miteinander und man kann ihre Reihenfolge beim Multiplizieren oder Dividieren vertauschen.

zu 4) Es werden 4 ME des ersten Endproduktes E_1 und 2 ME des zweiten Endproduktes E_2 hergestellt, wenn 28 ME des ersten Rohstoffes R_1 und 28 ME des zweiten Rohstoffes R_2 verbraucht werden.

3) b)

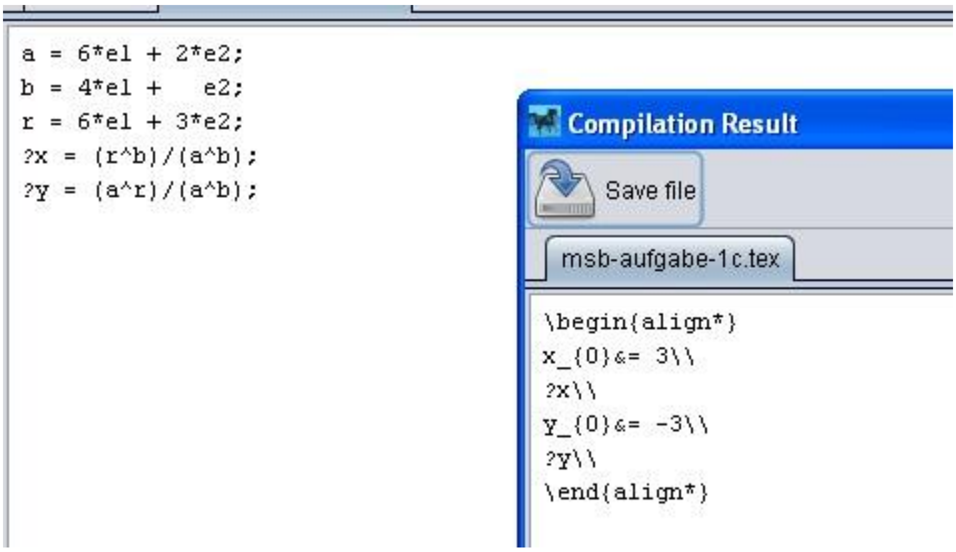


Lösung des Linearen Gleichungssystems:

x = (**r** ∧ **b**) / (**a** ∧ **b**) = 5

y = (**a** ∧ **r**) / (**a** ∧ **b**) = 1

3) c)

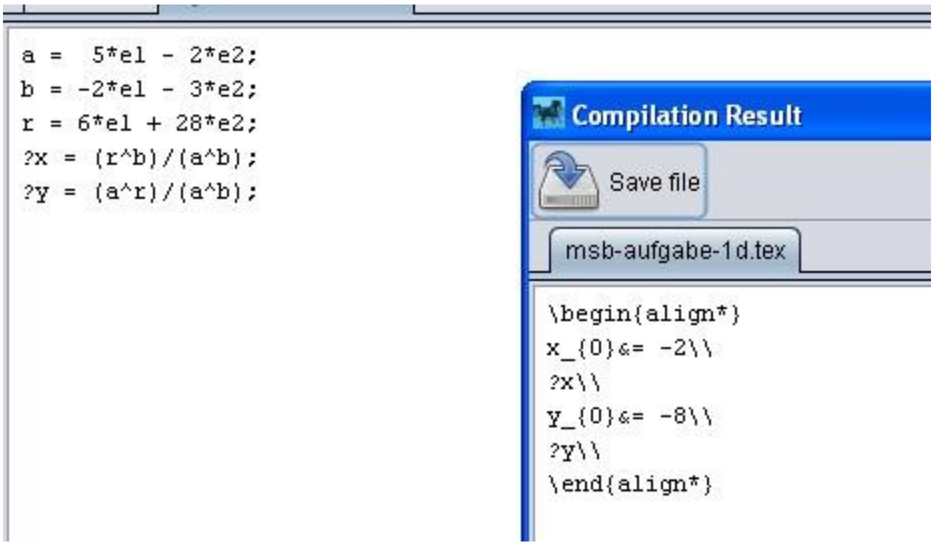


Lösung des Linearen Gleichungssystems:

x = (**r** ∧ **b**) / (**a** ∧ **b**) = 3

y = (**a** ∧ **r**) / (**a** ∧ **b**) = – 3

3) d)



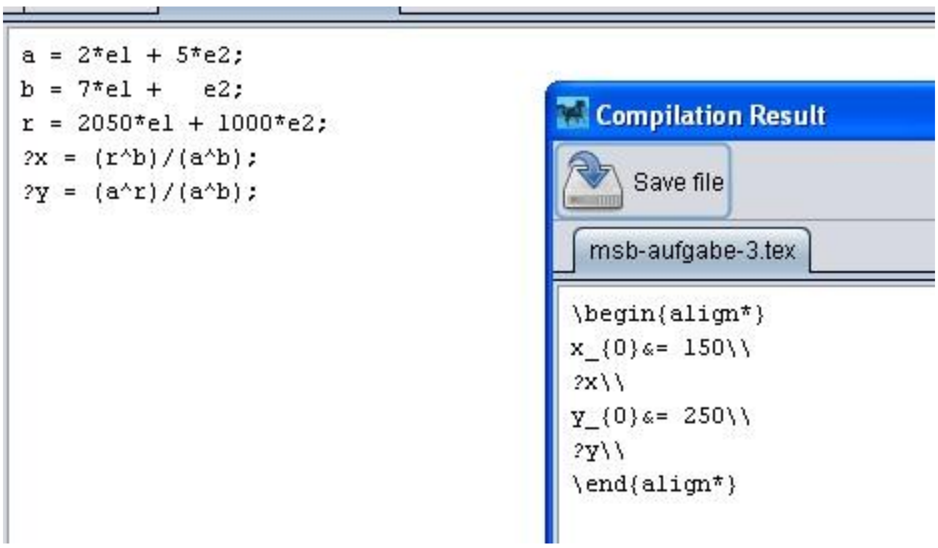
Lösung des Linearen Gleichungssystems:

x = (**r** ∧ **b**) / (**a** ∧ **b**) = – 2

y = (**a** ∧ **r**) / (**a** ∧ **b**) = – 8

Aufgabe 3 → Aufgabe 5 von Übungsblatt 8:

5)



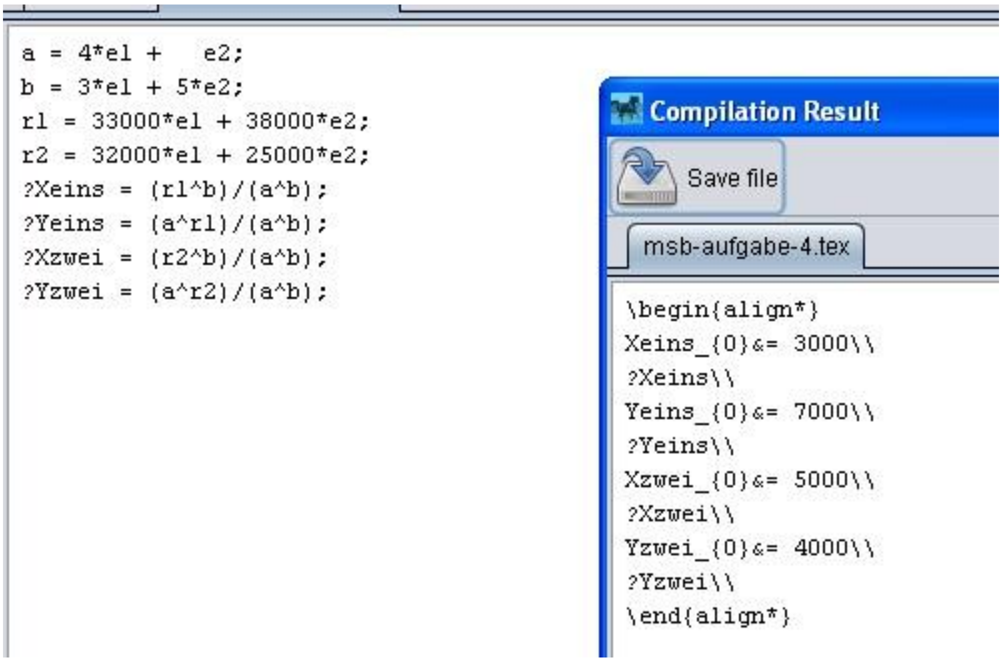
Lösung des Linearen Gleichungssystems:

x = (**r** ∧ **b**) / (**a** ∧ **b**) = 150

y = (**a** ∧ **r**) / (**a** ∧ **b**) = 250

⇒ Es werden 150 ME des ersten Endproduktes E_1 und 250 ME des zweiten Endproduktes E_2 hergestellt, wenn 2050 ME des ersten Rohstoffes R_1 und 1000 ME des zweiten Rohstoffes R_2 verbraucht werden.

Aufgabe 3 $\rightarrow$ Aufgabe 6 von Übungsblatt 8:

6) 

Lösungen der Linearen Gleichungssysteme:

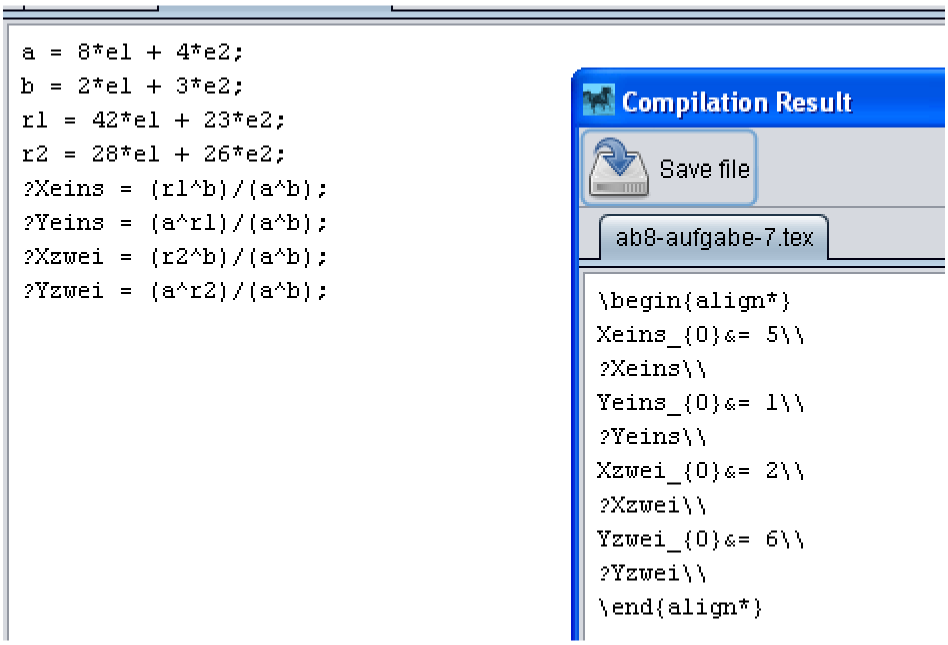
$x_1 = (\mathbf{r_1} \wedge \mathbf{b}) / (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = 3000$ $\qquad$ $x_2 = (\mathbf{r_2} \wedge \mathbf{b}) / (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = 5000$

$y_1 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{r_1}) / (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = 7000$ $\qquad$ $y_2 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{r_2}) / (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = 4000$

$\Rightarrow$ Im ersten Quartal werden 3000 ME des ersten Endproduktes E_1 und 7000 ME des zweiten Endproduktes E_2 hergestellt.

Im zweiten Quartal werden 5000 ME des ersten Endproduktes E_1 und 4000 ME des zweiten Endproduktes E_2 hergestellt.

Aufgabe 3 $\rightarrow$ Aufgabe 7 von Übungsblatt 8:

7) 

Lösungen der Linearen Gleichungssysteme:

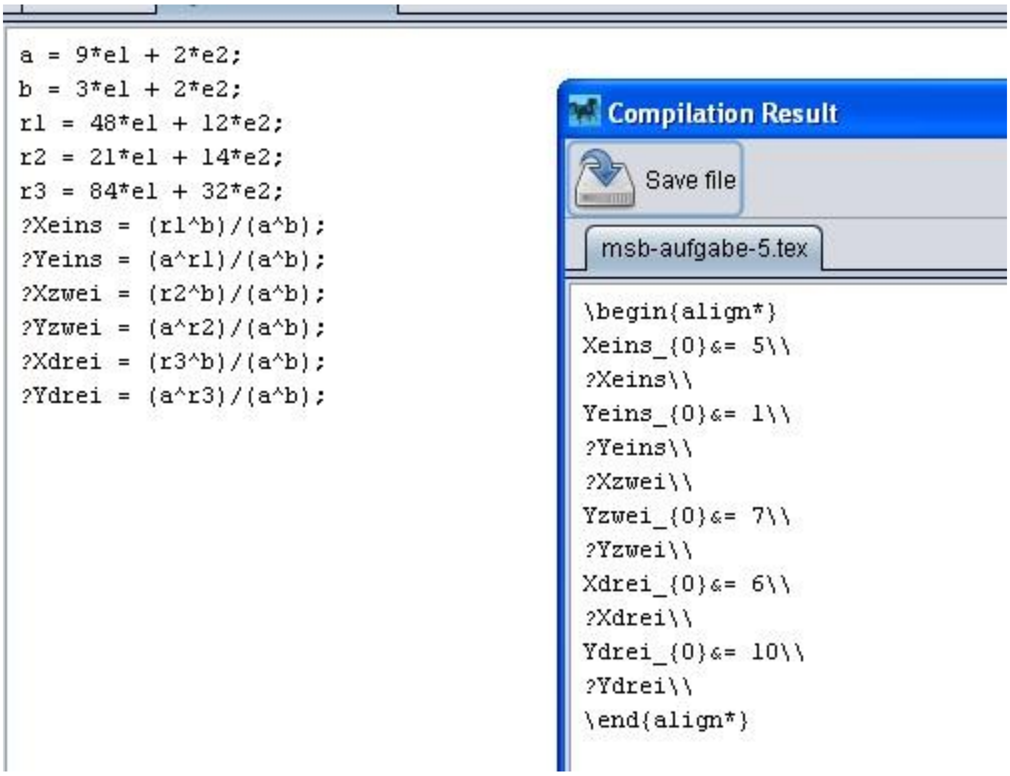
$x_1 = (\mathbf{r_1} \wedge \mathbf{b}) / (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = 5$ $\qquad$ $x_2 = (\mathbf{r_2} \wedge \mathbf{b}) / (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = 2$

$y_1 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{r_1}) / (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = 1$ $\qquad$ $y_2 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{r_2}) / (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = 6$

$\Rightarrow$ Die Zwischenbedarfsmatrix lautet: $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$

Aufgabe 3 $\rightarrow$ Aufgabe 8 von Übungsblatt 8:

8)



Da keine Skalar-Komponente Xzwei_{0} im Compiler-Feld aufgeführt wird, ist diese Null:
Xzwei_{0}&= 0

Lösungen der Linearen Gleichungssysteme:

$x_1 = (\mathbf{r_1} \wedge \mathbf{b}) / (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = 5$ $\qquad$ $x_2 = (\mathbf{r_2} \wedge \mathbf{b}) / (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = 0$ $\qquad$ $x_3 = (\mathbf{r_3} \wedge \mathbf{b}) / (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = 6$

$y_1 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{r_1}) / (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = 1$ $\qquad$ $y_2 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{r_2}) / (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = 7$ $\qquad$ $y_3 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{r_3}) / (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = 10$

$\Rightarrow$ Die Zwischenbedarfsmatrix lautet: $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 6 \\ 1 & 7 & 10 \end{pmatrix}$

Aufgabe 3 → Aufgabe 9 von Übungsblatt 8:

9)

```
a = 7*e1 + 4*e2;
b = 5*e1 + 3*e2;
r1 = e1;
r2 = e2;
?Xeins = (r1^b)/(a^b);
?Yeins = (a^r1)/(a^b);
?Xzwei = (r2^b)/(a^b);
?Yzwei = (a^r2)/(a^b);
```

Compilation Result

Save file

ab8-aufgabe-9.tex

```
\begin{align*}
Xeins_{0}&= 3\\
?Xeins\\
Yeins_{0}&= -4\\
?Yeins\\
Xzwei_{0}&= -5\\
?Xzwei\\
Yzwei_{0}&= 7\\
?Yzwei\\
\end{align*}
```

Lösungen der Linearen Gleichungssysteme:

$x_1 = (\mathbf{r_1} \wedge \mathbf{b}) \,/\, (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = \ \ 3$ $\qquad$ $x_2 = (\mathbf{r_2} \wedge \mathbf{b}) \,/\, (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = -5$

$y_1 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{r_1}) \,/\, (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = -4$ $\qquad$ $y_2 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{r_2}) \,/\, (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = \ \ 7$

$\Rightarrow$ Die Inverse der Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ lautet: $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$

Aufgabe 3 → Aufgabe 10 von Übungsblatt 8:

10)

```
a = 10*e1 + 4*e2;
b = 12*e1 + 5*e2;
r1 = e1;
r2 = e2;
?Xeins = (r1^b)/(a^b);
?Yeins = (a^r1)/(a^b);
?Xzwei = (r2^b)/(a^b);
?Yzwei = (a^r2)/(a^b);
```

Compilation Result

Save file

ab8-aufgabe-10.tex

```
\begin{align*}
Xeins_{0}&= 2.5\\
?Xeins\\
Yeins_{0}&= -2\\
?Yeins\\
Xzwei_{0}&= -6\\
?Xzwei\\
Yzwei_{0}&= 5\\
?Yzwei\\
\end{align*}
```

Lösungen der Linearen Gleichungssysteme:

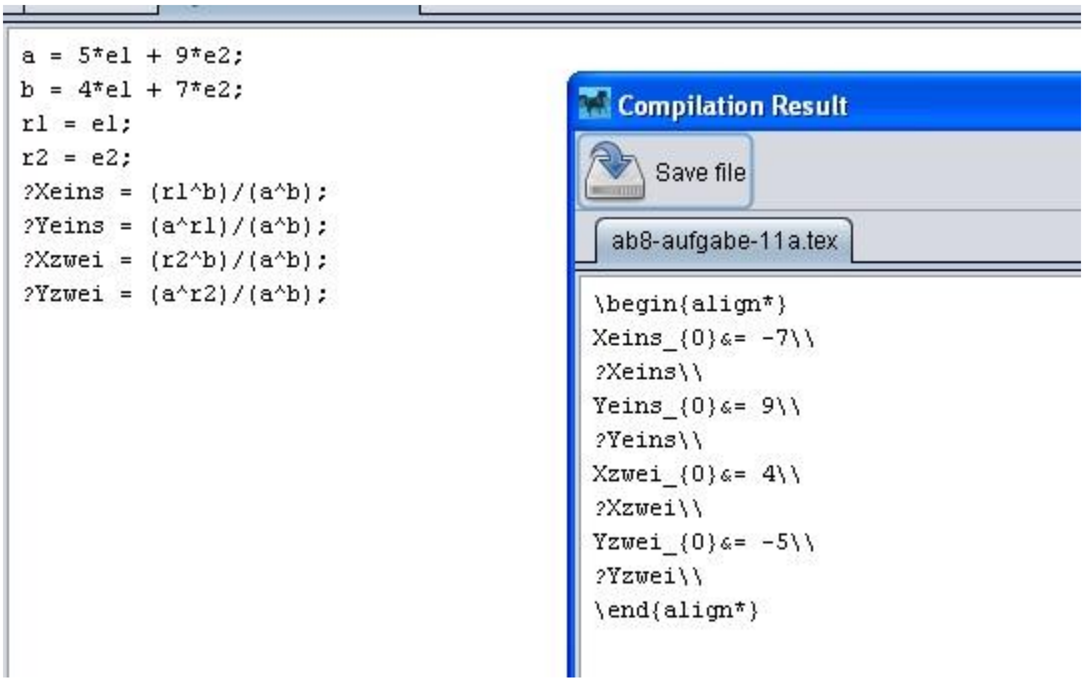
$x_1 = (\mathbf{r_1} \wedge \mathbf{b}) / (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = \dfrac{5}{2} = 2{,}5$ $\qquad$ $x_2 = (\mathbf{r_2} \wedge \mathbf{b}) / (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = \dfrac{-12}{2} = -6$

$y_1 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{r_1}) / (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = \dfrac{-4}{2} = -2$ $\qquad$ $y_2 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{r_2}) / (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = \dfrac{10}{2} = 5$

$\Rightarrow$ Die Inverse der Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 10 & 12 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ lautet: $\mathbf{A}^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & -12 \\ -4 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}5 & -6 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$

Aufgabe 3 $\rightarrow$ Aufgabe 11 von Übungsblatt 8:

11) a)



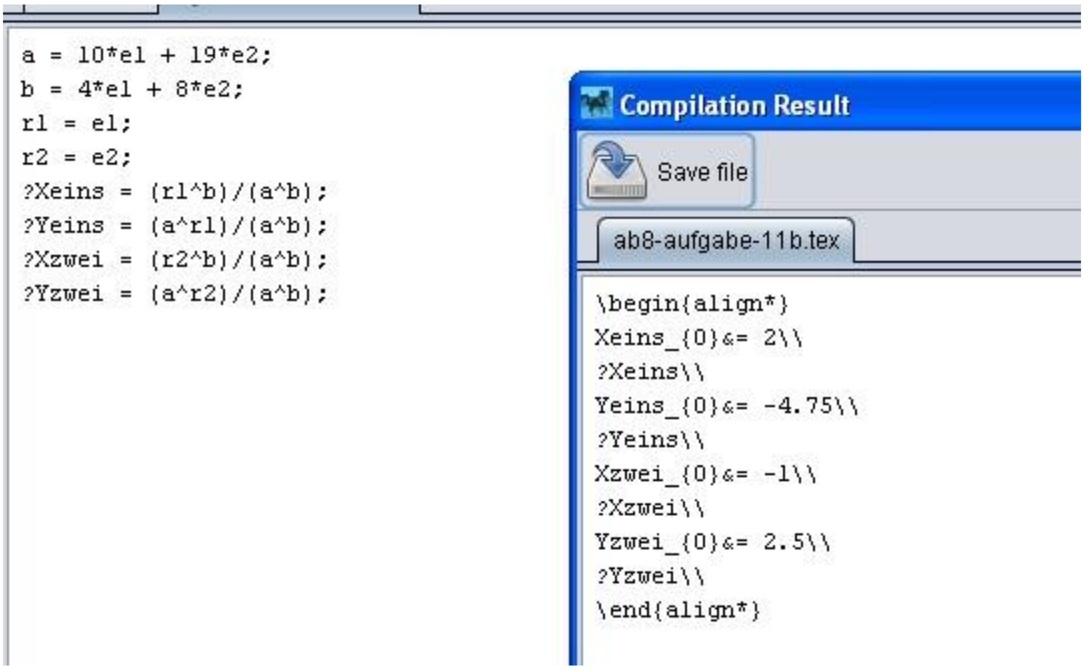
Lösungen der Linearen Gleichungssysteme:

$x_1 = (\mathbf{r_1} \wedge \mathbf{b}) / (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = \dfrac{7}{-1} = -7$ $\qquad$ $x_2 = (\mathbf{r_2} \wedge \mathbf{b}) / (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = \dfrac{-4}{-1} = 4$

$y_1 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{r_1}) / (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = \dfrac{-9}{-1} = 9$ $\qquad$ $y_2 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{r_2}) / (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = \dfrac{5}{-1} = -5$

$\Rightarrow$ Die Inverse der Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 9 & 7 \end{pmatrix}$ lautet: $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & 4 \\ 9 & -5 \end{pmatrix}$

11) b)



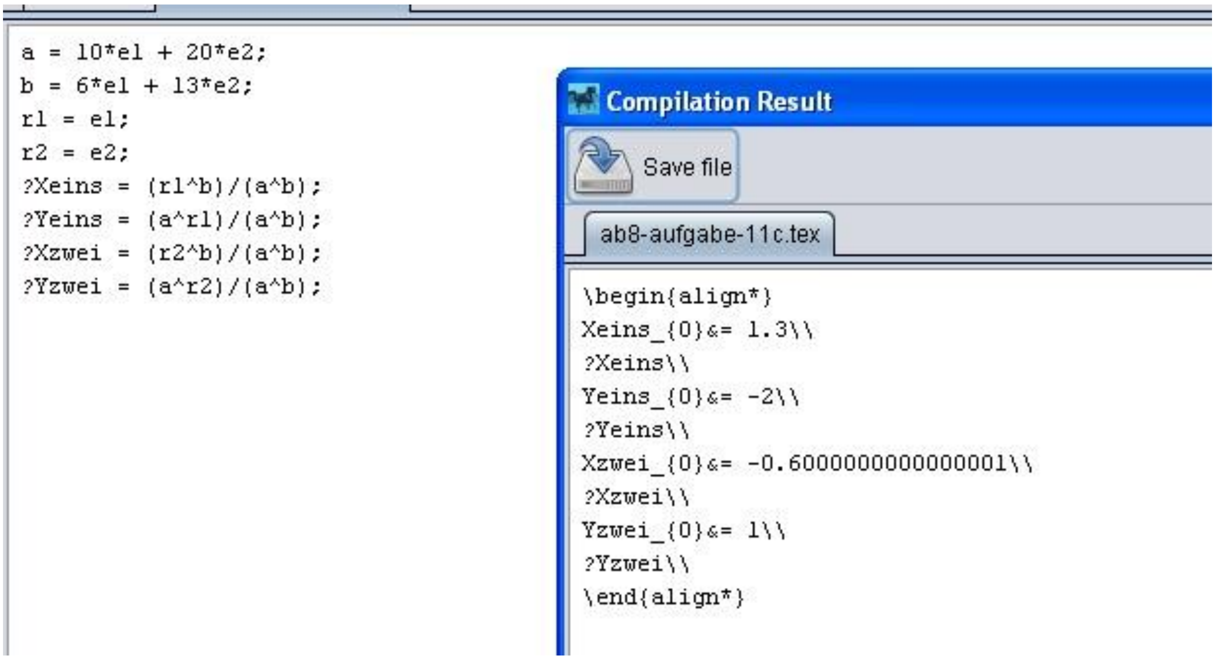
Lösungen der Linearen Gleichungssysteme:

$x_1 = (\mathbf{r_1} \wedge \mathbf{b}) \,/\, (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = \dfrac{8}{4} = 2$ $\qquad$ $x_2 = (\mathbf{r_2} \wedge \mathbf{b}) \,/\, (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = \dfrac{-4}{4} = -1$

$y_1 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{r_1}) \,/\, (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = \dfrac{-19}{4} = -4{,}75$ $\qquad$ $y_2 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{r_2}) \,/\, (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = \dfrac{10}{4} = 2{,}5$

$\Rightarrow$ Die Inverse der Matrix $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 19 & 8 \end{pmatrix}$ lautet: $\mathbf{B}^{-1} = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -19 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4{,}75 & 2{,}5 \end{pmatrix}$

11) c)



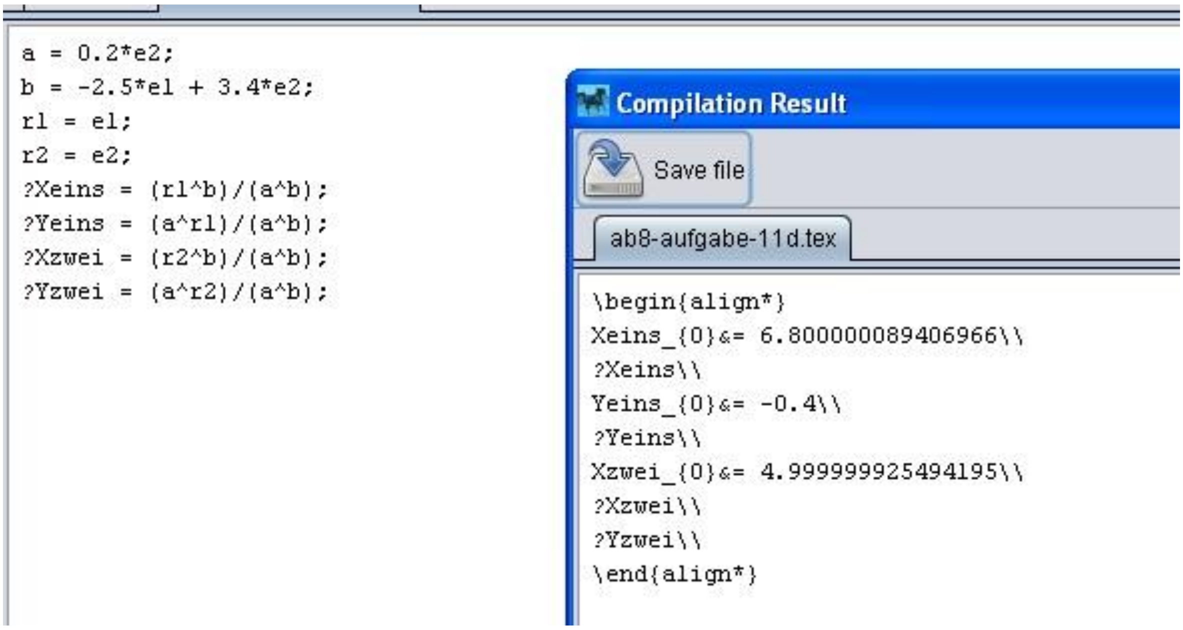
Lösungen der Linearen Gleichungssysteme:

$x_1 = (\mathbf{r_1} \wedge \mathbf{b}) \,/\, (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = \dfrac{13}{10} = 1{,}3 \qquad x_2 = (\mathbf{r_2} \wedge \mathbf{b}) \,/\, (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = \dfrac{-6}{10} = -0{,}6$

$y_1 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{r_1}) \,/\, (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = \dfrac{-20}{10} = -2 \qquad y_2 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{r_2}) \,/\, (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = \dfrac{10}{10} = 1$

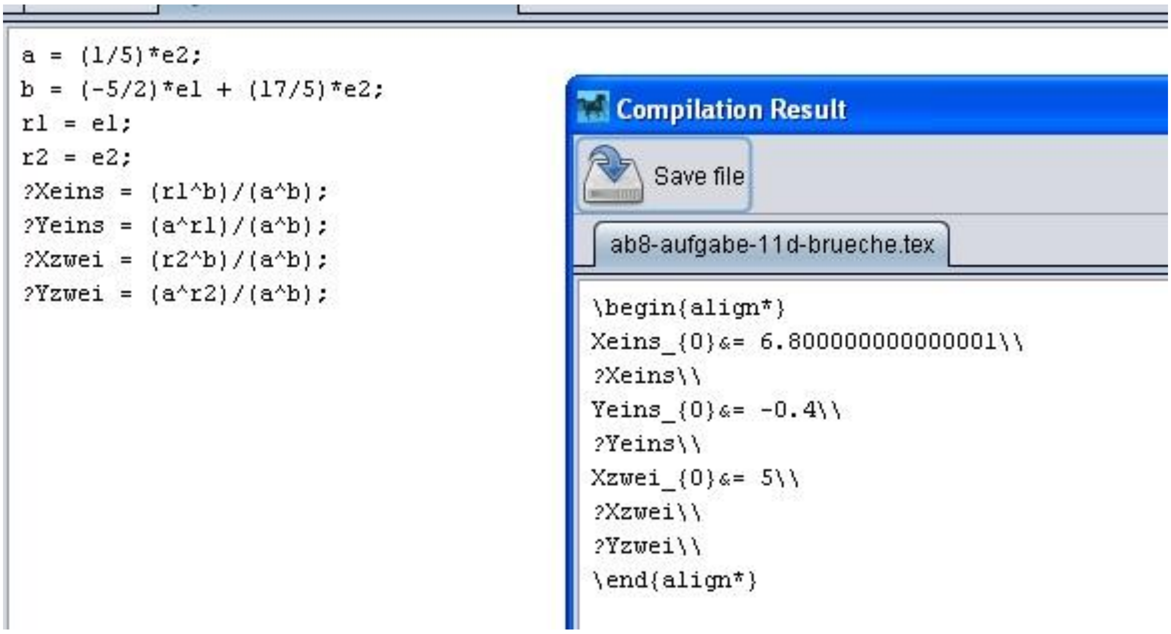
$\Rightarrow$ Die Inverse der Matrix $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 10 & 6 \\ 20 & 13 \end{pmatrix}$ lautet: $\mathbf{C}^{-1} = \dfrac{1}{10}\begin{pmatrix} 13 & -6 \\ -20 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}3 & -0{,}6 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

11) d) Lösung mit ungenauem Ergebnis:



Auch hier führt die Verwendung von Dezimalzahlen zu einem ungenauen Resultat. Ein korrektes Ergebnis ergibt sich wieder mit Hilfe ganzzahliger Bruchdarstellungen.

Lösung mit genauerem Ergebnis:



Da keine Skalar-Komponente Yzwei_{0} im Compiler-Feld aufgeführt wird, ist diese Komponente Null: Yzwei_{0} &= 0

Lösungen der Linearen Gleichungssysteme:

$$x_1 = (\mathbf{r_1} \wedge \mathbf{b}) / (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = \frac{34}{5} = 6{,}8 \qquad x_2 = (\mathbf{r_2} \wedge \mathbf{b}) / (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = \frac{25}{5} = 5$$

$$y_1 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{r_1}) / (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = \frac{-2}{5} = -0{,}4 \qquad y_2 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{r_2}) / (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = \frac{0}{5} = 0$$

$\Rightarrow$ Die Inverse der Matrix $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & -2{,}5 \\ 0{,}2 & 3{,}4 \end{pmatrix}$ lautet: $\mathbf{D}^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 34 & 25 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6{,}8 & 5 \\ -0{,}4 & 0 \end{pmatrix}$

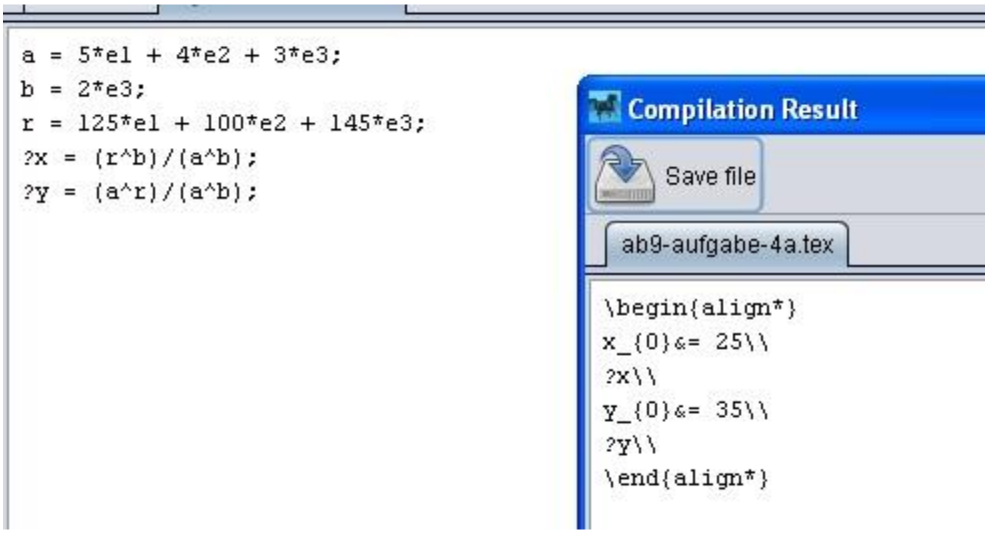
Aufgabe 4:

a) $5\,x + 0\,y = 125 \qquad \Rightarrow \quad \mathbf{a} = 5\,\sigma_x + 4\,\sigma_y + 3\,\sigma_z$

$4\,x + 0\,y = 100 \qquad \mathbf{b} = 2\,\sigma_z$

$3\,x + 2\,y = 145 \qquad \mathbf{r} = 125\,\sigma_x + 100\,\sigma_y + 145\,\sigma_z$

Lösung mit Hilfe von GAALOP:



Lösung des Linearen Gleichungssystems:

$x = (\mathbf{r} \wedge \mathbf{b}) / (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = 25$

$y = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{r}) / (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = 35$

Probe: $5 \cdot 25 + 0 \cdot 35 = 125 + 0 = 125$

$4 \cdot 25 + 0 \cdot 35 = 100 + 0 = 100$

$3 \cdot 25 + 2 \cdot 35 = 75 + 70 = 145$

Ausführliche Berechnung der Zwischenschritte:

$\mathbf{a}\,\mathbf{b} = (5\,\sigma_x + 4\,\sigma_y + 3\,\sigma_z)\,(2\,\sigma_z)$

$= 10\,\sigma_x\sigma_z + 8\,\sigma_y\sigma_z + 6\,\sigma_z^2$

$= 6 + 8\,\sigma_y\sigma_z - 10\,\sigma_z\sigma_x$

$\Rightarrow \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = 8\,\sigma_y\sigma_z - 10\,\sigma_z\sigma_x$

$\mathbf{r}\,\mathbf{b} = (125\,\sigma_x + 100\,\sigma_y + 145\,\sigma_z)\,(2\,\sigma_z)$

$= 250\,\sigma_x\sigma_z + 200\,\sigma_y\sigma_z + 190\,\sigma_z^2$

$= 190 + 200\,\sigma_y\sigma_z - 250\,\sigma_z\sigma_x$

$\Rightarrow\ \mathbf{r} \wedge \mathbf{b} = 200\,\sigma_y\sigma_z - 250\,\sigma_z\sigma_x$

$$x = \frac{\mathbf{r} \wedge \mathbf{b}}{\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}} = \frac{200\,\sigma_y\sigma_z - 250\,\sigma_z\sigma_x}{8\,\sigma_y\sigma_z - 10\,\sigma_z\sigma_x} = \frac{25\,(8\,\sigma_y\sigma_z - 10\,\sigma_z\sigma_x)}{8\,\sigma_y\sigma_z - 10\,\sigma_z\sigma_x} = 25$$

$\mathbf{a}\,\mathbf{r} = (5\,\sigma_x + 4\,\sigma_y + 3\,\sigma_z)\,(125\,\sigma_x + 100\,\sigma_y + 145\,\sigma_z)$

$= 625\,\sigma_x^2 + 500\,\sigma_x\sigma_y + 725\,\sigma_x\sigma_z + 500\,\sigma_y\sigma_x + 400\,\sigma_y^2 + 580\,\sigma_y\sigma_z + 375\,\sigma_z\sigma_x + 300\,\sigma_z\sigma_y + 435\,\sigma_z^2$

$= 1460 + 0\,\sigma_x\sigma_y + 280\,\sigma_y\sigma_z - 350\,\sigma_z\sigma_x$

$\Rightarrow\ \mathbf{a} \wedge \mathbf{r} = 280\,\sigma_y\sigma_z - 350\,\sigma_z\sigma_x$

$$y = \frac{\mathbf{a} \wedge \mathbf{r}}{\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}} = \frac{280\,\sigma_y\sigma_z - 350\,\sigma_z\sigma_x}{8\,\sigma_y\sigma_z - 10\,\sigma_z\sigma_x} = \frac{35\,(8\,\sigma_y\sigma_z - 10\,\sigma_z\sigma_x)}{8\,\sigma_y\sigma_z - 10\,\sigma_z\sigma_x} = 35$$

Vergleich mit konventioneller Lösung:

$5\,x + 0\,y = 125 \quad\Rightarrow\quad 5\,x = 125 \quad\Rightarrow\quad x = \frac{125}{5} = 25$

$4\,x + 0\,y = 100 \quad\Rightarrow\quad 4\,x = 100 \quad\Rightarrow\quad x = \frac{100}{4} = 25$

$3\,x + 2\,y = 145 \quad\Rightarrow\quad 75 + 2\,y = 145 \quad\Rightarrow\quad 2\,y = 70 \quad\Rightarrow\quad y = \frac{70}{2} = 35$

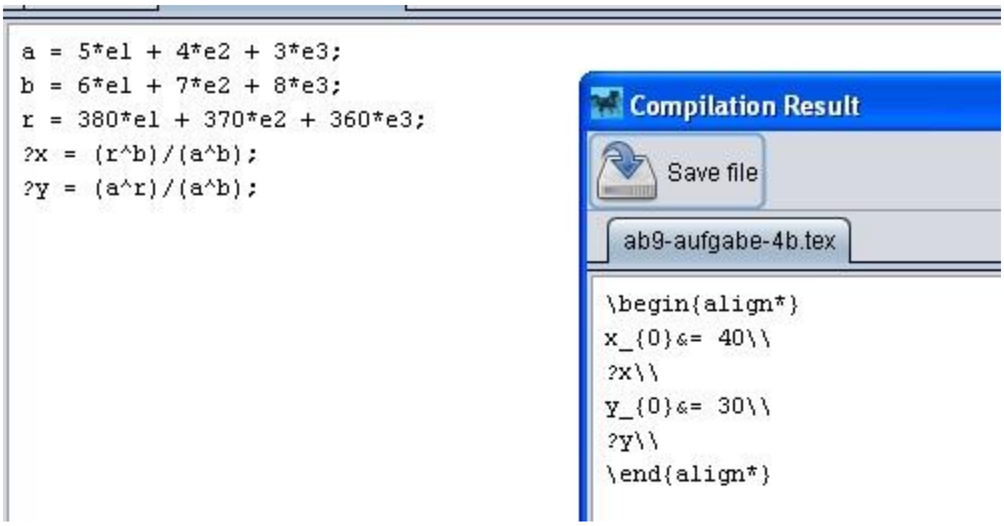
$\Rightarrow$ Es werden 25 ME des ersten Endproduktes E_1 und 35 ME des zweiten Endprodukte E_2 hergestellt, wenn 125 ME des Rohstoffes R_1, 100 ME des Rohstoffes R_2 und 145 ME des Rohstoffes R_3 verbraucht werden.

b) $5\,x + 6\,y = 380 \qquad\Rightarrow\quad \mathbf{a} = 5\,\sigma_x + 4\,\sigma_y + 3\,\sigma_z$

$4\,x + 7\,y = 370 \qquad\quad \mathbf{b} = 6\,\sigma_x + 7\,\sigma_y + 8\,\sigma_z$

$3\,x + 8\,y = 360 \qquad\quad \mathbf{r} = 380\,\sigma_x + 370\,\sigma_y + 360\,\sigma_z$

Lösung mit Hilfe von GAALOP:



Lösung des Linearen Gleichungssystems:

$x = (\mathbf{r} \wedge \mathbf{b}) / (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = 40$

$y = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{r}) / (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = 30$

Probe:
$$5 \cdot 40 + 6 \cdot 30 = 125 + 0 = 380$$
$$4 \cdot 40 + 7 \cdot 30 = 100 + 0 = 370$$
$$3 \cdot 40 + 8 \cdot 30 = 75 + 70 = 360$$

Ausführliche Berechnung der Zwischenschritte:

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\,\mathbf{b} &= (5\,\sigma_x + 4\,\sigma_y + 3\,\sigma_z)\,(6\,\sigma_x + 7\,\sigma_y + 8\,\sigma_z)\\ &= 30\,\sigma_x^2 + 35\,\sigma_x\sigma_y + 40\,\sigma_x\sigma_z + 24\,\sigma_y\sigma_x + 28\,\sigma_y^2 + 32\,\sigma_y\sigma_z + 18\,\sigma_z\sigma_x + 21\,\sigma_z\sigma_y + 24\,\sigma_z^2\\ &= 82 + 11\,\sigma_x\sigma_y + 11\,\sigma_y\sigma_z - 22\,\sigma_z\sigma_x\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = 11\,\sigma_x\sigma_y + 11\,\sigma_y\sigma_z - 22\,\sigma_z\sigma_x$

$$\begin{aligned}\mathbf{r}\,\mathbf{b} &= (380\,\sigma_x + 370\,\sigma_y + 360\,\sigma_z)\,(6\,\sigma_x + 7\,\sigma_y + 8\,\sigma_z)\\ &= 2280\,\sigma_x^2 + 2660\,\sigma_x\sigma_y + 3040\,\sigma_x\sigma_z + 2220\,\sigma_y\sigma_x + 2590\,\sigma_y^2 + 2960\,\sigma_y\sigma_z\\ &\qquad + 2160\,\sigma_z\sigma_x + 2520\,\sigma_z\sigma_y + 2880\,\sigma_z^2\\ &= 7750 + 440\,\sigma_x\sigma_y + 440\,\sigma_y\sigma_z - 880\,\sigma_z\sigma_x\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $\mathbf{r} \wedge \mathbf{b} = 440\,\sigma_x\sigma_y + 440\,\sigma_y\sigma_z - 880\,\sigma_z\sigma_x$

$$x = \frac{\mathbf{r} \wedge \mathbf{b}}{\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}} = \frac{440\,\sigma_x\sigma_y + 440\,\sigma_y\sigma_z - 880\,\sigma_z\sigma_x}{11\,\sigma_x\sigma_y + 11\,\sigma_y\sigma_z - 22\,\sigma_z\sigma_x} = \frac{40\,(11\,\sigma_x\sigma_y + 11\,\sigma_y\sigma_z - 22\,\sigma_z\sigma_x)}{11\,\sigma_x\sigma_y + 11\,\sigma_y\sigma_z - 22\,\sigma_z\sigma_x} = 40$$

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\,\mathbf{r} &= (5\,\sigma_x + 4\,\sigma_y + 3\,\sigma_z)\,(380\,\sigma_x + 370\,\sigma_y + 360\,\sigma_z)\\ &= 1900\,\sigma_x^2 + 1850\,\sigma_x\sigma_y + 1800\,\sigma_x\sigma_z + 1520\,\sigma_y\sigma_x + 1480\,\sigma_y^2 + 1440\,\sigma_y\sigma_z\\ &\qquad + 1140\,\sigma_z\sigma_x + 1110\,\sigma_z\sigma_y + 1080\,\sigma_z^2\\ &= 4460 + 330\,\sigma_x\sigma_y + 330\,\sigma_y\sigma_z - 660\,\sigma_z\sigma_x\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $\mathbf{a} \wedge \mathbf{r} = 330\,\sigma_x\sigma_y + 330\,\sigma_y\sigma_z - 660\,\sigma_z\sigma_x$

$$y = \frac{\mathbf{a} \wedge \mathbf{r}}{\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}} = \frac{330\,\sigma_x\sigma_y + 330\,\sigma_y\sigma_z - 660\,\sigma_z\sigma_x}{11\,\sigma_x\sigma_y + 11\,\sigma_y\sigma_z - 22\,\sigma_z\sigma_x} = \frac{30\,(11\,\sigma_x\sigma_y + 11\,\sigma_y\sigma_z - 22\,\sigma_z\sigma_x)}{11\,\sigma_x\sigma_y + 11\,\sigma_y\sigma_z - 22\,\sigma_z\sigma_x} = 30$$

Vergleich mit konventioneller Lösung:

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}5\,x + 6\,y = 380\\ 4\,x + 7\,y = 370\end{array}\right\}\ 9\,x + 13\,y = 750\\ 3\,x + 8\,y = 360 \ \Rightarrow\ 9\,x + 24\,y = 1080\end{array}\right\}\ 11\,y = 330 \ \Rightarrow\ y = \frac{330}{11} = 30 \ \Rightarrow\ 5\,x + 180 = 380 \ \Rightarrow\ 5\,x = 200 \quad x = \frac{200}{5} = 40$$

$\Rightarrow$ Es werden 40 ME des ersten Endproduktes E_1 und 30 ME des zweiten Endprodukte E_2 hergestellt, wenn 380 ME des Rohstoffes R_1, 370 ME des Rohstoffes R_2 und 360 ME des Rohstoffes R_3 verbraucht werden.

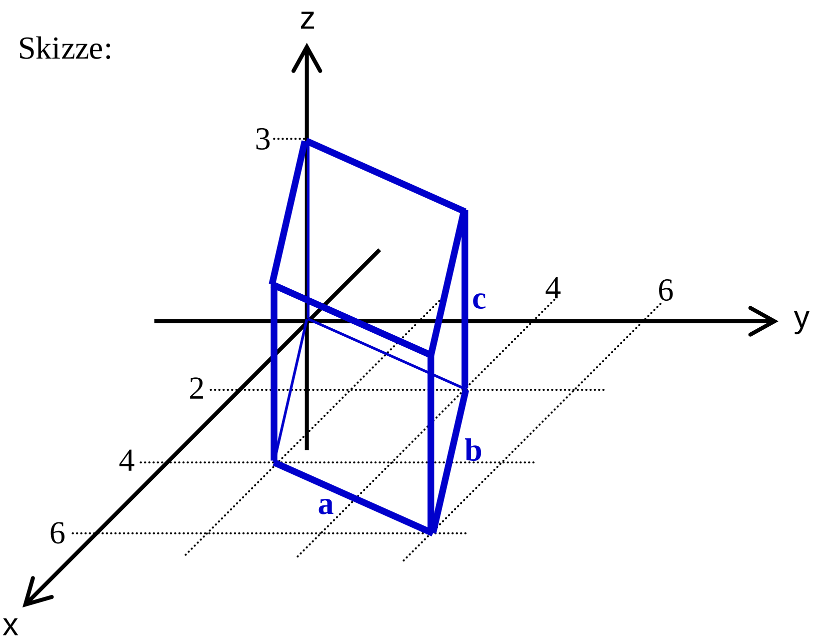
Aufgabe 5:

a) $\mathbf{a} = 4\,\sigma_x + 2\,\sigma_y$

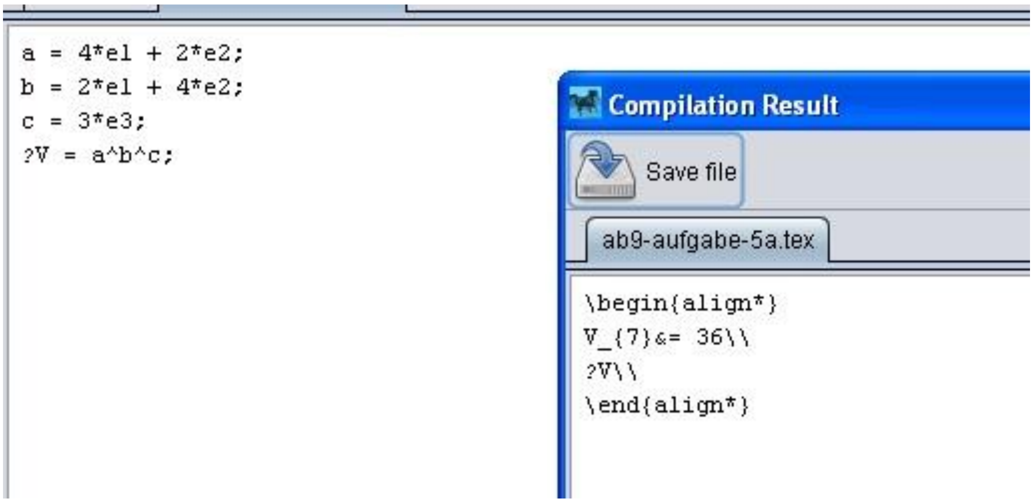
$\mathbf{b} = 2\,\sigma_x + 4\,\sigma_y$

$\mathbf{c} = 3\,\sigma_z$

Skizze:



Lösung mit Hilfe von GAALOP:



Ausführliche Rechnung:

$\mathbf{a}\,\mathbf{b} = (4\,\sigma_x + 2\,\sigma_y)\,(2\,\sigma_x + 4\,\sigma_y) = 16 + 12\,\sigma_x\sigma_y \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = 12\,\sigma_x\sigma_y$

$\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c} = (16 + 12\,\sigma_x\sigma_y)\,(3\,\sigma_z) = 48\,\sigma_z + 36\,\sigma_x\sigma_y\sigma_z \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} = 36\,\sigma_x\sigma_y\sigma_z$

$\Rightarrow \quad |\mathbf{V}| = 36$

$\Rightarrow$ Das Volumen des Parallelepipeds beträgt 36 cm^3.

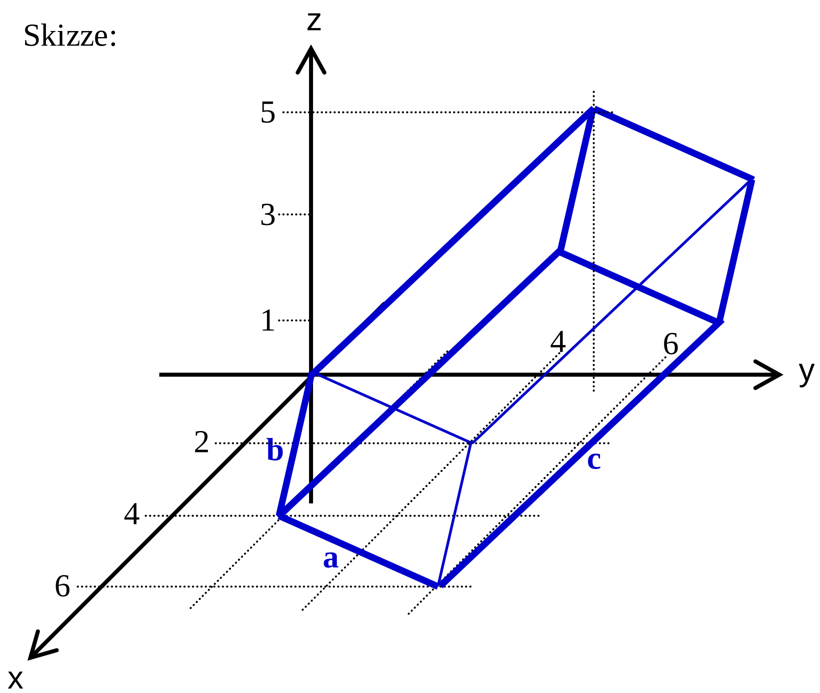
Probe mit der Regel von Sarrus:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{ccccc} \mathbf{4} & \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{4} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{4} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ - \; - \; - & & & + \; + \; + & \end{array}$$

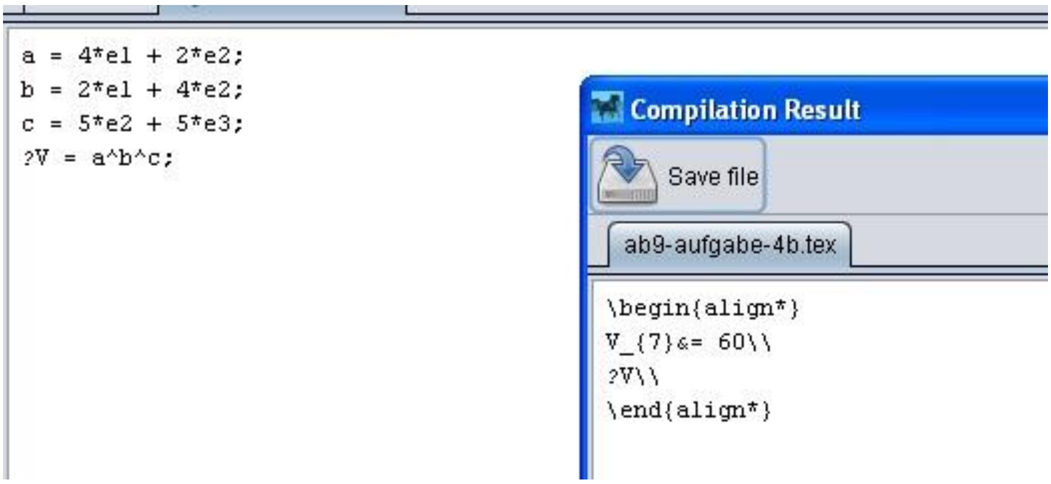
$\det \mathbf{A} = 4 \cdot 4 \cdot 3 + 2 \cdot 0 \cdot 0 + 0 \cdot 2 \cdot 0 - 0 \cdot 4 \cdot 0 - 4 \cdot 0 \cdot 0 - 2 \cdot 2 \cdot 3 = 48 - 12 = 36$

b) $\mathbf{a} = 4\,\sigma_x + 2\,\sigma_y$
$\mathbf{b} = 2\,\sigma_x + 4\,\sigma_y$
$\mathbf{c} = 5\,\sigma_y + 5\,\sigma_z$

Skizze:



Lösung mit Hilfe von GAALOP:



Ausführliche Rechnung:

$\mathbf{a}\,\mathbf{b} = (4\,\sigma_x + 2\,\sigma_y)\,(2\,\sigma_x + 4\,\sigma_y) = 16 + 12\,\sigma_x\sigma_y \qquad \Rightarrow \quad \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = 12\,\sigma_x\sigma_y$

$\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c} = (16 + 12\,\sigma_x\sigma_y)\,(5\,\sigma_y + 5\,\sigma_z) = 60\,\sigma_x + 80\,\sigma_y + 80\,\sigma_z + 60\,\sigma_x\sigma_y\sigma_z$

$\Rightarrow \quad \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} = 60\,\sigma_x\sigma_y\sigma_z$

$\Rightarrow \quad |\mathbf{V}| = 60$

$\Rightarrow$ Das Volumen des Parallelepipeds beträgt 60 cm^3.

Probe mit der Regel von Sarrus:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{ccccc} \mathbf{4} & \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{4} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{2} & \mathbf{4} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{5} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ - & - & - & + & + \quad + \end{array}$$

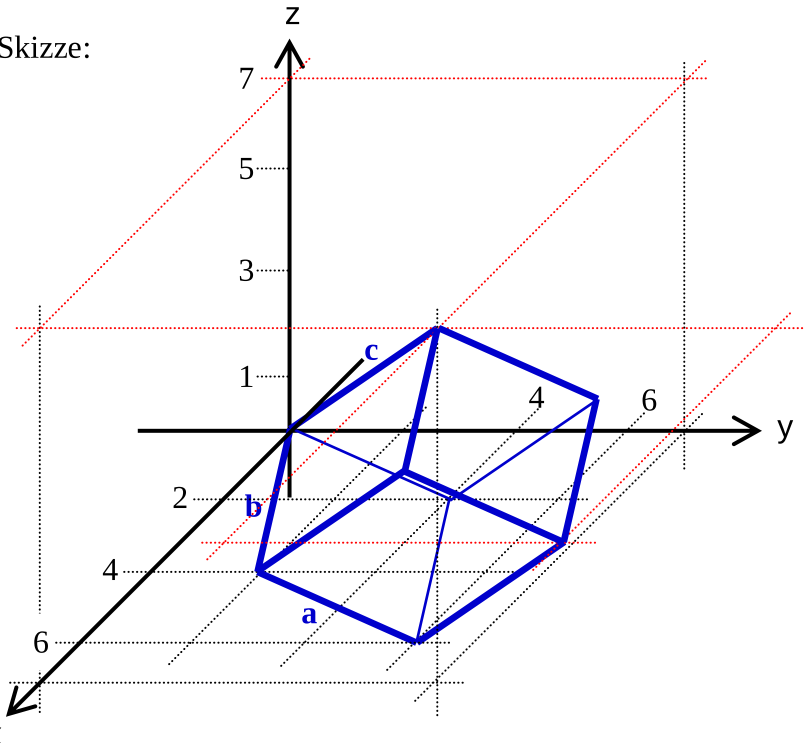
$\det \mathbf{B} = 4 \cdot 4 \cdot 5 + 2 \cdot 5 \cdot 0 + 0 \cdot 2 \cdot 0 - 0 \cdot 4 \cdot 0 - 4 \cdot 5 \cdot 0 - 2 \cdot 2 \cdot 5 = 80 - 20 = 60$

c) $\mathbf{a} = 4\,\sigma_x + 2\,\sigma_y$

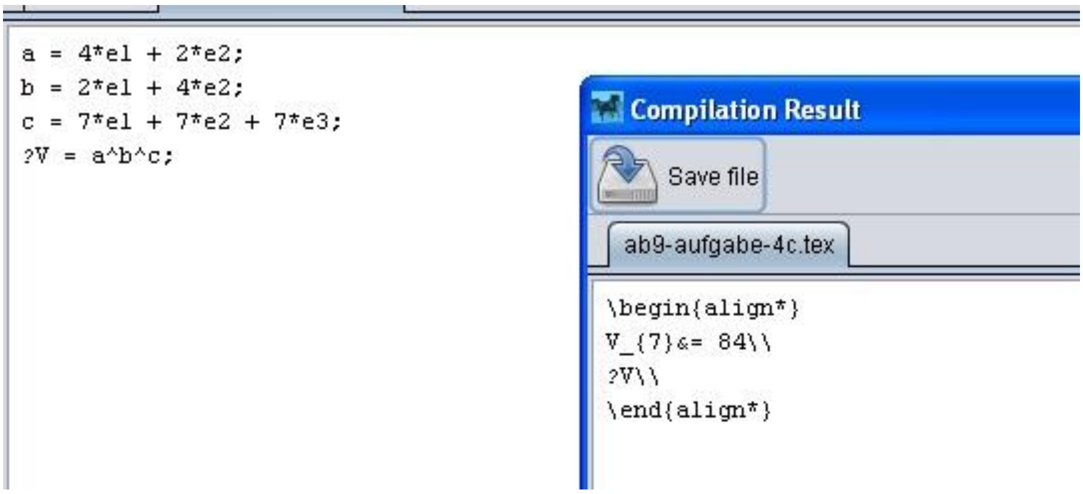
$\mathbf{b} = 2\,\sigma_x + 4\,\sigma_y$

$\mathbf{c} = 7\,\sigma_x + 7\,\sigma_y + 7\,\sigma_z$

Skizze:



Lösung mit Hilfe von GAALOP:



Ausführliche Rechnung:

$\mathbf{a}\,\mathbf{b} = (4\,\sigma_x + 2\,\sigma_y)\,(2\,\sigma_x + 4\,\sigma_y) = 16 + 12\,\sigma_x\sigma_y \qquad \Rightarrow \quad \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = 12\,\sigma_x\sigma_y$

$\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c} = (16 + 12\,\sigma_x\sigma_y)\,(7\,\sigma_x + 7\,\sigma_y + 7\,\sigma_z) = 112\,\sigma_x + 28\,\sigma_y + 112\,\sigma_z + 84\,\sigma_x\sigma_y\sigma_z$

$\Rightarrow \quad \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} = 84\,\sigma_x\sigma_y\sigma_z$

$\Rightarrow \quad |\mathbf{V}| = 84$

$\Rightarrow$ Das Volumen des Parallelepipeds beträgt 84 cm^3.

Probe mit der Regel von Sarrus:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 7 \\ 2 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{ccccc} \mathbf{4} & \mathbf{2} & \mathbf{7} & \mathbf{4} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{7} & \mathbf{2} & \mathbf{4} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{7} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ - & - & - & + & + \quad + \end{array}$$

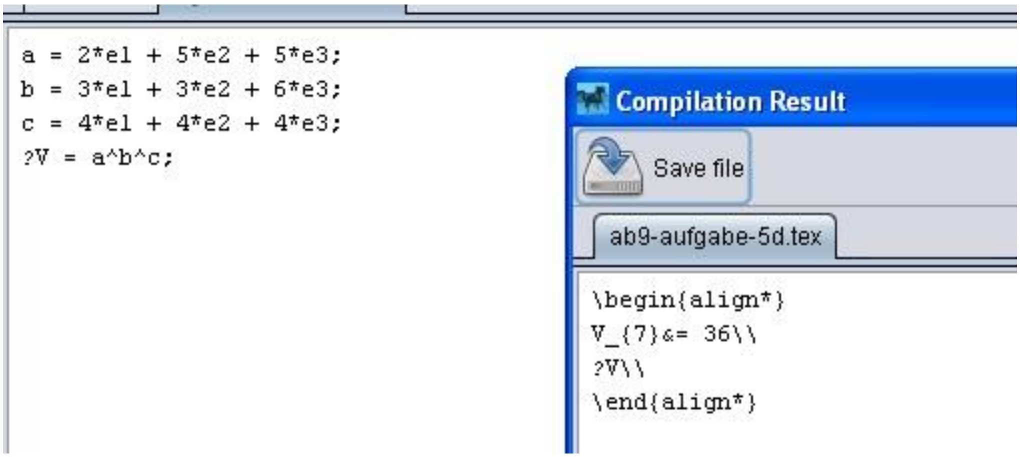
$\det \mathbf{C} = 4 \cdot 4 \cdot 7 + 2 \cdot 7 \cdot 0 + 7 \cdot 2 \cdot 0 - 7 \cdot 4 \cdot 0 - 4 \cdot 7 \cdot 0 - 2 \cdot 2 \cdot 7 = 112 - 28 = 84$

d) $\mathbf{a} = 2\,\sigma_x + 5\,\sigma_y + 5\,\sigma_z$

$\mathbf{b} = 3\,\sigma_x + 3\,\sigma_y + 6\,\sigma_z$

$\mathbf{c} = 4\,\sigma_x + 4\,\sigma_y + 4\,\sigma_z$

Lösung mit Hilfe von GAALOP:



Ausführliche Rechnung:

$\mathbf{a}\,\mathbf{b} = (2\,\sigma_x + 5\,\sigma_y + 5\,\sigma_z)\,(3\,\sigma_x + 3\,\sigma_y + 6\,\sigma_z) = 51 - 9\,\sigma_x\sigma_y + 15\,\sigma_y\sigma_z + 3\,\sigma_z\sigma_x$

$\Rightarrow\ \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = -9\,\sigma_x\sigma_y + 15\,\sigma_y\sigma_z + 3\,\sigma_z\sigma_x$

$\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c} = (51 - 9\,\sigma_x\sigma_y + 15\,\sigma_y\sigma_z + 3\,\sigma_z\sigma_x)\,(4\,\sigma_x + 4\,\sigma_y + 4\,\sigma_z) = 156\,\sigma_x + 300\,\sigma_y + 156\,\sigma_z + 36\,\sigma_x\sigma_y\sigma_z$

$\Rightarrow\ \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} = 36\,\sigma_x\sigma_y\sigma_z$

$\Rightarrow\ |\mathbf{V}| = 36$

$\Rightarrow$ Das Volumen des Parallelepipeds beträgt 36 cm^3.

Probe mit der Regel von Sarrus:

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{5} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{3} \\ \mathbf{5} & \mathbf{6} & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} \\ - & - & - & + & + & + \end{array}$$

$\det \mathbf{D} = 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + 4 \cdot 5 \cdot 6 - 4 \cdot 3 \cdot 5 - 2 \cdot 4 \cdot 6 - 3 \cdot 5 \cdot 4$

$= 24 + 60 + 120 - 60 - 48 - 60 = 36$

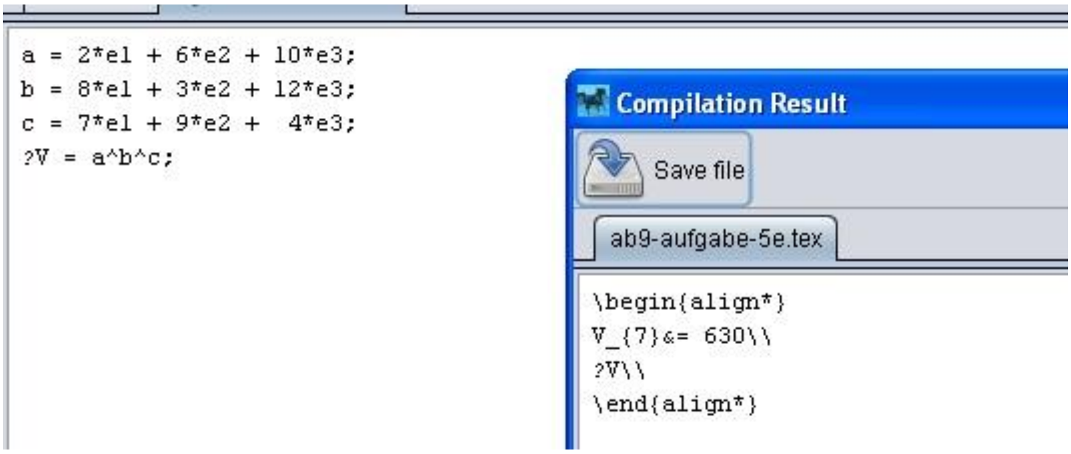
weitere Probe: $(2^2 + 5^2 + 5^2)\,(3^2 + 3^2 + 6^2) = 51^2 + (-9)^2 + 15^2 + 3^2 = 2916$

$(51^2 + (-9)^2 + 15^2 + 3^2)\,(4^2 + 4^2 + 4^2) = 156^2 + 300^2 + 156^2 + 36^2 = 139968$

$\Rightarrow$ trigonometrischer Pythagoras: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

e) $\mathbf{a} = 2\,\sigma_x + 6\,\sigma_y + 10\,\sigma_z$
$\mathbf{b} = 8\,\sigma_x + 3\,\sigma_y + 12\,\sigma_z$
$\mathbf{c} = 7\,\sigma_x + 9\,\sigma_y + 4\,\sigma_z$

Lösung mit Hilfe von GAALOP:



Ausführliche Rechnung:

$\mathbf{a\,b} = (2\,\sigma_x + 6\,\sigma_y + 10\,\sigma_z)\,(8\,\sigma_x + 3\,\sigma_y + 12\,\sigma_z) = 154 - 42\,\sigma_x\sigma_y + 42\,\sigma_y\sigma_z + 56\,\sigma_z\sigma_x$

$\Rightarrow\quad \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = -42\,\sigma_x\sigma_y + 42\,\sigma_y\sigma_z + 56\,\sigma_z\sigma_x$

$\mathbf{a\,b\,c} = (154 - 42\,\sigma_x\sigma_y + 42\,\sigma_y\sigma_z + 56\,\sigma_z\sigma_x)\,(7\,\sigma_x + 9\,\sigma_y + 4\,\sigma_z)$

$= 476\,\sigma_x + 1848\,\sigma_y + 630\,\sigma_z + 630\,\sigma_x\sigma_y\sigma_z$

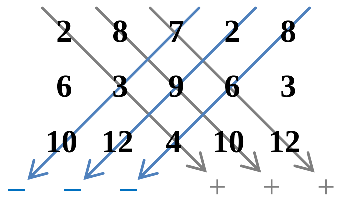
$\Rightarrow\quad \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} = 630\,\sigma_x\sigma_y\sigma_z$

$\Rightarrow\quad |\mathbf{V}| = 630$

$\Rightarrow$ Das Volumen des Parallelepipeds beträgt 630 cm^3.

Probe mit der Regel von Sarrus:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 7 \\ 6 & 3 & 9 \\ 10 & 12 & 4 \end{pmatrix}$$



$\det \mathbf{T} = 2 \cdot 3 \cdot 4 + 8 \cdot 9 \cdot 10 + 7 \cdot 6 \cdot 12 - 7 \cdot 3 \cdot 10 - 2 \cdot 9 \cdot 12 - 8 \cdot 6 \cdot 4$

$= 24 + 720 + 504 - 210 - 216 - 192 = 630$

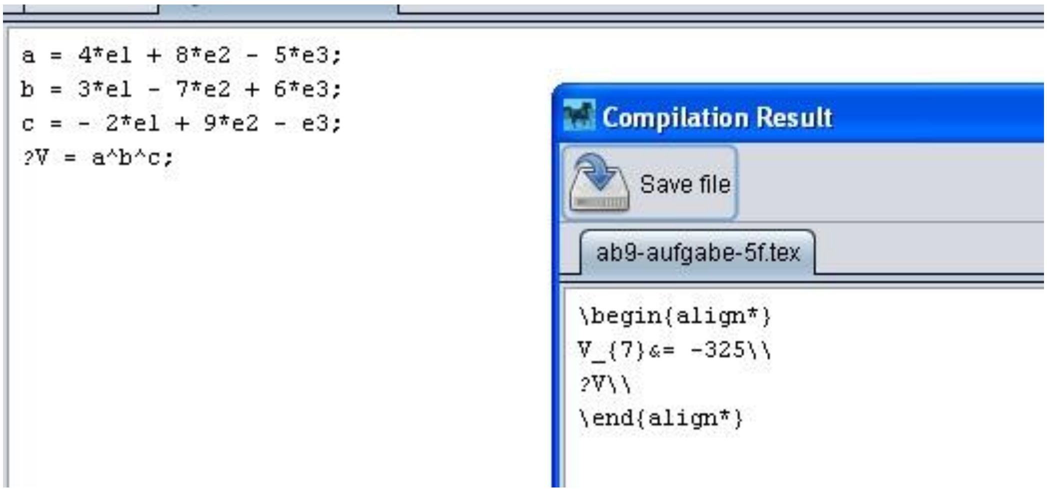
weitere Probe: $(2^2 + 6^2 + 10^2)\,(8^2 + 3^2 + 12^2) = 154^2 + (-42)^2 + 42^2 + 56^2 = 30\,380$

$(154^2 + (-42)^2 + 42^2 + 56^2)\,(7^2 + 9^2 + 4^2) = 476^2 + 1848^2 + 630^2 + 630^2 = 4\,435\,480$

$\Rightarrow$ trigonometrischer Pythagoras: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

f) $\mathbf{a} = 4\,\sigma_x + 8\,\sigma_y - 5\,\sigma_z$
$\mathbf{b} = 3\,\sigma_x - 7\,\sigma_y + 6\,\sigma_z$
$\mathbf{c} = -2\,\sigma_x + 9\,\sigma_y - \sigma_z$

Lösung mit Hilfe von GAALOP:



Ausführliche Rechnung:

$\mathbf{a}\,\mathbf{b} = (4\,\sigma_x + 8\,\sigma_y - 5\,\sigma_z)\,(3\,\sigma_x - 7\,\sigma_y + 6\,\sigma_z) = -74 - 52\,\sigma_x\sigma_y + 13\,\sigma_y\sigma_z - 39\,\sigma_z\sigma_x$

$\Rightarrow\quad \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = -52\,\sigma_x\sigma_y + 13\,\sigma_y\sigma_z - 39\,\sigma_z\sigma_x$

$\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c} = (-74 - 52\,\sigma_x\sigma_y + 13\,\sigma_y\sigma_z - 39\,\sigma_z\sigma_x)\,(-2\,\sigma_x + 9\,\sigma_y - \sigma_z)$

$= -359\,\sigma_x - 783\,\sigma_y + 35\,\sigma_z - 325\,\sigma_x\sigma_y\sigma_z$

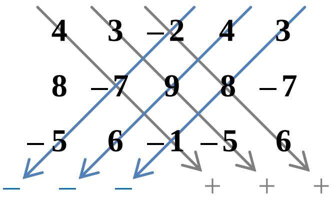
$\Rightarrow\quad \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} = -325\,\sigma_x\sigma_y\sigma_z$

$\Rightarrow\quad |\mathbf{V}| = 325$

$\Rightarrow$ Das Volumen des Parallelepipeds beträgt 325 cm^3.

Probe mit der Regel von Sarrus:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 8 & -7 & 9 \\ -5 & 6 & -1 \end{pmatrix}$$



$\det \mathbf{F} = 4 \cdot (-7) \cdot (-1) + 3 \cdot 9 \cdot (-5) + (-2) \cdot 8 \cdot 6 - (-2) \cdot (-7) \cdot (-5) - 4 \cdot 9 \cdot 6 - 3 \cdot 8 \cdot (-1)$
$= 28 - 135 - 96 + 70 - 216 + 24 = -325$

weitere Probe: $(4^2 + 8^2 + (-5)^2)\,(3^2 + (-7)^2 + 6^2) = (-74)^2 + (-52)^2 + 13^2 + (-39)^2 = 9870$

$((-74)^2 + (-52)^2 + 13^2 + (-39)^2)\,((-2)^2 + 9^2 + (-1)^2)$
$= (-359)^2 + (-783)^2 + 35^2 + (-325)^2 = 848820$

$\Rightarrow$ trigonometrischer Pythagoras: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

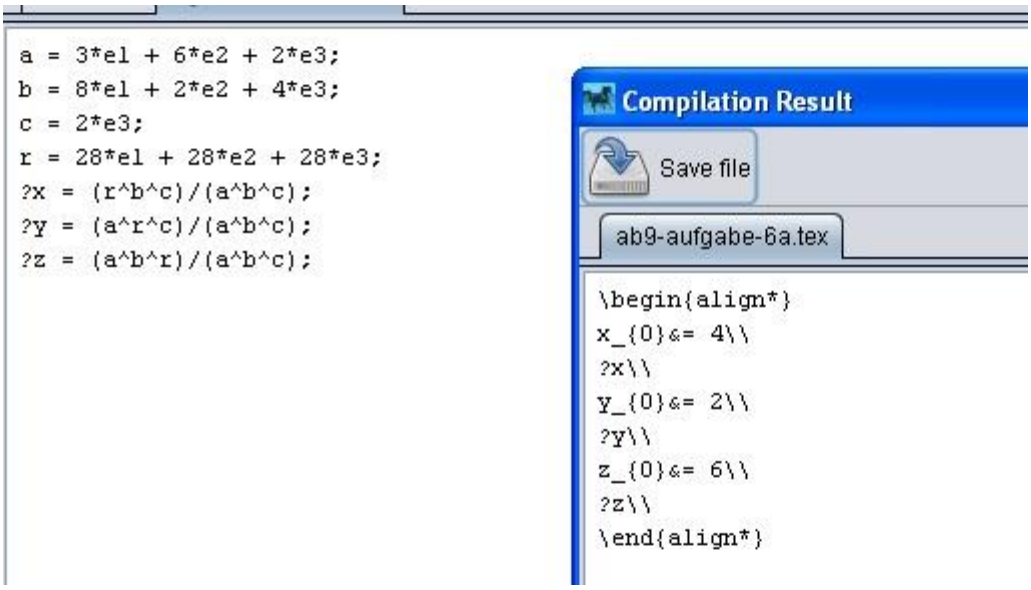
Aufgabe 6:

a) $3x + 8y = 28$ $\Rightarrow$ $\mathbf{a} = 3\,\sigma_x + 6\,\sigma_y + 2\,\sigma_z$ $\mathbf{r} = 28\,\sigma_x + 28\,\sigma_y + 28\,\sigma_z$

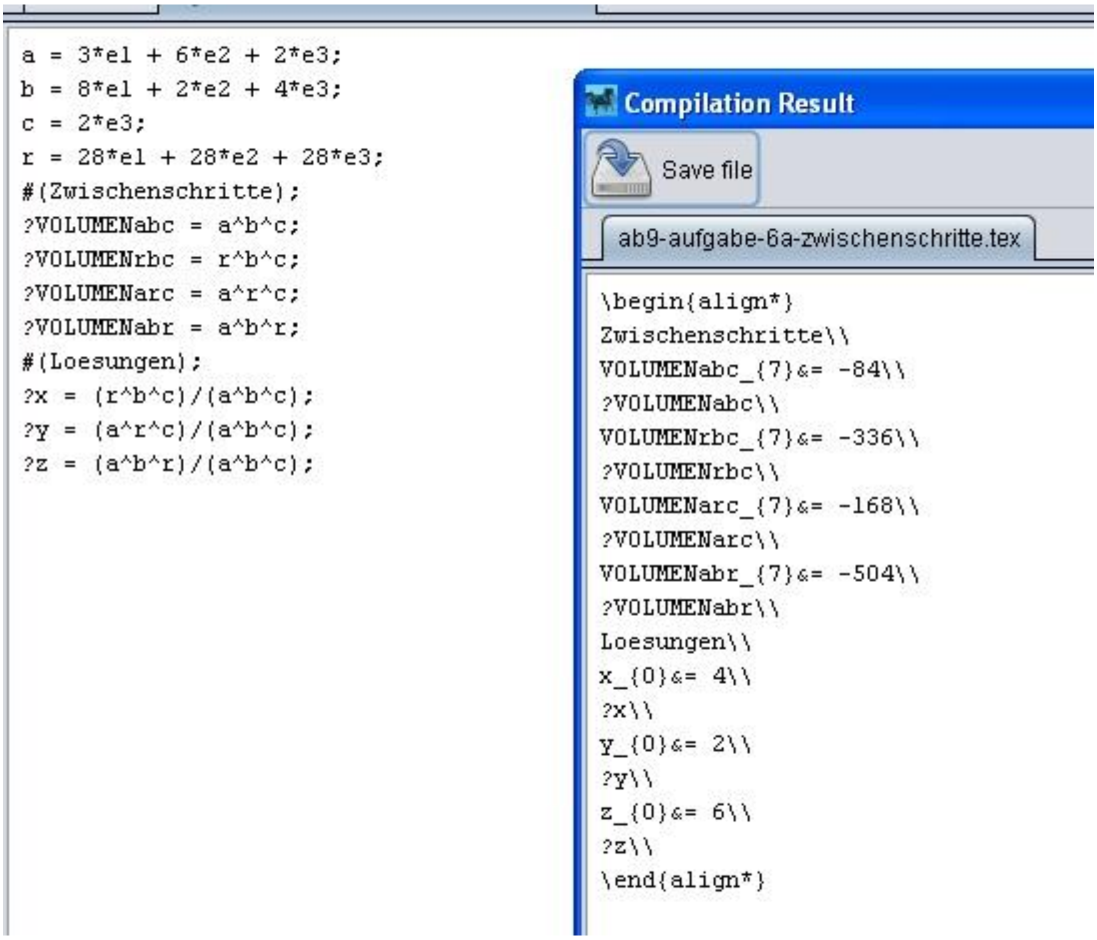
$6x + 2y = 28$ $\mathbf{b} = 8\,\sigma_x + 2\,\sigma_y + 4\,\sigma_z$

$2x + 4y + 2z = 28$ $\mathbf{c} = 2\,\sigma_z$

Direkte Lösung mit Hilfe von GAALOP:



Lösung mit Hilfe von GAALOP unter Angabe der Zwischenschritte:



Zwischenschritte:

$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} = -84\, \sigma_x\sigma_y\sigma_z$

$\mathbf{r} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} = -336\, \sigma_x\sigma_y\sigma_z$

$\mathbf{a} \wedge \mathbf{r} \wedge \mathbf{c} = -168\, \sigma_x\sigma_y\sigma_z$

$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{r} = -504\, \sigma_x\sigma_y\sigma_z$

Lösung des Linearen Gleichungssystems:

$$x = (\mathbf{r} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) / (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = \frac{-336}{-84} = 4$$

$$y = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{r} \wedge \mathbf{c}) / (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = \frac{-168}{-84} = 2$$

$$z = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{r}) / (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = \frac{-504}{-84} = 6$$

Probe:
$$\begin{aligned} 3 \cdot 4 + 8 \cdot 2 &= 12 + 16 &&= 28 \\ 6 \cdot 4 + 2 \cdot 2 &= 24 + 4 &&= 28 \\ 2 \cdot 4 + 4 \cdot 2 + 2 \cdot 6 &= 8 + 8 + 12 &&= 28 \end{aligned}$$

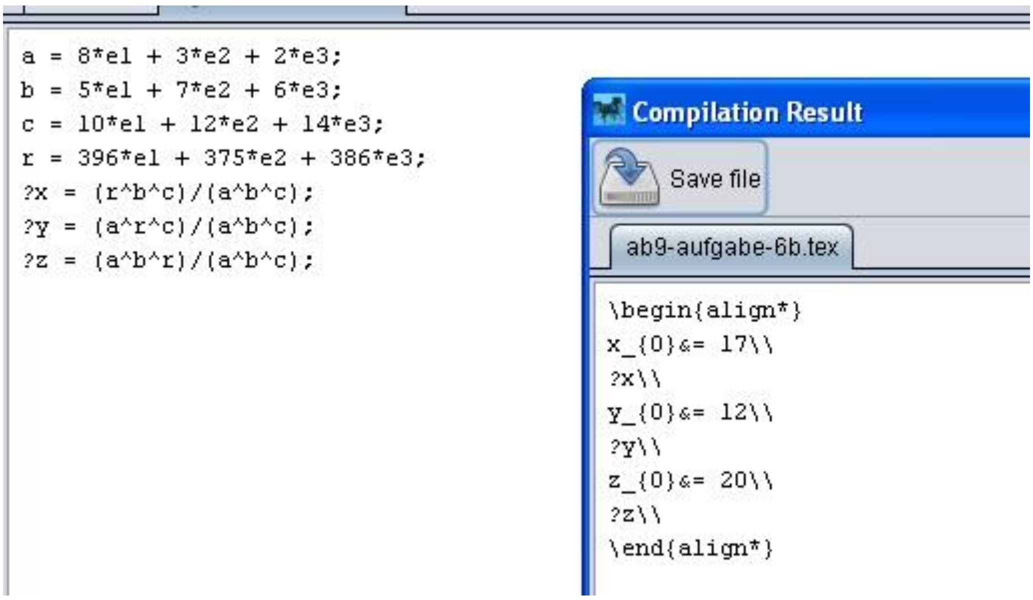
b) $8x + 5y + 10z = 396$
$3x + 7y + 12z = 375$
$2x + 6y + 14z = 386$

$\Rightarrow$ $\mathbf{a} = 8\,\sigma_x + 3\,\sigma_y + 2\,\sigma_z$ $\quad \mathbf{r} = 396\,\sigma_x + 375\,\sigma_y + 386\,\sigma_z$

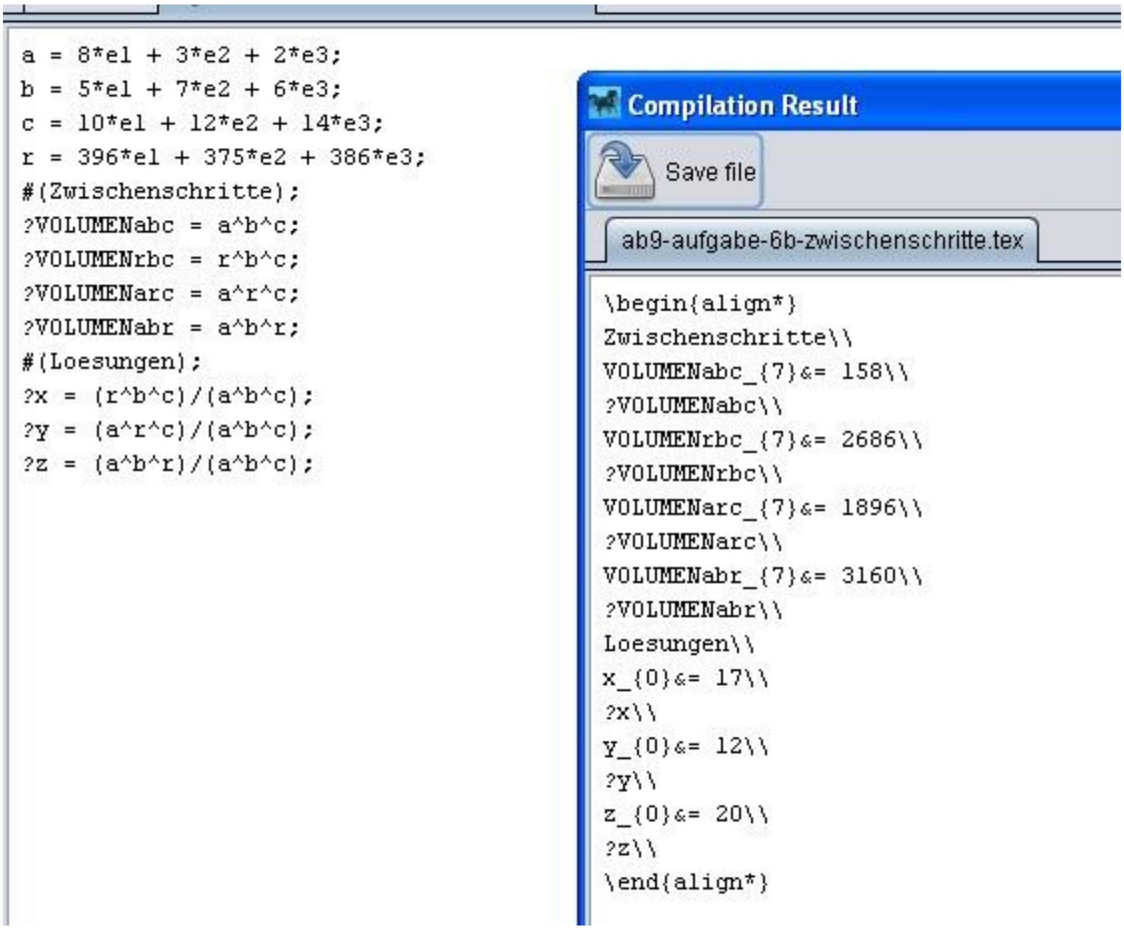
$\mathbf{b} = 5\,\sigma_x + 7\,\sigma_y + 6\,\sigma_z$

$\mathbf{c} = 10\,\sigma_x + 12\,\sigma_y + 14\,\sigma_z$

Direkte Lösung mit Hilfe von GAALOP:



Lösung mit Hilfe von GAALOP unter Angabe der Zwischenschritte:



```
a = 8*e1 + 3*e2 + 2*e3;
b = 5*e1 + 7*e2 + 6*e3;
c = 10*e1 + 12*e2 + 14*e3;
r = 396*e1 + 375*e2 + 386*e3;
#(Zwischenschritte);
?VOLUMENabc = a^b^c;
?VOLUMENrbc = r^b^c;
?VOLUMENarc = a^r^c;
?VOLUMENabr = a^b^r;
#(Loesungen);
?x = (r^b^c)/(a^b^c);
?y = (a^r^c)/(a^b^c);
?z = (a^b^r)/(a^b^c);
```

Compilation Result

Save file

ab9-aufgabe-6b-zwischenschritte.tex

```
\begin{align*}
Zwischenschritte\\
VOLUMENabc_{7}&= 158\\
?VOLUMENabc\\
VOLUMENrbc_{7}&= 2686\\
?VOLUMENrbc\\
VOLUMENarc_{7}&= 1896\\
?VOLUMENarc\\
VOLUMENabr_{7}&= 3160\\
?VOLUMENabr\\
Loesungen\\
x_{0}&= 17\\
?x\\
y_{0}&= 12\\
?y\\
z_{0}&= 20\\
?z\\
\end{align*}
```

Zwischenschritte:

$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} = 158\ \sigma_x\sigma_y\sigma_z$

$\mathbf{r} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} = 2686\ \sigma_x\sigma_y\sigma_z$

$\mathbf{a} \wedge \mathbf{r} \wedge \mathbf{c} = 1896\ \sigma_x\sigma_y\sigma_z$

$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{r} = 3160\ \sigma_x\sigma_y\sigma_z$

Lösung des Linearen Gleichungssystems:

$$x = (\mathbf{r} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) / (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = \frac{2686}{158} = 17$$

$$y = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{r} \wedge \mathbf{c}) / (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = \frac{1896}{158} = 12$$

$$z = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{r}) / (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = \frac{3160}{158} = 20$$

Probe: $8 \cdot 17 + 5 \cdot 12 + 10 \cdot 20 = 136 + 60 + 200 = 396$
$3 \cdot 17 + 7 \cdot 12 + 12 \cdot 20 = 51 + 84 + 240 = 375$
$2 \cdot 17 + 6 \cdot 12 + 14 \cdot 20 = 34 + 72 + 280 = 386$

c) $3\,x - 5\,y + 6\,z = 41$ $\Rightarrow$ $\mathbf{a} = 3\,\sigma_x - 2\,\sigma_y + 7\,\sigma_z$ $\mathbf{r} = 41\,\sigma_x + 111\,\sigma_y + 185\,\sigma_z$

$-2\,x + 5\,y + 8\,z = 111$ $\mathbf{b} = -5\,\sigma_x + 5\,\sigma_y + \sigma_z$

$7\,x + y + 9\,z = 185$ $\mathbf{c} = 6\,\sigma_x + 8\,\sigma_y + 9\,\sigma_z$

Direkte Lösung mit Hilfe von GAALOP:

```
a = 3*e1 - 2*e2 + 7*e3;
b = -5*e1 + 5*e2 + e3;
c = 6*e1 + 8*e2 + 9*e3;
r = 41*e1 + 111*e2 + 185*e3;
?x = (r^b^c)/(a^b^c);
?y = (a^r^c)/(a^b^c);
?z = (a^b^r)/(a^b^c);
```

Compilation Result

Save file

ab9-aufgabe-6c.tex

```
\begin{align*}
x_{0}&= 12\\
?x\\
y_{0}&= 11\\
?y\\
z_{0}&= 10\\
?z\\
\end{align*}
```

Lösung mit Hilfe von GAALOP unter Angabe der Zwischenschritte:

```
a = 3*e1 - 2*e2 + 7*e3;
b = -5*e1 + 5*e2 + e3;
c = 6*e1 + 8*e2 + 9*e3;
r = 41*e1 + 111*e2 + 185*e3;
#(Zwischenschritte);
?VOLUMENabc = a^b^c;
?VOLUMENrbc = r^b^c;
?VOLUMENarc = a^r^c;
?VOLUMENabr = a^b^r;
#(Loesungen);
?x = (r^b^c)/(a^b^c);
?y = (a^r^c)/(a^b^c);
?z = (a^b^r)/(a^b^c);
```

Compilation Result

Save file

ab9-aufgabe-6c-zwischenschritte.tex

```
\begin{align*}
Zwischenschritte\\
VOLUMENabc_{7}&= -481\\
?VOLUMENabc\\
VOLUMENrbc_{7}&= -5772\\
?VOLUMENrbc\\
VOLUMENarc_{7}&= -5291\\
?VOLUMENarc\\
VOLUMENabr_{7}&= -4810\\
?VOLUMENabr\\
Loesungen\\
x_{0}&= 12\\
?x\\
y_{0}&= 11\\
?y\\
z_{0}&= 10\\
?z\\
\end{align*}
```

Zwischenschritte:

$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} = \; -481\, \sigma_x\sigma_y\sigma_z$

$\mathbf{r} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} = -5772\, \sigma_x\sigma_y\sigma_z$

$\mathbf{a} \wedge \mathbf{r} \wedge \mathbf{c} = -5291\, \sigma_x\sigma_y\sigma_z$

$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{r} = -4810\, \sigma_x\sigma_y\sigma_z$

Lösung des Linearen Gleichungssystems:

$$x = (\mathbf{r} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) / (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = \frac{-5772}{-481} = 12$$

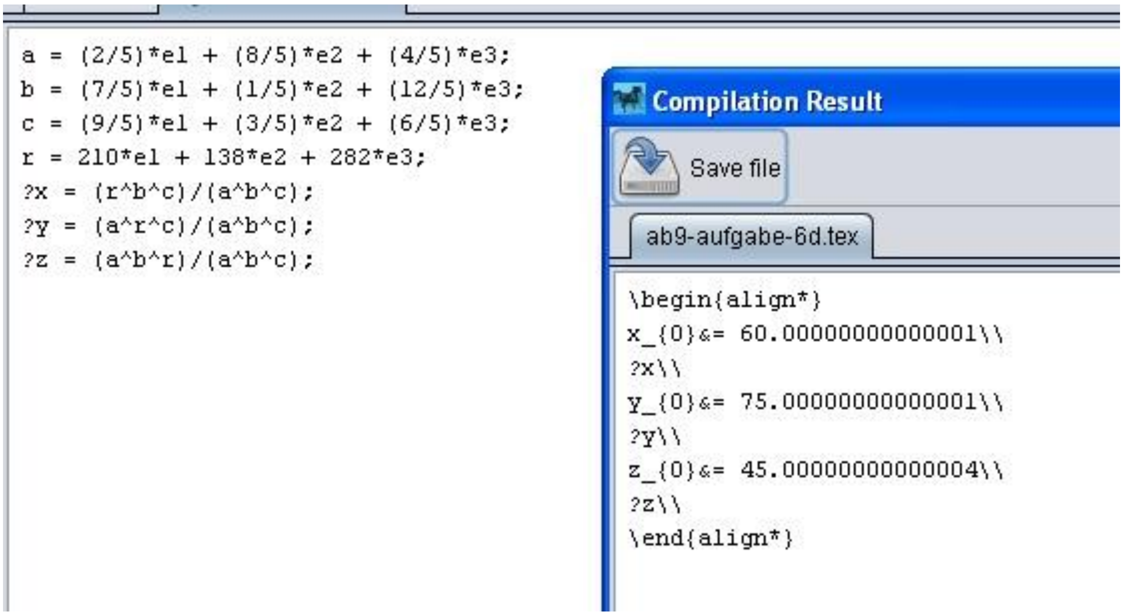
$$y = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{r} \wedge \mathbf{c}) / (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = \frac{-5291}{-481} = 11$$

$$z = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{r}) / (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = \frac{-4810}{-481} = 10$$

Probe:
$$\begin{aligned} 3 \cdot 12 - 5 \cdot 11 + 6 \cdot 10 &= 36 - 55 + 60 = 41 \\ -2 \cdot 12 + 5 \cdot 11 + 8 \cdot 10 &= -24 + 55 + 80 = 111 \\ 7 \cdot 12 + 11 + 9 \cdot 10 &= 84 + 11 + 90 = 185 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} {}^2/_5\, x + {}^7/_5\, y + {}^9/_5\, z &= 210 \\ {}^8/_5\, x + {}^1/_5\, y + {}^3/_5\, z &= 138 \\ {}^4/_5\, x + {}^{12}/_5\, y + {}^6/_5\, z &= 282 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \mathbf{a} &= {}^2/_5\, \sigma_x + {}^8/_5\, \sigma_y + {}^4/_5\, \sigma_z \\ \mathbf{b} &= {}^7/_5\, \sigma_x + {}^1/_5\, \sigma_y + {}^{12}/_5\, \sigma_z \\ \mathbf{c} &= {}^9/_5\, \sigma_x + {}^3/_5\, \sigma_y + {}^6/_5\, \sigma_z \end{aligned} \qquad \mathbf{r} = 210\, \sigma_x + 138\, \sigma_y + 282\, \sigma_z$$

Direkte Lösung mit Hilfe von GAALOP:



Lösung mit Hilfe von GAALOP unter Angabe der Zwischenschritte:

```
a = (2/5)*e1 + (8/5)*e2 + (4/5)*e3;
b = (7/5)*e1 + (1/5)*e2 + (12/5)*e3;
c = (9/5)*e1 + (3/5)*e2 + (6/5)*e3;
r = 210*e1 + 138*e2 + 282*e3;
#(Zwischenschritte);
?VOLUMENabc = a^b^c;
?VOLUMENrbc = r^b^c;
?VOLUMENarc = a^r^c;
?VOLUMENabr = a^b^r;
#(Loesungen);
?x = (r^b^c)/(a^b^c);
?y = (a^r^c)/(a^b^c);
?z = (a^b^r)/(a^b^c);
```

Compilation Result

Save file

ab9-aufgabe-6d-zwischenschritte.tex

```
\begin{align*}
Zwischenschritte\\
VOLUMENabc_{7}&= 4.128000000000001\\
?VOLUMENabc\\
VOLUMENrbc_{7}&= 247.68000000000006\\
?VOLUMENrbc\\
VOLUMENarc_{7}&= 309.6000000000014\\
?VOLUMENarc\\
VOLUMENabr_{7}&= 185.76000000000022\\
?VOLUMENabr\\
Loesungen\\
x_{0}&= 60.00000000000001\\
?x\\
y_{0}&= 75.00000000000001\\
?y\\
z_{0}&= 45.00000000000004\\
?z\\
\end{align*}
```

Zwischenschritte:

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} = 4{,}128\ \sigma_x\sigma_y\sigma_z = \frac{516}{125}\ \sigma_x\sigma_y\sigma_z$$

$$\mathbf{r} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} = 247{,}680\ \sigma_x\sigma_y\sigma_z = \frac{30960}{125}\ \sigma_x\sigma_y\sigma_z$$

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{r} \wedge \mathbf{c} = 309{,}600\ \sigma_x\sigma_y\sigma_z = \frac{38700}{125}\ \sigma_x\sigma_y\sigma_z$$

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{r} = 185{,}760\ \sigma_x\sigma_y\sigma_z = \frac{23220}{125}\ \sigma_x\sigma_y\sigma_z$$

Lösung des Linearen Gleichungssystems:

$$x = (\mathbf{r} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) / (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = \frac{30960}{516} = 60$$

$$y = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{r} \wedge \mathbf{c}) / (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = \frac{38700}{516} = 75$$

$$z = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{r}) / (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = \frac{23220}{516} = 45$$

Probe: $^2/_5 \cdot 60 + {}^7/_5 \cdot 75 + {}^9/_5 \cdot 45 = 24 + 105 + 81 = 210$

$^8/_5 \cdot 60 + {}^1/_5 \cdot 75 + {}^3/_5 \cdot 45 = 96 + 15 + 27 = 138$

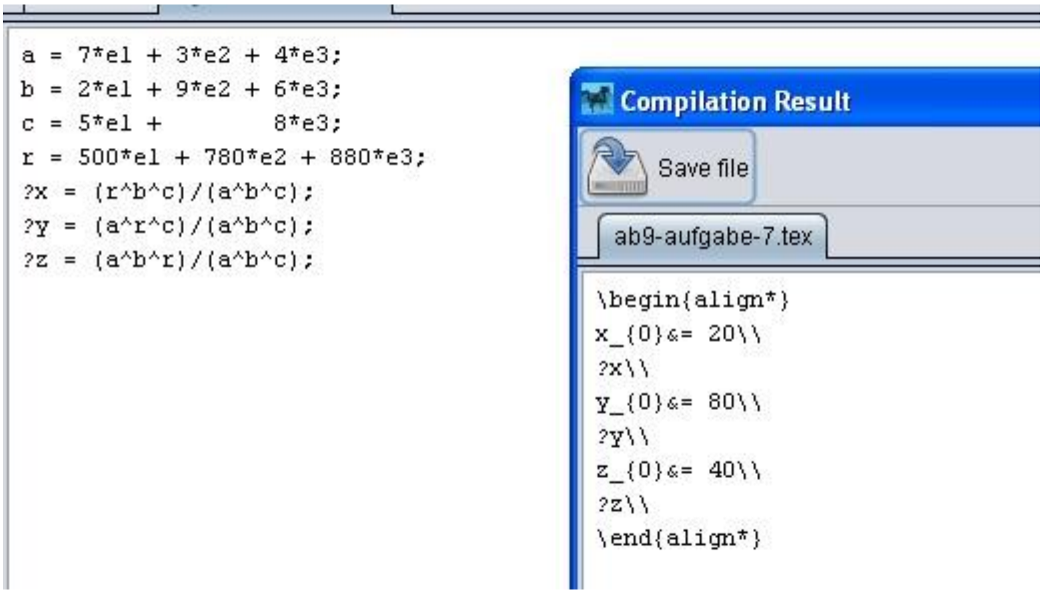
$^4/_5 \cdot 60 + {}^{12}/_5 \cdot 75 + {}^6/_5 \cdot 45 = 48 + 180 + 54 = 282$

Aufgabe 7:

$7\,x + 2\,y + 5\,z = 500$
$3\,x + 9\,y + \quad\;\; = 780$
$4\,x + 6\,y + 8\,z = 880$

$\Rightarrow$ $\mathbf{a} = 7\,\sigma_x + 3\,\sigma_y + 4\,\sigma_z$ $\quad \mathbf{r} = 500\,\sigma_x + 780\,\sigma_y + 880\,\sigma_z$
$\mathbf{b} = 2\,\sigma_x + 9\,\sigma_y + 6\,\sigma_z$
$\mathbf{c} = 5\,\sigma_x \qquad\quad + 8\,\sigma_z$

Lösung mit Hilfe von GAALOP:



Lösung des Linearen Gleichungssystems:

$x = (\mathbf{r} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) \,/\, (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = 20$
$y = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{r} \wedge \mathbf{c}) \,/\, (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = 80$
$z = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{r}) \,/\, (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = 40$

Probe: $7 \cdot 20 + 2 \cdot 80 + 5 \cdot 40 = 140 + 160 + 200 = 500$
$3 \cdot 20 + 9 \cdot 80 = 60 + 720 = 780$
$4 \cdot 20 + 6 \cdot 80 + 8 \cdot 40 = 80 + 480 + 320 = 880$

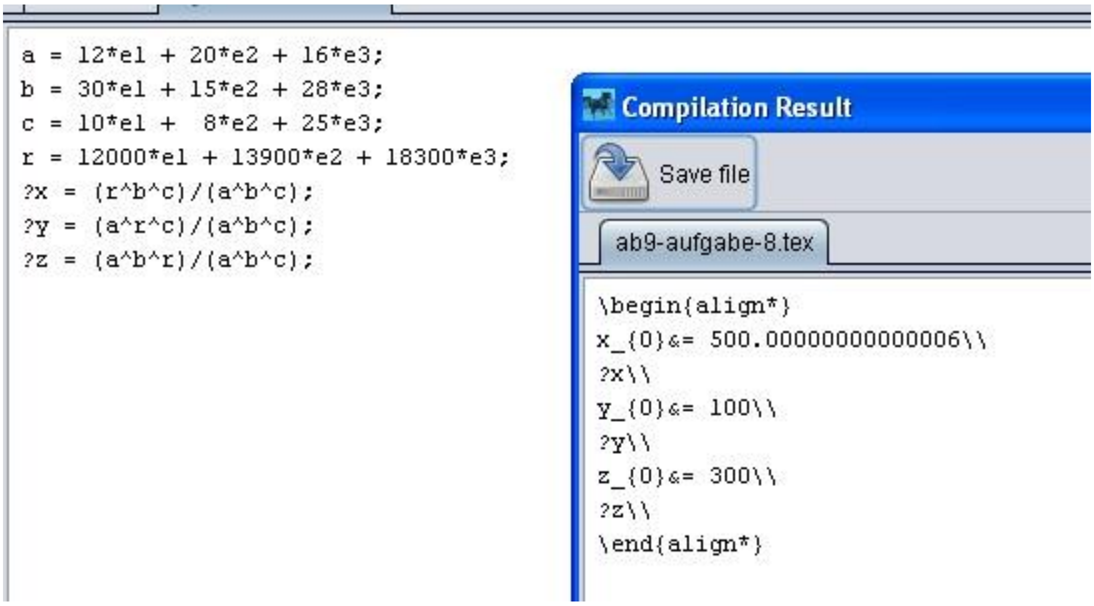
$\Rightarrow$ Es werden 20 ME des ersten Endproduktes E_1, 80 ME des zweiten Endproduktes E_2 und 40 ME des dritten Endproduktes E_3 hergestellt, wenn 500 ME des ersten Rohstoffes R_1, 780 ME des zweiten Rohstoffes R_2 und 880 des dritten Rohstoffes R_3 verbraucht werden.

Aufgabe 8:

$12\,x + 30\,y + 10\,z = 12000$
$20\,x + 15\,y + \;\;8\,z = 13900$
$16\,x + 28\,y + 25\,z = 18300$

$\Rightarrow$ $\mathbf{a} = 12\,\sigma_x + 20\,\sigma_y + 16\,\sigma_z$ $\quad \mathbf{r} = 12000\,\sigma_x + 13900\,\sigma_y + 18300\,\sigma_z$
$\mathbf{b} = 30\,\sigma_x + 15\,\sigma_y + 28\,\sigma_z$
$\mathbf{c} = 10\,\sigma_x + \;\;8\,\sigma_y + 25\,\sigma_z$

Lösung mit Hilfe von GAALOP:


```
a = 12*e1 + 20*e2 + 16*e3;
b = 30*e1 + 15*e2 + 28*e3;
c = 10*e1 +  8*e2 + 25*e3;
r = 12000*e1 + 13900*e2 + 18300*e3;
?x = (r^b^c)/(a^b^c);
?y = (a^r^c)/(a^b^c);
?z = (a^b^r)/(a^b^c);
```

```
\begin{align*}
x_{0}&= 500.00000000000006\\
?x\\
y_{0}&= 100\\
?y\\
z_{0}&= 300\\
?z\\
\end{align*}
```

Lösung des Linearen Gleichungssystems:

$x = (\mathbf{r} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) / (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = 500$

$y = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{r} \wedge \mathbf{c}) / (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = 100$

$z = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{r}) / (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = 300$

Probe: $12 \cdot 500 + 30 \cdot 100 + 10 \cdot 300 = 6\,000 + 3\,000 + 3\,000 = 12\,000$

$20 \cdot 500 + 15 \cdot 100 + 8 \cdot 300 = 10\,000 + 1\,500 + 2\,400 = 13\,900$

$16 \cdot 500 + 28 \cdot 100 + 25 \cdot 300 = 8\,000 + 2\,800 + 7\,500 = 18\,300$

$\Rightarrow$ Es werden 500 ME des ersten Endproduktes E_1, 100 ME des zweiten Endproduktes E_2 und 300 ME des dritten Endproduktes E_3 hergestellt, wenn 12 000 ME des ersten Rohstoffes R_1, 13 900 ME des zweiten Rohstoffes R_2 und 18 300 des dritten Rohstoffes R_3 verbraucht werden.

Aufgabe 9:

$$\begin{pmatrix}9&3&4\\2&2&3\\7&5&2\end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix}x_1&x_2\\y_1&y_2\\z_1&z_2\end{pmatrix}}_{\mathbf{P}}=\underbrace{\overset{\begin{array}{cc}\text{1. Quartal}&\text{2. Quartal}\\\downarrow&\downarrow\end{array}}{\begin{pmatrix}98&61\\35&30\\76&59\end{pmatrix}}}_{\mathbf{R}}$$

R .... Matrix des quartalsweisen Rohstoffbedarfs (Rohstoffbedarfsmatrix)

P .... Matrix der quartalsweisen Produktion (Produktionsmatrix)

$\Rightarrow$ Zwei Lineare Gleichungssysteme:

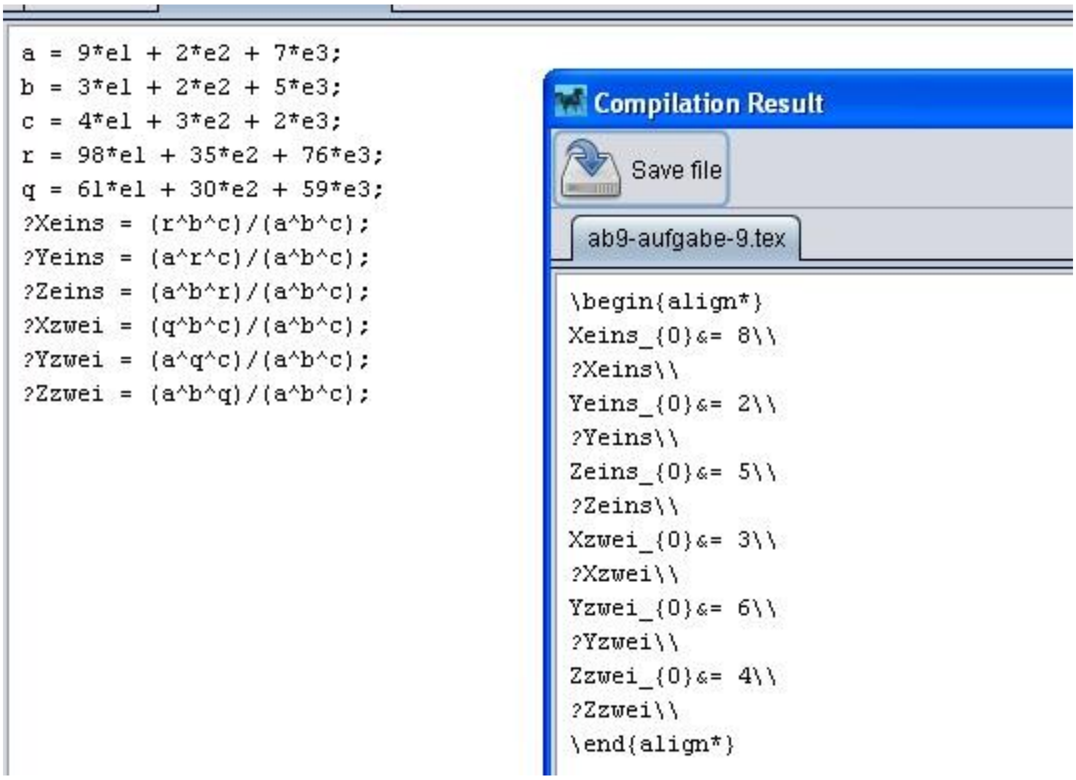
$$\begin{aligned}9x_1+3y_1+4z_1&=98\\2x_1+2y_1+3z_1&=35\\7x_1+5y_1+2z_1&=76\end{aligned}\qquad\text{und}\qquad\begin{aligned}9x_2+3y_2+4z_2&=61\\2x_2+2y_2+3z_2&=30\\7x_2+5y_2+2z_2&=59\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $\mathbf{a} = 9\,\sigma_x + 2\,\sigma_y + 7\,\sigma_z$ $\qquad$ $\mathbf{r} = 98\,\sigma_x + 35\,\sigma_y + 76\,\sigma_z$

$\mathbf{b} = 3\,\sigma_x + 2\,\sigma_y + 2\,\sigma_z$ $\qquad$ $\mathbf{q} = 61\,\sigma_x + 30\,\sigma_y + 59\,\sigma_z$

$\mathbf{c} = 4\,\sigma_x + 3\,\sigma_y + 2\,\sigma_z$

Lösung mit Hilfe von GAALOP:



Lösung der beiden Linearen Gleichungssysteme:

$x_1 = (\mathbf{r} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) \,/\, (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = 8$ $\qquad$ $x_2 = (\mathbf{q} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) \,/\, (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = 3$

$y_1 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{r} \wedge \mathbf{c}) \,/\, (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = 2$ $\qquad$ $y_2 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{q} \wedge \mathbf{c}) \,/\, (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = 6$

$z_1 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{r}) \,/\, (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = 5$ $\qquad$ $z_2 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{q}) \,/\, (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = 4$

Probe:				
			8	3
			2	6
			5	4
9	3	4	98	61
2	2	3	35	30
7	5	2	76	59

$\Rightarrow$ Im ersten Quartal werden 8 ME des ersten Endproduktes E_1, 2 ME des zweiten Endproduktes E_2 und 5 ME des dritten Endproduktes E_3 hergestellt.

Im zweiten Quartal werden 3 ME des ersten Endproduktes E_1, 6 ME des zweiten Endproduktes E_2 und 4 ME des dritten Endproduktes E_3 hergestellt.

Aufgabe 10:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 10 & 15 & 11 \\ 17 & 20 & 16 \\ 12 & 14 & 25 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{pmatrix}}_{B} = \underbrace{\begin{pmatrix} 964 & 814 \\ 1409 & 1184 \\ 1320 & 1093 \end{pmatrix}}_{G} \qquad \mathbf{A\,B = G}$$

G .... Gesamtbedarfsmatrix

B .... Bedarfsmatrix des zweiten Produktionsschritts

A .... Bedarfsmatrix des ersten Produktionsschritts

$\Rightarrow$ Zwei Lineare Gleichungssysteme:

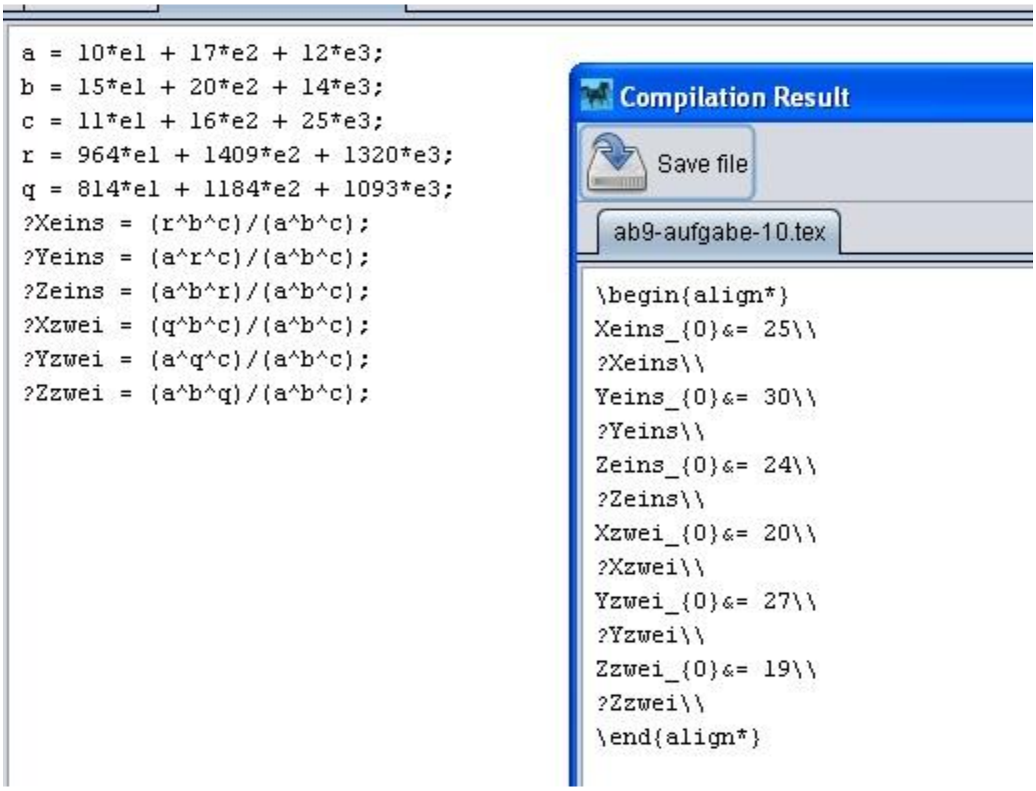
$$\begin{aligned} 10\,x_1 + 15\,y_1 + 11\,z_1 &= 964 \\ 17\,x_1 + 20\,y_1 + 16\,z_1 &= 1409 \\ 12\,x_1 + 14\,y_1 + 25\,z_1 &= 1320 \end{aligned} \qquad \text{und} \qquad \begin{aligned} 10\,x_2 + 15\,y_2 + 11\,z_2 &= 814 \\ 17\,x_2 + 20\,y_2 + 16\,z_2 &= 1184 \\ 12\,x_2 + 14\,y_2 + 25\,z_2 &= 1093 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $\mathbf{a} = 10\,\sigma_x + 17\,\sigma_y + 12\,\sigma_z$ $\qquad$ $\mathbf{r} = 964\,\sigma_x + 1409\,\sigma_y + 1320\,\sigma_z$

$\mathbf{b} = 15\,\sigma_x + 20\,\sigma_y + 14\,\sigma_z$ $\qquad$ $\mathbf{q} = 814\,\sigma_x + 1184\,\sigma_y + 1093\,\sigma_z$

$\mathbf{c} = 11\,\sigma_x + 16\,\sigma_y + 25\,\sigma_z$

Lösung mit Hilfe von GAALOP:



Lösung der beiden Linearen Gleichungssysteme:

$x_1 = (\mathbf{r} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) / (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = 25$ $\qquad$ $x_2 = (\mathbf{q} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) / (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = 20$

$y_1 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{r} \wedge \mathbf{c}) / (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = 30$ $\qquad$ $y_2 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{q} \wedge \mathbf{c}) / (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = 27$

$z_1 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{r}) / (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = 24$ $\qquad$ $z_2 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{q}) / (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = 19$

Probe:			25	20
			30	27
			24	19
10	15	11	964	814
17	20	16	1409	1184
12	14	25	1320	1093

$\Rightarrow$ Die Zwischenbedarfsmatrix **B** lautet: $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 25 & 20 \\ 30 & 27 \\ 24 & 19 \end{pmatrix}$

Aufgabe 11:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 8 & 6 & 6 \\ 7 & 5 & 7 \\ 5 & 4 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}}_{\mathbf{B}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 228 & 186 & 308 \\ 186 & 166 & 282 \\ 108 & 107 & 160 \end{pmatrix}}_{\mathbf{G}} \qquad \mathbf{A}\,\mathbf{B} = \mathbf{G}$$

G .... Gesamtbedarfsmatrix

B .... Bedarfsmatrix des zweiten Produktionsschritts

A .... Bedarfsmatrix des ersten Produktionsschritts

$\Rightarrow$ Drei Lineare Gleichungssysteme:

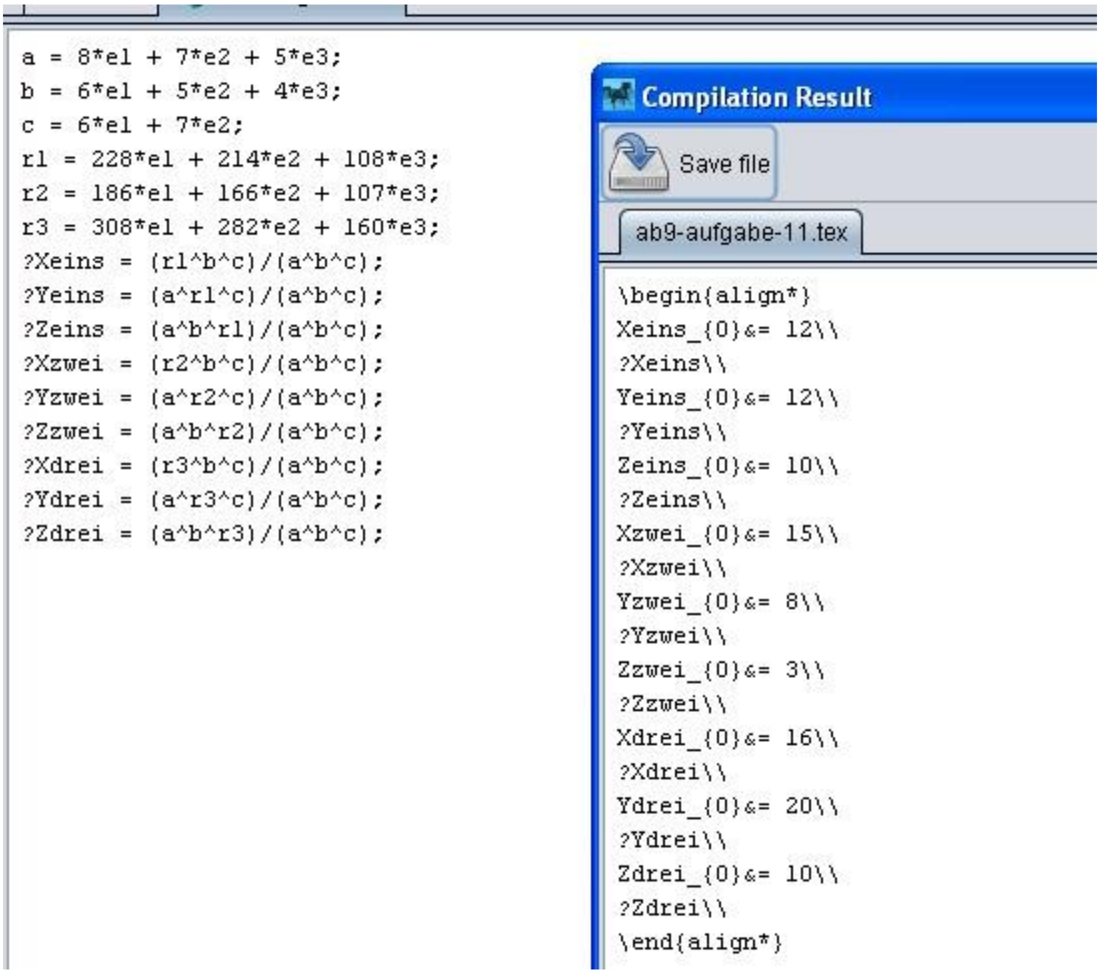
$$\begin{array}{lcl} 8\,x_1 + 6\,y_1 + 6\,z_1 = 228 & & 8\,x_2 + 6\,y_2 + 6\,z_2 = 308 & & 8\,x_3 + 6\,y_3 + 6\,z_3 = 308 \\ 7\,x_1 + 5\,y_1 + 7\,z_1 = 186 & \text{und} & 7\,x_2 + 5\,y_2 + 7\,z_2 = 166 & \text{und} & 7\,x_3 + 5\,y_3 + 7\,z_3 = 282 \\ 5\,x_1 + 4\,y_1 \qquad\quad = 108 & & 5\,x_2 + 4\,y_2 \qquad\quad = 107 & & 5\,x_3 + 4\,y_3 \qquad\quad = 160 \end{array}$$

$\Rightarrow$ $\mathbf{a} = 8\,\sigma_x + 7\,\sigma_y + 5\,\sigma_z$ $\qquad$ $\mathbf{r_1} = 228\,\sigma_x + 186\,\sigma_y + 108\,\sigma_z$

$\mathbf{b} = 6\,\sigma_x + 5\,\sigma_y + 4\,\sigma_z$ $\qquad$ $\mathbf{r_2} = 186\,\sigma_x + 166\,\sigma_y + 107\,\sigma_z$

$\mathbf{c} = 6\,\sigma_x + 7\,\sigma_y$ $\qquad$ $\mathbf{r_3} = 308\,\sigma_x + 282\,\sigma_y + 160\,\sigma_z$

Lösung mit Hilfe von GAALOP:



Lösung der drei Linearen Gleichungssysteme:

$x_1 = (\mathbf{r_1} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) / (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = 12$

$y_1 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{r_1} \wedge \mathbf{c}) / (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = 12$

$z_1 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{r_1}) / (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = 10$

$x_2 = (\mathbf{r_2} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) / (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = 15$

$y_2 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{r_2} \wedge \mathbf{c}) / (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = 8$

$z_2 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{r_2}) / (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = 3$

$x_3 = (\mathbf{r_3} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) / (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = 16$

$y_3 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{r_3} \wedge \mathbf{c}) / (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = 20$

$z_3 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{r_3}) / (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = 10$

Probe:					
			12	15	16
			12	8	20
			10	3	10
8	6	6	228	186	308
7	5	7	214	166	282
5	4	0	108	107	160

$\Rightarrow$ Die Zwischenbedarfsmatrix **B** lautet: $\quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 12 & 15 & 16 \\ 12 & 8 & 20 \\ 10 & 3 & 10 \end{pmatrix}$

Aufgabe 12:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 82 & 63 & 20 \\ 44 & 19 & 37 \\ 10 & 52 & 92 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}}_{B} = \underbrace{\begin{pmatrix} 4496 & 5462 & 4815 \\ 2530 & 3482 & 2801 \\ 3224 & 4062 & 4646 \end{pmatrix}}_{G}$$

A B = **G**

G .... Gesamtbedarfsmatrix

B .... Bedarfsmatrix des zweiten Produktionsschritts

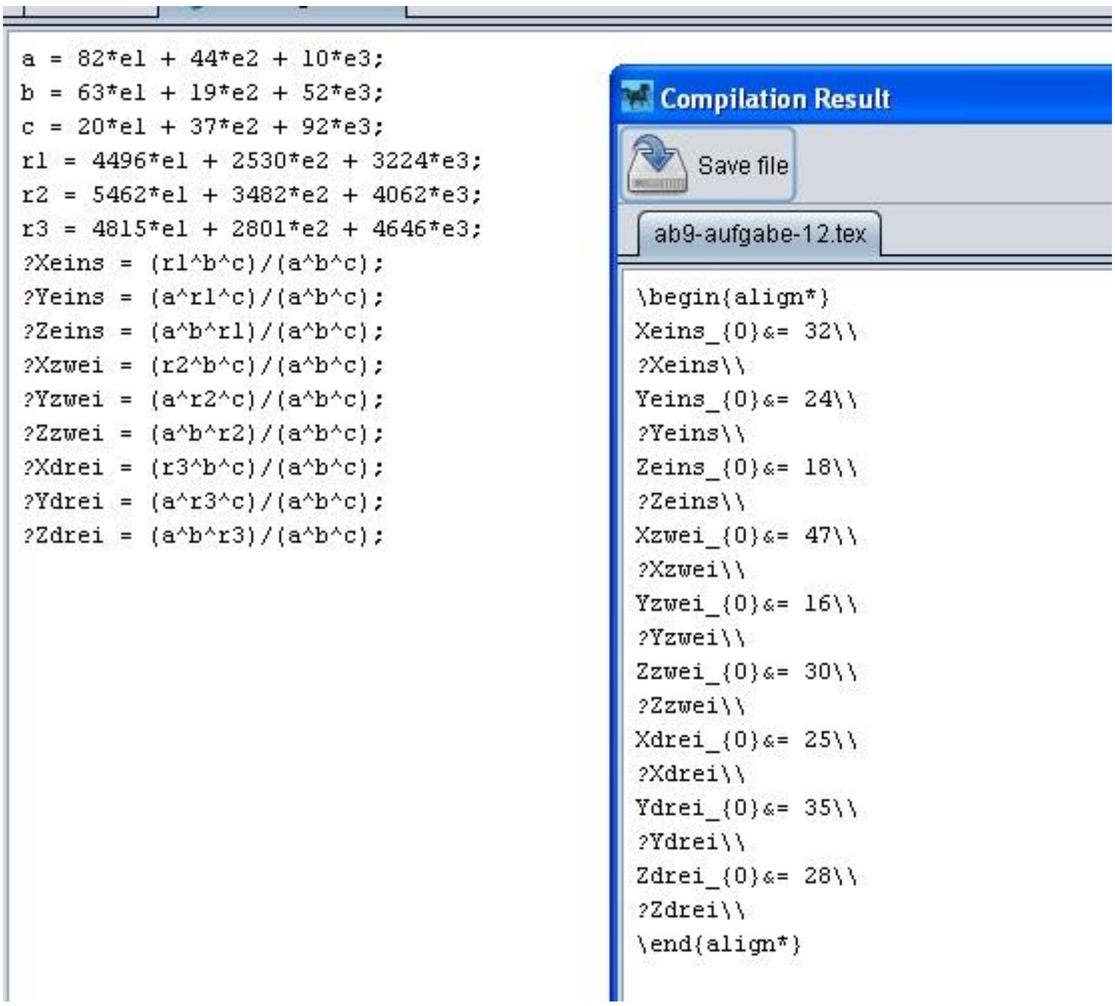
A .... Bedarfsmatrix des ersten Produktionsschritts

$\Rightarrow$ Drei Lineare Gleichungssysteme:

$$\begin{aligned} 82\,x_1 + 63\,y_1 + 20\,z_1 &= 4496 \\ 44\,x_1 + 19\,y_1 + 37\,z_1 &= 2530 \\ 10\,x_1 + 52\,y_1 + 92\,z_1 &= 3224 \end{aligned} \quad \text{und} \quad \begin{aligned} 82\,x_2 + 63\,y_2 + 20\,z_2 &= 5462 \\ 44\,x_2 + 19\,y_2 + 37\,z_2 &= 3482 \\ 10\,x_2 + 52\,y_2 + 92\,z_2 &= 4062 \end{aligned} \quad \text{und} \quad \begin{aligned} 82\,x_3 + 63\,y_3 + 20\,z_3 &= 4815 \\ 44\,x_3 + 19\,y_3 + 37\,z_3 &= 2801 \\ 10\,x_3 + 52\,y_3 + 92\,z_3 &= 4646 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} \mathbf{a} &= 82\,\sigma_x + 44\,\sigma_y + 10\,\sigma_z \\ \mathbf{b} &= 63\,\sigma_x + 19\,\sigma_y + 52\,\sigma_z \\ \mathbf{c} &= 20\,\sigma_x + 37\,\sigma_y + 92\,\sigma_z \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \mathbf{r_1} &= 4496\,\sigma_x + 2530\,\sigma_y + 3224\,\sigma_z \\ \mathbf{r_2} &= 5462\,\sigma_x + 3482\,\sigma_y + 4062\,\sigma_z \\ \mathbf{r_3} &= 4815\,\sigma_x + 2801\,\sigma_y + 4646\,\sigma_z \end{aligned}$$

Lösung mit Hilfe von GAALOP:



Lösung der drei Linearen Gleichungssysteme:

$x_1 = (\mathbf{r_1} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) / (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = 32$ $\quad$ $x_2 = (\mathbf{r_2} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) / (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = 47$

$y_1 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{r_1} \wedge \mathbf{c}) / (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = 24$ $\quad$ $y_2 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{r_2} \wedge \mathbf{c}) / (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = 16$

$z_1 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{r_1}) / (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = 18$ $\quad$ $z_2 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{r_2}) / (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = 30$

$x_3 = (\mathbf{r_3} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) / (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = 25$

$y_3 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{r_3} \wedge \mathbf{c}) / (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = 35$

$z_3 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{r_3}) / (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = 28$

Probe:			32	47	25
			24	16	35
			18	30	28
82	63	20	4496	5462	4815
44	19	37	2530	3482	2801
10	52	92	3224	4062	4646

$\Rightarrow$ Die Zwischenbedarfsmatrix **B** lautet: $\quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 32 & 47 & 25 \\ 24 & 16 & 35 \\ 18 & 30 & 28 \end{pmatrix}$

Aufgabe 13:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 2 & 6 & 3 \\ 8 & 7 & 10 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}^{-1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{E}\text{ .... Einheitsmatrix}} \qquad \mathbf{A}\,\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}$$

$\Rightarrow$ Drei Lineare Gleichungssysteme:

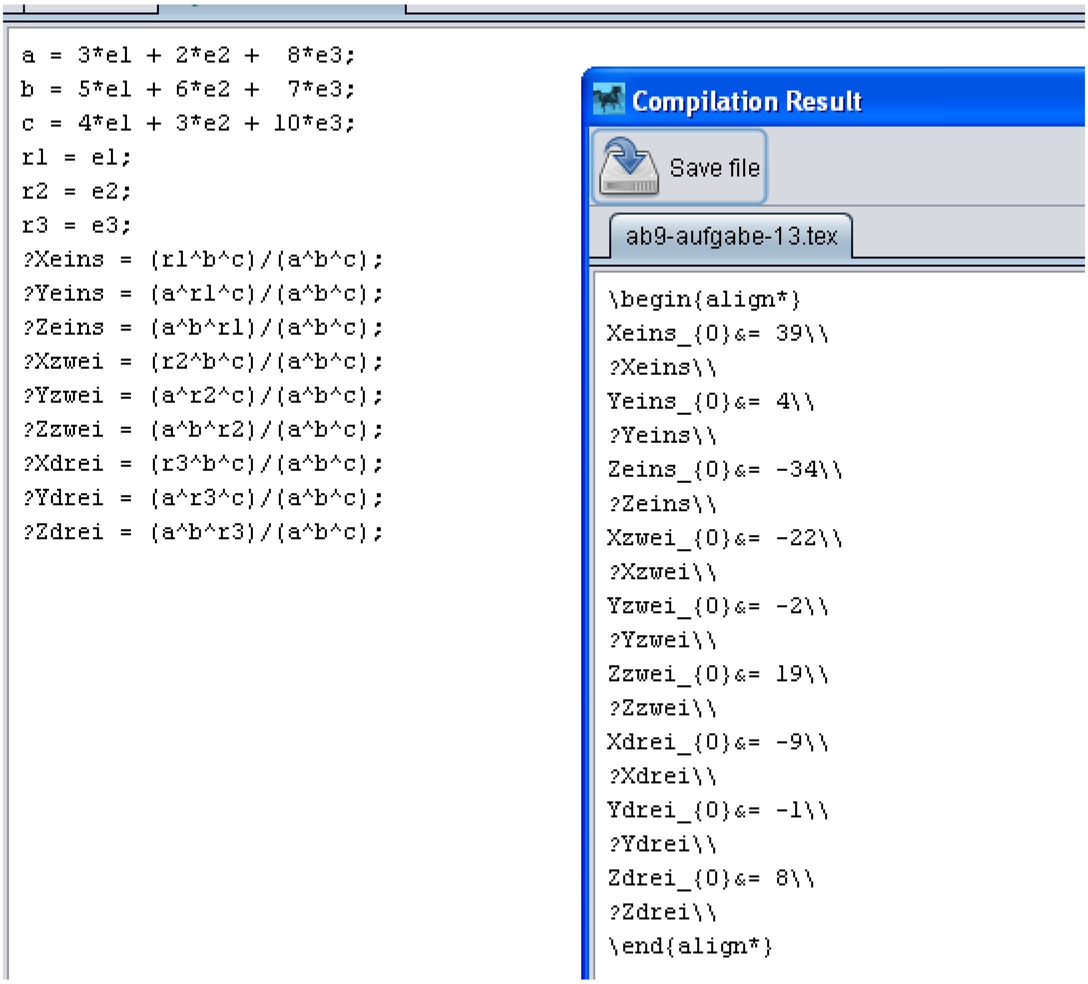
$$\begin{array}{lclcl} 3\,x_1 + 5\,y_1 + 4\,z_1 = 1 & & 3\,x_2 + 5\,y_2 + 4\,z_2 = 0 & & 3\,x_3 + 5\,y_3 + 4\,z_3 = 0 \\ 2\,x_1 + 6\,y_1 + 3\,z_1 = 0 & \text{und} & 2\,x_2 + 6\,y_2 + 3\,z_2 = 1 & \text{und} & 2\,x_3 + 6\,y_3 + 3\,z_3 = 0 \\ 8\,x_1 + 7\,y_1 + 10\,z_1 = 0 & & 8\,x_2 + 7\,y_2 + 10\,z_2 = 0 & & 8\,x_3 + 7\,y_3 + 10\,z_3 = 1 \end{array}$$

$\Rightarrow$ $\mathbf{a} = 3\,\sigma_x + 2\,\sigma_y + 8\,\sigma_z$ $\quad$ $\mathbf{r_1} = \sigma_x$

$\mathbf{b} = 5\,\sigma_x + 6\,\sigma_y + 7\,\sigma_z$ $\quad$ $\mathbf{r_2} = \sigma_y$

$\mathbf{c} = 4\,\sigma_x + 3\,\sigma_y + 10\,\sigma_z$ $\quad$ $\mathbf{r_3} = \sigma_z$

Lösung mit Hilfe von GAALOP:



Lösung des ersten Linearen Gleichungssystems:

$$x_1 = (\mathbf{r_1} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) \,/\, (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = 39$$
$$y_1 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{r_1} \wedge \mathbf{c}) \,/\, (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = 4$$
$$z_1 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{r_1}) \,/\, (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = -34$$

$\Rightarrow$ Wenn im Produktionsprozess genau eine einzige ME des ersten Rohstoffes R_1 verbraucht werden soll, werden 39 ME des ersten Endproduktes E_1 und 4 ME des zweiten Endproduktes E_2 hergestellt und zusätzlich 34 ME des dritten Endproduktes E_3 verbraucht und wieder verlustfrei in die Rohstoffe zerlegt.

Oder ökonomisch realistischer:

Wenn zufällig eine ME des ersten Rohstoffes R_1 mehr geliefert und nun im Produktionsprozess zusätzlich verbraucht werden soll, wird die bereits existierende Produktionsplanung geändert und es werden 39 ME des ersten Endproduktes E_1 und 4 ME des zweiten Endproduktes E_2 mehr hergestellt und es werden 34 ME des dritten Endproduktes E_3 weniger hergestellt.
(Irgendwie so können Sie sich in etwa die Wirtschaft der ehemals real existierenden DDR vorstellen, da die Produktionsplanung nicht auf die Nachfrage von Kundenseite, sondern auf das zur Verfügung stehende Rohstoffangebot ausgerichtet werden musste.)

Lösung des zweiten Linearen Gleichungssystems:

$x_2 = (\mathbf{r_2} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) / (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = -22$

$y_2 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{r_2} \wedge \mathbf{c}) / (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = -2$

$z_2 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{r_2}) / (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = 19$

$\Rightarrow$ Wenn im Produktionsprozess genau eine einzige ME des zweiten Rohstoffes R_2 verbraucht werden soll, werden 22 ME des ersten Endproduktes E_1 und 2 ME des zweiten Endproduktes E_2 ebenfalls verbraucht und wieder verlustfrei in die Rohstoffe zerlegt, und es werden 19 ME des dritten Endproduktes E_3 hergestellt.

Oder ökonomisch realistischer:

Wenn zufällig eine ME des zweiten Rohstoffes R_2 mehr geliefert und nun im Produktionsprozess zusätzlich verbraucht werden soll, wird die bereits existierende Produktionsplanung geändert und es werden 22 ME des ersten Endproduktes E_1 und 2 ME des zweiten Endproduktes E_2 weniger hergestellt und es werden 19 ME des dritten Endproduktes E_3 mehr hergestellt.

Lösung des dritten Linearen Gleichungssystems:

$x_3 = (\mathbf{r_3} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) / (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = -9$

$y_3 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{r_3} \wedge \mathbf{c}) / (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = -1$

$z_3 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{r_3}) / (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = 8$

$\Rightarrow$ Wenn im Produktionsprozess genau eine einzige ME des dritten Rohstoffes R_3 verbraucht werden soll, werden 9 ME des ersten Endproduktes E_1 und eine ME des zweiten Endproduktes E_2 ebenfalls verbraucht und wieder verlustfrei in die Rohstoffe zerlegt, und es werden 8 ME des dritten Endproduktes E_3 hergestellt.

Oder ökonomisch realistischer:

Wenn zufällig eine ME des dritten Rohstoffes R_3 mehr geliefert und nun im Produktionsprozess zusätzlich verbraucht werden soll, wird die bereits existierende Produktionsplanung geändert und es werden 9 ME des ersten Endproduktes E_1 und eine ME des zweiten Endproduktes E_2 weniger hergestellt und es werden 8 ME des dritten Endproduktes E_3 mehr hergestellt.

Probe:			39	–22	–9
			4	–2	–1
			–34	19	8
3	5	4	1	0	0
2	6	3	0	1	0
8	7	10	0	0	1

$\Rightarrow$ Die Inverse der Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 2 & 6 & 3 \\ 8 & 7 & 10 \end{pmatrix}$ lautet: $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 39 & -22 & -9 \\ 4 & -2 & -1 \\ -34 & 19 & 8 \end{pmatrix}$

Aufgabe 14:

a) $$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 7 & 2 & 6 \\ 6 & 3 & 8 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}^{-1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{E}} \qquad \mathbf{A\,A^{-1} = E}$$

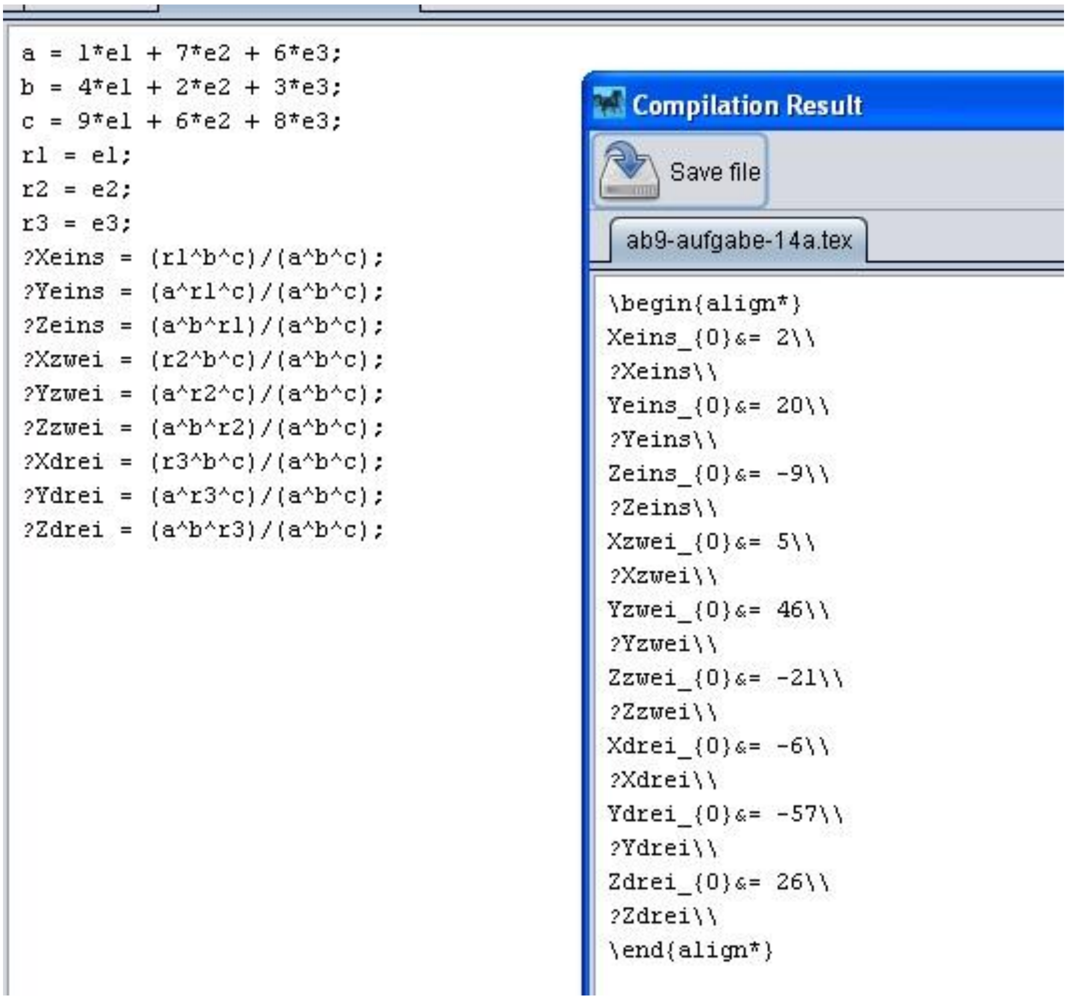
E .... Einheitsmatrix

$\Rightarrow$ Drei Lineare Gleichungssysteme:

$$\begin{aligned} x_1 + 4\,y_1 + 9\,z_1 &= 1 \\ 7\,x_1 + 2\,y_1 + 6\,z_1 &= 0 \\ 6\,x_1 + 3\,y_1 + 8\,z_1 &= 0 \end{aligned} \quad \text{und} \quad \begin{aligned} x_2 + 4\,y_2 + 9\,z_2 &= 0 \\ 7\,x_2 + 2\,y_2 + 6\,z_2 &= 1 \\ 6\,x_2 + 3\,y_2 + 8\,z_2 &= 0 \end{aligned} \quad \text{und} \quad \begin{aligned} x_3 + 4\,y_3 + 9\,z_3 &= 0 \\ 7\,x_3 + 2\,y_3 + 6\,z_3 &= 0 \\ 6\,x_3 + 3\,y_3 + 8\,z_3 &= 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} \mathbf{a} &= \sigma_x + 7\,\sigma_y + 6\,\sigma_z \\ \mathbf{b} &= 4\,\sigma_x + 2\,\sigma_y + 3\,\sigma_z \\ \mathbf{c} &= 9\,\sigma_x + 6\,\sigma_y + 8\,\sigma_z \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \mathbf{r_1} &= \sigma_x \\ \mathbf{r_2} &= \sigma_y \\ \mathbf{r_3} &= \sigma_z \end{aligned}$$

Lösung mit Hilfe von GAALOP:



Lösung der drei Linearen Gleichungssysteme:

$x_1 = (\mathbf{r_1} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) / (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = 2$ $\quad$ $x_2 = (\mathbf{r_2} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) / (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = 5$

$y_1 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{r_1} \wedge \mathbf{c}) / (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = 20$ $\quad$ $y_2 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{r_2} \wedge \mathbf{c}) / (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = 46$

$z_1 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{r_1}) / (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = -9$ $\quad$ $z_2 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{r_2}) / (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = -21$

$x_3 = (\mathbf{r_3} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) / (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = -6$

$y_3 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{r_3} \wedge \mathbf{c}) / (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = -57$

$z_3 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{r_3}) / (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = 26$

Probe:					
			2	5	– 6
			20	46	– 57
			– 9	– 21	26
1	4	9	1	0	0
7	2	6	0	1	0
6	3	8	0	0	1

$\Rightarrow$ Die Inverse der Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 7 & 2 & 6 \\ 6 & 3 & 8 \end{pmatrix}$ lautet: $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -6 \\ 20 & 46 & -57 \\ -9 & -21 & 26 \end{pmatrix}$

b) $$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 4 & 7 \\ 4 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}}_{\mathbf{B}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}}_{\mathbf{B}^{-1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{E}\text{ .... Einheitsmatrix}} \qquad \mathbf{B}\,\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{E}$$

$\Rightarrow$ Drei Lineare Gleichungssysteme:

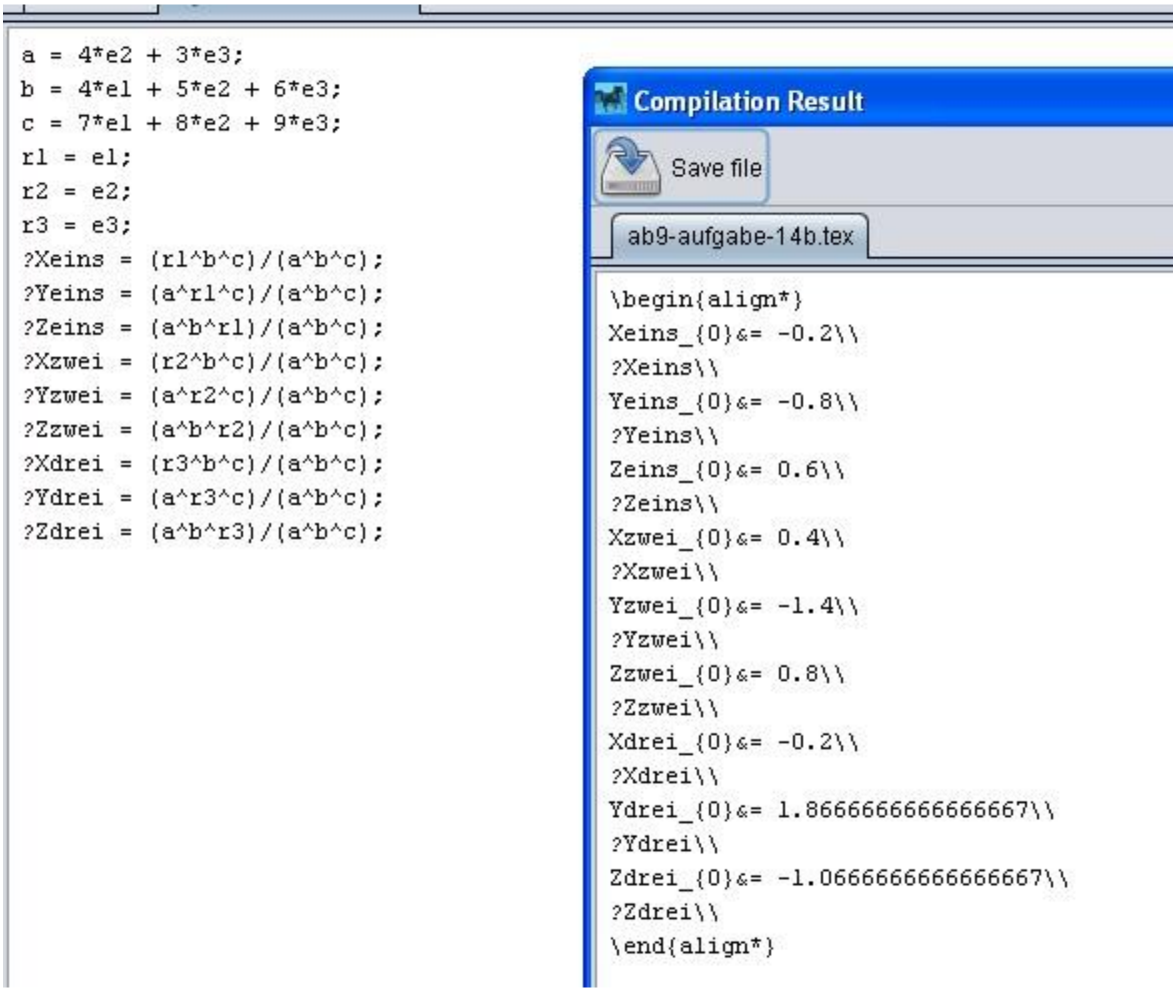
$$\begin{aligned} 4 y_1 + 7 z_1 &= 1 \\ 4 x_1 + 5 y_1 + 8 z_1 &= 0 \\ 3 x_1 + 6 y_1 + 9 z_1 &= 0 \end{aligned} \quad \text{und} \quad \begin{aligned} 4 y_2 + 7 z_2 &= 0 \\ 4 x_2 + 5 y_2 + 8 z_2 &= 1 \\ 3 x_2 + 6 y_2 + 9 z_2 &= 0 \end{aligned} \quad \text{und} \quad \begin{aligned} 4 y_3 + 7 z_3 &= 0 \\ 4 x_3 + 5 y_3 + 8 z_3 &= 0 \\ 3 x_3 + 6 y_3 + 9 z_3 &= 1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $\mathbf{a} = 4 \sigma_y + 3 \sigma_z$ $\qquad$ $\mathbf{r_1} = \sigma_x$

$\mathbf{b} = 4 \sigma_x + 5 \sigma_y + 6 \sigma_z$ $\qquad$ $\mathbf{r_2} = \sigma_y$

$\mathbf{c} = 7 \sigma_x + 8 \sigma_y + 9 \sigma_z$ $\qquad$ $\mathbf{r_3} = \sigma_z$

Lösung mit Hilfe von GAALOP:



Lösung der drei Linearen Gleichungssysteme:

$$x_1 = (\mathbf{r_1} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) / (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = -0{,}2 = -\frac{1}{5}$$

$$y_1 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{r_1} \wedge \mathbf{c}) / (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = -0{,}8 = -\frac{4}{5}$$

$$z_1 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{r_1}) / (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = 0{,}6 = \frac{3}{5}$$

$$x_2 = (\mathbf{r_2} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) / (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = 0{,}4 = \frac{2}{5}$$

$$y_2 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{r_2} \wedge \mathbf{c}) / (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = -1{,}4 = -\frac{7}{5}$$

$$z_2 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{r_2}) / (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = 0{,}8 = \frac{4}{5}$$

$$x_3 = (\mathbf{r_3} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) / (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = -0{,}2 = -\frac{1}{5}$$

$$y_3 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{r_3} \wedge \mathbf{c}) / (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = 1{,}8\overline{6}.. = \frac{28}{15}$$

$$z_3 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{r_3}) / (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = -1{,}0\overline{6}.. = -\frac{16}{15}$$

Probe:

			$-0{,}2$	$0{,}4$	$-0{,}2$
			$-0{,}8$	$-1{,}4$	$1{,}8\overline{6}..$
			$0{,}6$	$0{,}8$	$-1{,}0\overline{6}..$
0	4	7	1	0	0
4	5	8	0	1	0
3	6	9	0	0	1

Alternative Probe:

			-3	6	-3
			-12	-21	28
			9	12	-16
0	4	7	15	0	0
4	5	8	0	15	0
3	6	9	0	0	15

$\Rightarrow$ Die Inverse der Matrix $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 7 \\ 4 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ lautet:

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} -0{,}2 & 0{,}4 & -0{,}2 \\ -0{,}8 & -1{,}4 & 1{,}8\overline{6}.. \\ 0{,}6 & 0{,}8 & -1{,}0\overline{6}.. \end{pmatrix} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} -3 & 6 & -3 \\ -12 & -21 & 28 \\ 9 & 12 & -16 \end{pmatrix}$$

c) $$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}}_{\mathbf{C}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}}_{\mathbf{C}^{-1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{E}} \qquad \mathbf{C}\,\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{E}$$

E .... Einheitsmatrix

$\Rightarrow$ Drei Lineare Gleichungssysteme:

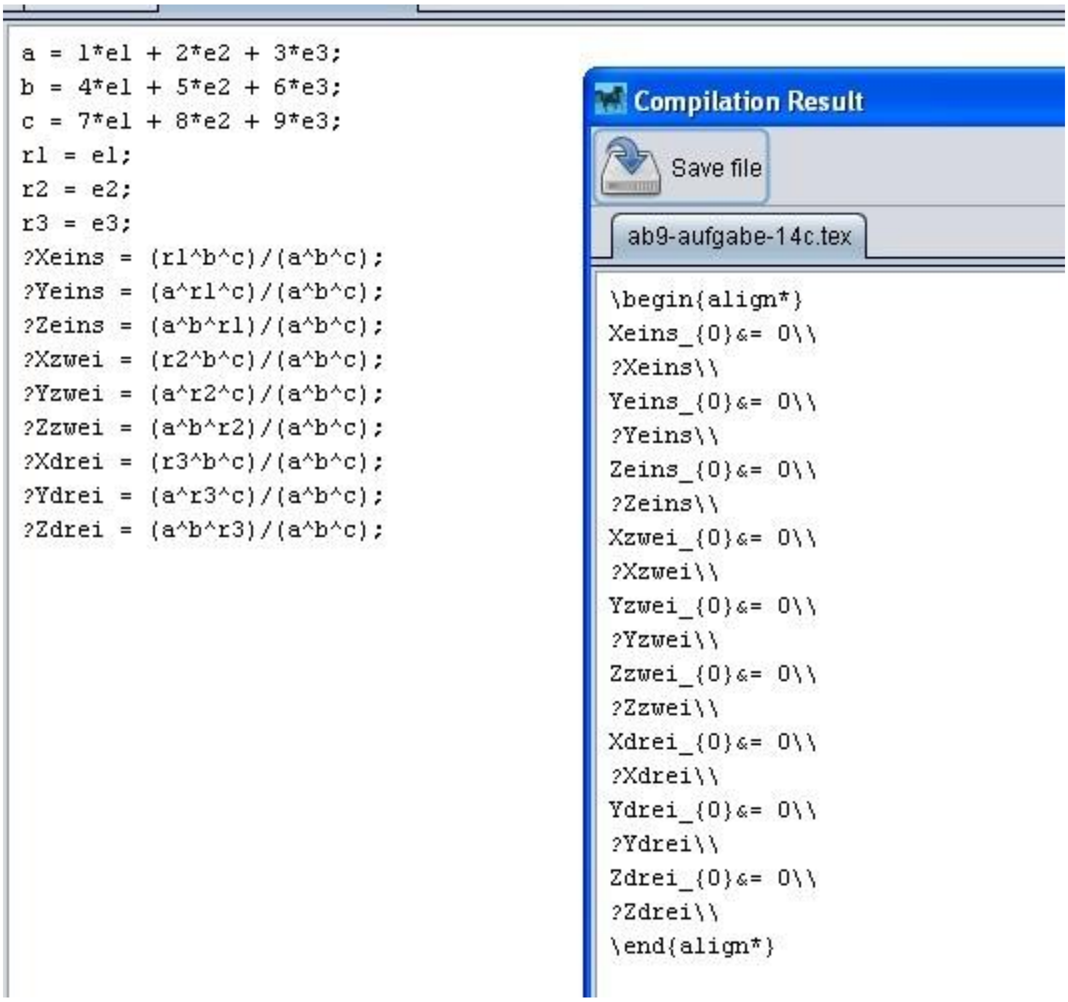
$$\begin{aligned} x_1 + 4\,y_1 + 7\,z_1 &= 1 \\ 2\,x_1 + 5\,y_1 + 8\,z_1 &= 0 \\ 3\,x_1 + 6\,y_1 + 9\,z_1 &= 0 \end{aligned} \quad \text{und} \quad \begin{aligned} x_2 + 4\,y_2 + 7\,z_2 &= 0 \\ 2\,x_2 + 5\,y_2 + 8\,z_2 &= 1 \\ 3\,x_2 + 6\,y_2 + 9\,z_2 &= 0 \end{aligned} \quad \text{und} \quad \begin{aligned} x_3 + 4\,y_3 + 7\,z_3 &= 0 \\ 2\,x_3 + 5\,y_3 + 8\,z_3 &= 0 \\ 3\,x_3 + 6\,y_3 + 9\,z_3 &= 1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $\mathbf{a} = \sigma_x + 2\,\sigma_y + 3\,\sigma_z$ $\qquad \mathbf{r_1} = \sigma_x$

$\mathbf{b} = 4\,\sigma_x + 5\,\sigma_y + 6\,\sigma_z$ $\qquad \mathbf{r_2} = \sigma_y$

$\mathbf{c} = 7\,\sigma_x + 8\,\sigma_y + 9\,\sigma_z$ $\qquad \mathbf{r_3} = \sigma_z$

Lösung mit Hilfe von GAALOP:



Vermeintliche Lösung der drei Linearen Gleichungssysteme:

$x_1 = (\mathbf{r_1} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) / (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = 0$ $\qquad$ $x_2 = (\mathbf{r_2} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) / (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = 0$

$y_1 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{r_1} \wedge \mathbf{c}) / (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = 0$ $\qquad$ $y_2 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{r_2} \wedge \mathbf{c}) / (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = 0$

$z_1 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{r_1}) / (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = 0$ $\qquad$ $z_2 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{r_2}) / (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = 0$

$x_3 = (\mathbf{r_3} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) / (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = 0$

$y_3 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{r_3} \wedge \mathbf{c}) / (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = 0$

$z_3 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{r_3}) / (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = 0$

Probe:					
			0	0	0
			0	0	0
			0	0	0
1	4	7	0	0	0
2	5	8	0	0	0
3	6	9	0	0	0

Dies ist nicht die Einheitsmatrix **E**! $\quad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ Die Probe zeigt, dass die von GAALOP ermittelten Lösungen falsch sind.

Grund: Siehe Bemerkung am Ende der ersten Seite der Aufgabenstellung…

> **… Aufgaben, die sich auf Lineare Gleichungssysteme aus drei linearen Gleichungen beziehen. Zur Lösung dieser Gleichungen wird deshalb die Mathematik von Vektoren, die in alle drei Raumrichtungen x, y und z zeigen, benötigt.**

Die drei Koeffizientenvektoren spannen keinen dreidimensionalen Raum auf, sondern nur eine Ebene, da sie nicht linear unabhängig sind. Jeder Koeffizientenvektor kann als Linearkombination der beiden anderen Koeffizientenvektoren geschrieben werden:

$$\mathbf{a} = 2\,\mathbf{b} - \mathbf{c}$$

$$\mathbf{b} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{a})$$

$$\mathbf{c} = 2\,\mathbf{b} - \mathbf{a}$$

Ein möglicher Ergebnisvektor **r** muss deshalb in Richtung der Ebene, die durch die Koeffizientenvektoren aufgespannt wird, zeigen, damit Lösungen für x, y, z gefunden werden können. Die drei Ergebnisvektoren dieser Aufgabe $\mathbf{r_1} = \sigma_x$, $\mathbf{r_2} = \sigma_y$ und $\mathbf{r_3} = \sigma_z$ zeigen jedoch nicht in Richtung dieser Ebene. Deshalb existieren keine (reellen) Lösungswerte für die drei Variablen x, y, z.

Diese geometrische Begründung lässt sich auch algebraisch deuten, denn das äußere Produkt der drei Koeffizientenvektoren $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$ ist Null:

$$\mathbf{a}\,\mathbf{b} = (\sigma_x + 2\,\sigma_y + 3\,\sigma_z)\,(4\,\sigma_x + 5\,\sigma_y + 6\,\sigma_z) = 32 - 3\,\sigma_x\sigma_y - 3\,\sigma_y\sigma_z + 6\,\sigma_z\sigma_x$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = -\,3\,\sigma_x\sigma_y - 3\,\sigma_y\sigma_z + 6\,\sigma_z\sigma_x$$

$$\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c} = (32 - 3\,\sigma_x\sigma_y - 3\,\sigma_y\sigma_z + 6\,\sigma_z\sigma_x)\,(7\,\sigma_x + 8\,\sigma_y + 9\,\sigma_z)$$

$$= 146\,\sigma_x + 250\,\sigma_y + 354\,\sigma_z + 0\,\sigma_x\sigma_y\sigma_z$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} = 0$$

Probe: $(1^2 + 2^2 + 3^2)\,(4^2 + 5^2 + 6^2)\,(7^2 + 8^2 + 9^2) = (146^2 + 250^2 + 354^2) = 209\,132$

In den Lösungsformeln für die gesuchten Variablen wird durch das äußere Produkt ($\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$) geteilt. Da dieses äußere Produkt (mit anderen Worten: da die Determinante der Matrix **C**) Null ist, findet hier eine nicht erlaubte Division durch Null statt.

Da durch Null nicht dividiert werden darf, sind die Lösungswerte falsch.

$\Rightarrow$ Aufgabenteil c) ist unlösbar.

$\Rightarrow$ $\mathbf{C}^{-1}$ = undefiniert

$\Rightarrow$ Ex existiert keine Inverse zur Matrix $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$.

d) $$\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 4 & 8 \\ 10 & 5 & 10 \\ 10 & 20 & 15 \end{pmatrix}}_{\mathbf{D}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}}_{\mathbf{D}^{-1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{E}} \qquad \mathbf{D}\,\mathbf{D}^{-1} = \mathbf{E}$$

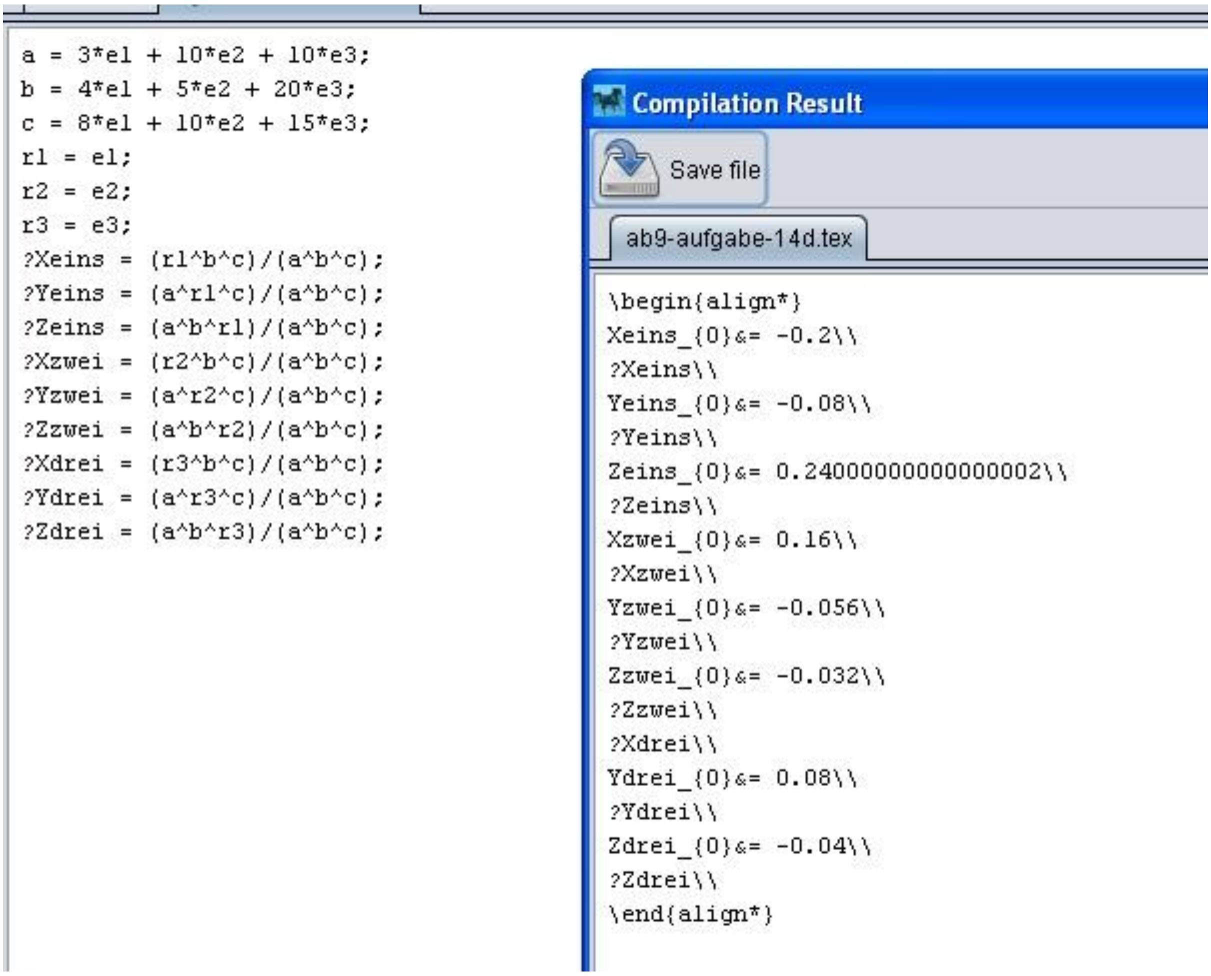
E .... Einheitsmatrix

$\Rightarrow$ Drei Lineare Gleichungssysteme:

$$\begin{array}{l} 3\,x_1 + 4\,y_1 + 8\,z_1 = 1 \\ 10\,x_1 + 5\,y_1 + 10\,z_1 = 0 \\ 10\,x_1 + 20\,y_1 + 15\,z_1 = 0 \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{l} 3\,x_2 + 4\,y_2 + 8\,z_2 = 0 \\ 10\,x_2 + 5\,y_2 + 10\,z_2 = 1 \\ 10\,x_2 + 20\,y_2 + 15\,z_2 = 0 \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{l} 3\,x_3 + 4\,y_3 + 8\,z_3 = 0 \\ 10\,x_3 + 5\,y_3 + 10\,z_3 = 0 \\ 10\,x_3 + 20\,y_3 + 15\,z_3 = 1 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{ll} \mathbf{a} = 3\,\sigma_x + 10\,\sigma_y + 10\,\sigma_z & \mathbf{r_1} = \sigma_x \\ \mathbf{b} = 4\,\sigma_x + 5\,\sigma_y + 20\,\sigma_z & \mathbf{r_2} = \sigma_y \\ \mathbf{c} = 8\,\sigma_x + 10\,\sigma_y + 15\,\sigma_z & \mathbf{r_3} = \sigma_z \end{array}$$

Lösung mit Hilfe von GAALOP:



Da keine Skalar-Komponente Xdrei_{0} im Compiler-Feld aufgeführt wird, ist diese Null:
Xdrei_{0} &= 0

Lösung der drei Linearen Gleichungssysteme:

$x_1 = (\mathbf{r_1} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) / (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = -0{,}20 = -\frac{1}{5}$

$y_1 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{r_1} \wedge \mathbf{c}) / (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = -0{,}08 = -\frac{2}{25}$

$z_1 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{r_1}) / (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = 0{,}24 = \frac{6}{25}$

$x_2 = (\mathbf{r_2} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) / (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = 0{,}160 = \frac{4}{25}$

$y_2 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{r_2} \wedge \mathbf{c}) / (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = -0{,}056 = -\frac{7}{125}$

$z_2 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{r_2}) / (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = -0{,}032 = -\frac{4}{125}$

$x_3 = (\mathbf{r_3} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) / (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = 0$

$y_3 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{r_3} \wedge \mathbf{c}) / (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = 0{,}08 = \frac{2}{25}$

$z_3 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{r_3}) / (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = -0{,}04 = -\frac{1}{25}$

Probe:			– 0,20	0,160	0
			– 0,08	– 0,056	0,08
			0,24	– 0,032	– 0,04
3	4	8	1	0	0
10	5	10	0	1	0
10	20	15	0	0	1

Alternative Probe:			– 25	20	0
			– 10	– 7	10
			30	– 4	– 5
3	4	8	125	0	0
10	5	10	0	125	0
10	20	15	0	0	125

$\Rightarrow$ Die Inverse der Matrix $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 8 \\ 10 & 5 & 10 \\ 10 & 20 & 15 \end{pmatrix}$ lautet:

$$\mathbf{D}^{-1} = \begin{pmatrix} -0{,}20 & 0{,}160 & 0 \\ -0{,}08 & -0{,}056 & 0{,}08 \\ 0{,}24 & -0{,}032 & -0{,}04 \end{pmatrix} = \frac{1}{125} \begin{pmatrix} -25 & 20 & 0 \\ -10 & -7 & 10 \\ 30 & -4 & -5 \end{pmatrix}$$

Wirtschaftsmathematik (LV-Nr. 200 601.07)

Übungsblatt 21 – Lösungen

Aufgabe 8:

a) $\mathbf{a} = 20\,\sigma_x + 6\,\sigma_y$
$\mathbf{b} = -\,2\,\sigma_x + 10\,\sigma_y$

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\,\mathbf{b} &= (20\,\sigma_x + 6\,\sigma_y)\,(-\,2\,\sigma_x + 10\,\sigma_y)\\ &= -\,40\,\sigma_x^2 + 200\,\sigma_x\sigma_y - 12\,\sigma_y\sigma_x + 60\,\sigma_y^2\\ &= -\,40 + 200\,\sigma_x\sigma_y + 12\,\sigma_x\sigma_y + 60\\ &= 20 + 212\,\sigma_x\sigma_y\end{aligned}$$

$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = 212\,\sigma_x\sigma_y \quad \Rightarrow \quad |\mathbf{A}| = 212\text{ cm}^2$

b) $\mathbf{a} = 18\,\sigma_x + \;\;4\,\sigma_y$
$\mathbf{d} = 10\,\sigma_x + 12\,\sigma_y$

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\,\mathbf{d} &= (18\,\sigma_x + 4\,\sigma_y)\,(10\,\sigma_x + 12\,\sigma_y)\\ &= 180\,\sigma_x^2 + 216\,\sigma_x\sigma_y + 40\,\sigma_y\sigma_x + 48\,\sigma_y^2\\ &= 180 + 216\,\sigma_x\sigma_y - 40\,\sigma_x\sigma_y + 48\\ &= 228 + 176\,\sigma_x\sigma_y\end{aligned}$$

$\mathbf{a} \wedge \mathbf{d} = 176\,\sigma_x\sigma_y \quad \Rightarrow \quad |\mathbf{A}| = 176\text{ cm}^2$

Alternative Lösung:

$$\begin{aligned}\mathbf{b} = \mathbf{d} - \mathbf{a} &= (10\,\sigma_x + 12\,\sigma_y) - (18\,\sigma_x + 4\,\sigma_y)\\ &= 10\,\sigma_x + 12\,\sigma_y - 18\,\sigma_x - 4\,\sigma_y\\ &= -\,8\,\sigma_x + 8\,\sigma_y\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\,\mathbf{b} &= (18\,\sigma_x + 4\,\sigma_y)\,(-\,8\,\sigma_x + 8\,\sigma_y)\\ &= -\,144\,\sigma_x^2 + 144\,\sigma_x\sigma_y - 32\,\sigma_y\sigma_x + 32\,\sigma_y^2\\ &= -\,144 + 144\,\sigma_x\sigma_y + 32\,\sigma_x\sigma_y + 32\\ &= -\,112 + 176\,\sigma_x\sigma_y\end{aligned}$$

$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = 176\,\sigma_x\sigma_y \quad \Rightarrow \quad |\mathbf{A}| = 176\text{ cm}^2$

Aufgabe 9:

$8\,x + 10\,y = 280 \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{a} = \;\;8\,\sigma_x + \;\;5\,\sigma_y$
$5\,x + 15\,y = 280 \qquad\qquad\quad\;\; \mathbf{b} = 10\,\sigma_x + 15\,\sigma_y$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad\;\, \mathbf{r} = 280\,\sigma_x + 280\,\sigma_y$

$\mathbf{a}\,\mathbf{b} = (8\,\sigma_x + 5\,\sigma_y)\,(10\,\sigma_x + 15\,\sigma_y) = 155 + 70\,\sigma_x\sigma_y \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = 70\,\sigma_x\sigma_y$

$\mathbf{r}\,\mathbf{b} = (280\,\sigma_x + 280\,\sigma_y)\,(10\,\sigma_x + 15\,\sigma_y) = 7000 + 1400\,\sigma_x\sigma_y \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r} \wedge \mathbf{b} = 1400\,\sigma_x\sigma_y$

$\mathbf{a}\,\mathbf{r} = (8\,\sigma_x + 5\,\sigma_y)\,(280\,\sigma_x + 280\,\sigma_y) = 3640 + 840\,\sigma_x\sigma_y \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a} \wedge \mathbf{r} = 840\,\sigma_x\sigma_y$

$x = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{r} \wedge \mathbf{b}) = \frac{1400}{70} = 20 \qquad y = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{a} \wedge \mathbf{r}) = \frac{840}{70} = 12$

Probe:		
		20
		12
8	10	280
5	15	280

Es werden 20 ME des ersten Endproduktes E_1 und 12 ME des zweiten Endproduktes E_2 hergestellt, wenn im Herstellungsprozess 280 ME des ersten Rohstoffes R_1 und ebenfalls 280 ME des zweiten Rohstoffes R_2 verbraucht werden.

Aufgabe 10:

$7\,x_1 + 3\,y_1 = 94 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a} = 7\,\sigma_x + 8\,\sigma_y$

$8\,x_1 + 9\,y_1 = 152 \qquad\quad \mathbf{b} = 3\,\sigma_x + 9\,\sigma_y$

$\mathbf{r_1} = 94\,\sigma_x + 152\,\sigma_y$

$\mathbf{a}\,\mathbf{b} = (7\,\sigma_x + 8\,\sigma_y)\,(3\,\sigma_x + 9\,\sigma_y) = 93 + 39\,\sigma_x\sigma_y \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = 39\,\sigma_x\sigma_y$

$\mathbf{r_1}\,\mathbf{b} = (94\,\sigma_x + 152\,\sigma_y)\,(3\,\sigma_x + 9\,\sigma_y) = 1650 + 390\,\sigma_x\sigma_y \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r_1} \wedge \mathbf{b} = 390\,\sigma_x\sigma_y$

$\mathbf{a}\,\mathbf{r_1} = (7\,\sigma_x + 8\,\sigma_y)\,(94\,\sigma_x + 152\,\sigma_y) = 1874 + 312\,\sigma_x\sigma_y \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a} \wedge \mathbf{r_1} = 312\,\sigma_x\sigma_y$

$x_1 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{r_1} \wedge \mathbf{b}) = \frac{390}{39} = 10 \qquad y_1 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{a} \wedge \mathbf{r_1}) = \frac{312}{39} = 8$

$7\,x_2 + 3\,y_2 = 80 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a} = 7\,\sigma_x + 8\,\sigma_y$

$8\,x_2 + 9\,y_2 = 175 \qquad\quad \mathbf{b} = 3\,\sigma_x + 9\,\sigma_y$

$\mathbf{r_2} = 80\,\sigma_x + 175\,\sigma_y$

$\mathbf{r_2}\,\mathbf{b} = (80\,\sigma_x + 175\,\sigma_y)\,(3\,\sigma_x + 9\,\sigma_y) = 1815 + 195\,\sigma_x\sigma_y \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r_2} \wedge \mathbf{b} = 195\,\sigma_x\sigma_y$

$\mathbf{a}\,\mathbf{r_2} = (7\,\sigma_x + 8\,\sigma_y)\,(80\,\sigma_x + 175\,\sigma_y) = 1960 + 585\,\sigma_x\sigma_y \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a} \wedge \mathbf{r_2} = 585\,\sigma_x\sigma_y$

$x_2 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{r_2} \wedge \mathbf{b}) = \frac{195}{39} = 5 \qquad y_2 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{a} \wedge \mathbf{r_2}) = \frac{585}{39} = 15$

Probe:			
		10	5
		8	15
7	3	94	80
8	9	152	175

Die Bedarfsmatrix der zweiten Produktionsstufe lautet: $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 8 & 15 \end{pmatrix}$

Aufgabe 11:

a) Falksches Schema:

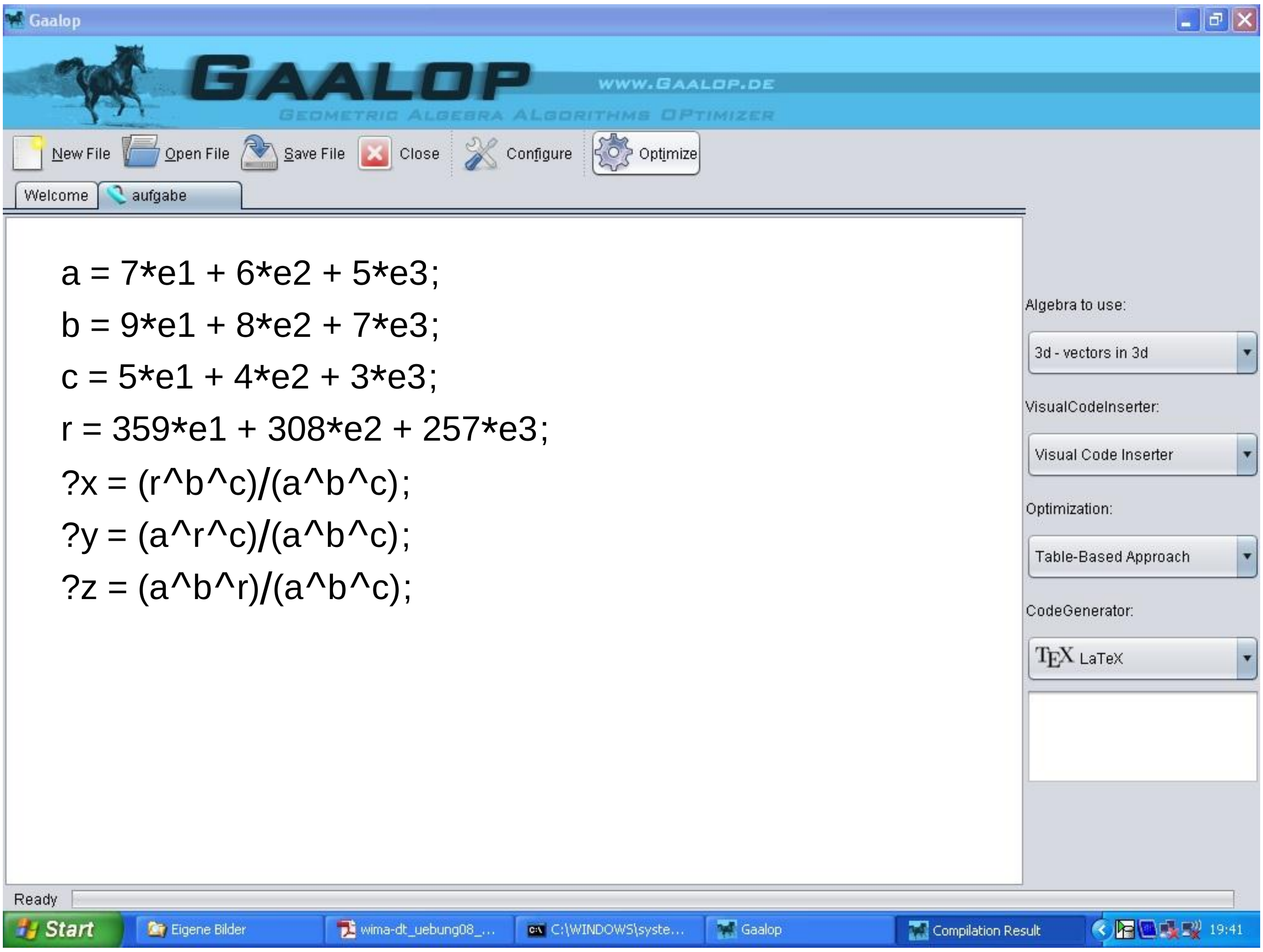
$$\begin{array}{ccc|l}
 & & & x \\
 & & & y \\
 & & & z \\
\hline
7 & 9 & 5 & 7\,x + 9\,y + 5\,z = 359 \\
6 & 8 & 4 & 6\,x + 8\,y + 4\,z = 308 \\
5 & 7 & 3 & 5\,x + 7\,y + 3\,z = 257
\end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{c} 1\\1\\1 \end{array}}\right\} \text{Lineares Gleichungssystem}$$

$\Rightarrow$ $\mathbf{a} = 7\,\sigma_x + 6\,\sigma_y + 5\,\sigma_z$ $\qquad$ $\mathbf{r} = 359\,\sigma_x + 308\,\sigma_y + 257\,\sigma_z$

$\mathbf{b} = 9\,\sigma_x + 8\,\sigma_y + 7\,\sigma_z$

$\mathbf{c} = 5\,\sigma_x + 4\,\sigma_y + 3\,\sigma_z$

b) GAALOP-Benutzeroberfläche:



c) Probe mit Hilfe des Falkschen Schemas:

			18
			17
			16
7	9	5	359
6	8	4	308
5	7	3	257

$\Rightarrow$ Die Probe zeigt, dass die Lösungswerte $x = 18$, $y = 17$, $z = 16$ richtig sind.

Es handelt sich dabei tatsächlich um eine korrekte Lösung des Linearen Gleichungssystems.

d) GAALOP gibt die Lösungswerte als undefiniert an, weil das Lösungssystem **nicht eindeutig** lösbar ist. Es existiert nicht nur die in c) überprüfte Lösung, sondern es existieren unendlich viele Lösungen. Beispielsweise sind die Lösungswerte $x = 20$, $y = 16$, $z = 15$ oder $x = 16$, $y = 18$, $z = 17$ jeweils korrekte Lösungen des Linearen Gleichungssystems

Proben:

			20
			16
			15
7	9	5	359
6	8	4	308
5	7	3	257

			16
			18
			17
7	9	5	359
6	8	4	308
5	7	3	257

Mathematische Begründung:

GAALOP gibt die Lösungswerte als nicht definiert an, weil das äußere Produkt der drei Koeffizientenvektoren **a**, **b** und **c** Null ist ...

$$\Rightarrow \quad \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} = 0\, \sigma_x\sigma_y\sigma_z = 0$$

Oder in anderen Worten:

GAALOP gibt die Lösungswerte als nicht definiert an, weil die Determinante der Matrix, die von den Koeffizienten des Linearen Gleichungssystems gebildet wird, Null ist ...

$$\Rightarrow \quad \det \begin{pmatrix} 7 & 9 & 5 \\ 6 & 8 & 4 \\ 5 & 7 & 3 \end{pmatrix} = 168 + 180 + 210 - 196 - 162 - 200 = 0$$

... In der Formel zur Berechnung der Lösungswerte muss jedoch durch das äußere Produkt der Koeffizientenvektoren bzw. durch die Determinante der Matrix, die von den Koeffizienten gebildet wird, dividiert werden.

Eine Division durch Null ist jedoch mathematisch nicht möglich.

$\Rightarrow$ Da GAALOP etwas mathematisch Unmögliches machen soll, gibt GAALOP die Lösungswerte als undefiniert an.

Aufgabe 12:

a) Falksches Schema:

			x
			y
			z
7	9	5	7 x + 9 y + 5 z = 422
6	8	4	6 x + 8 y + 4 z = 362
5	7	2	5 x + 7 y + 2 z = 283

} Lineares Gleichungssystem

Koeffizientenvektoren:

$\mathbf{a} = 7\ \sigma_x + 6\ \sigma_y + 5\ \sigma_z$

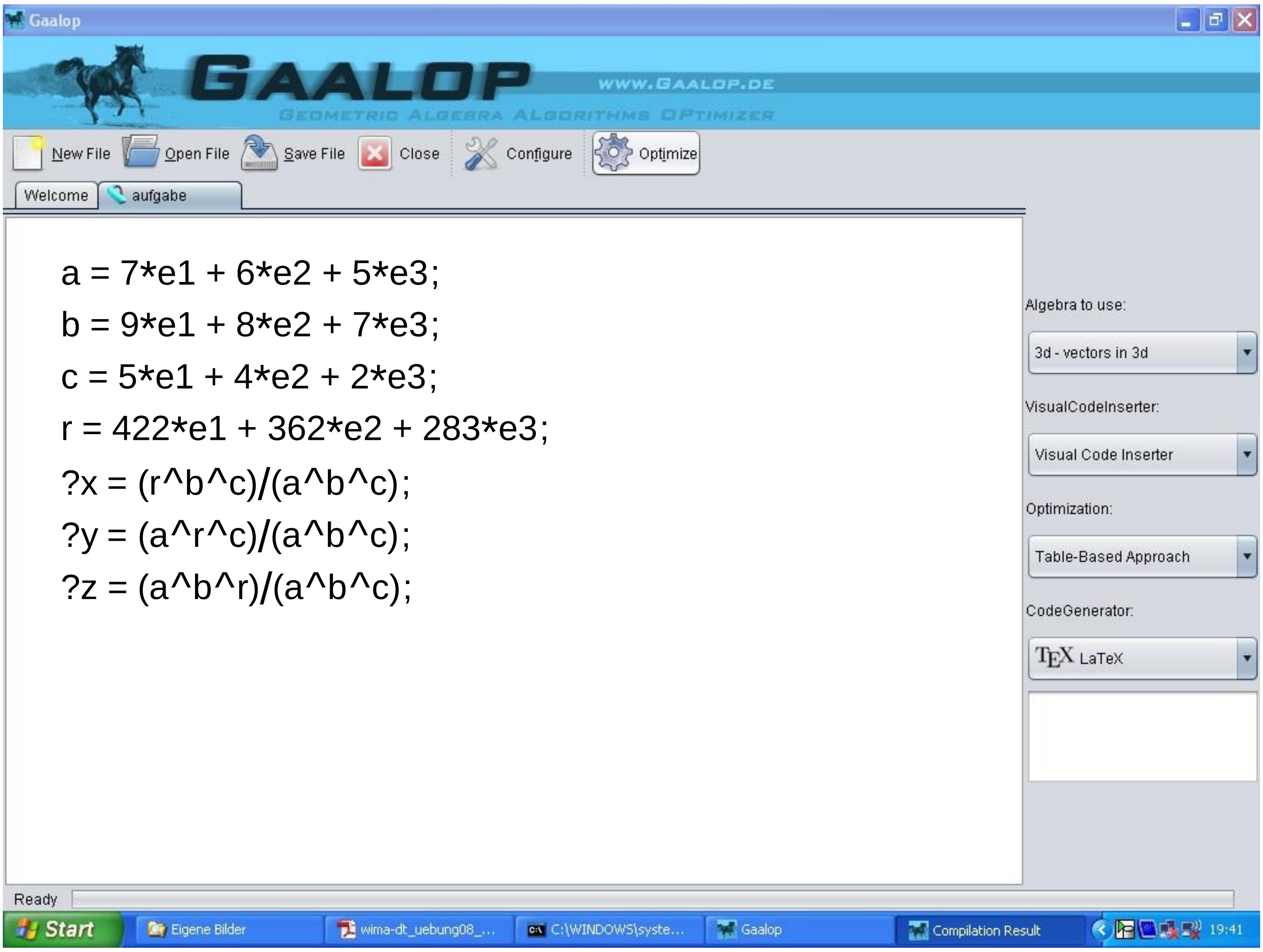
$\mathbf{b} = 9\ \sigma_x + 8\ \sigma_y + 7\ \sigma_z$

$\mathbf{c} = 5\ \sigma_x + 4\ \sigma_y + 2\ \sigma_z$

Ergebnisvektor:

$\mathbf{r} = 422\ \sigma_x + 362\ \sigma_y + 283\ \sigma_z$

b) GAALOP-Benutzeroberfläche:

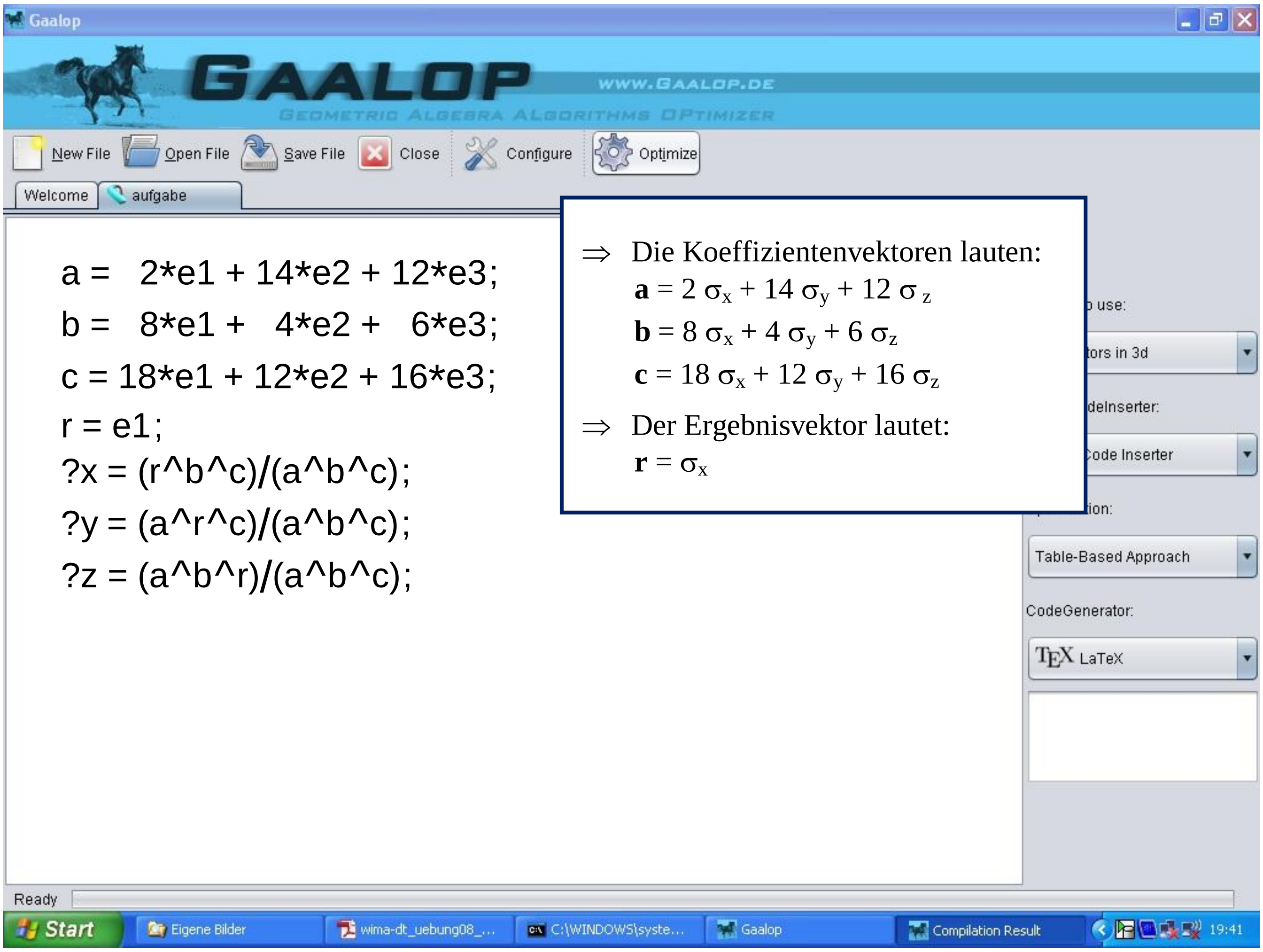


c) Probe mit Hilfe des Falkschen Schemas:

			21
			20
			19
7	9	5	422
6	8	4	362
5	7	2	283

$\Rightarrow$ Die Probe zeigt, dass die Lösungswerte $x = 21$, $y = 20$, $z = 19$ richtig sind und es sich um eine korrekte Lösung des Linearen Gleichungssystems handelt.

Aufgabe 13:



a) Falksches Schema:

$$
\begin{array}{ccc|c}
 & & & x \\
 & & & y \\
 & & & z \\
\hline
2 & 8 & 18 & 1 \\
14 & 4 & 12 & 0 \\
12 & 6 & 16 & 0
\end{array}
$$

Das ist die erste Spalte der folgenden Rechnung:

$$
\begin{array}{c|c}
 & \left.\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{matrix}\right\} \text{Inverse } \mathbf{A}^{-1} \\
\hline
\underbrace{\begin{matrix} 2 & 8 & 18 \\ 14 & 4 & 12 \\ 12 & 6 & 16 \end{matrix}}_{\text{Matrix } \mathbf{A}} & \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{\text{Einheitsmatrix } \mathbf{E}}
\end{array}
$$

⇒ Es wird **die erste Spalte der Inversen** der Matrix, die aus den Koeffizientenvektoren **a**, **b** und **c** besteht, berechnet.

b) Probe:

$$
\begin{array}{ccc|c}
 & & & 1 \\
 & & & 10 \\
 & & & -4{,}5 \\
\hline
2 & 8 & 18 & 2 \cdot 1 + 8 \cdot 10 + 18 \cdot (-4{,}5) = 1 \\
14 & 4 & 12 & 14 \cdot 1 + 4 \cdot 10 + 12 \cdot (-4{,}5) = 0 \\
12 & 6 & 16 & 12 \cdot 1 + 6 \cdot 10 + 16 \cdot (-4{,}5) = 0
\end{array}
$$

⇒ Die Probe zeigt, dass die angegebenen Lösungswerte die korrekten Ergebnisse der GAALOP-Aufgabe darstellen.