Posterbeitrag zur DPG-Frühjahrstagung 2018 an der Universität Würzburg, DD 02.35, Mo, 19. März 2018, 15:00 h – 16:40 h, Postersitzung, Foyer Informatikgebäude

Verallgemeinerte Matrizeninverse und Moore-Penrose-Matrizeninverse aus physikdidaktischer Sicht

Martin Erik Horn, HWR Berlin, FB 1, FE Quantitative Methoden

Hochschule für Wirtschaft und Recht Berlin
Berlin School of Economics and Law

Email: *e_hornm@doz.hwr-berlin.de*

Wirtschaftsmathematischer Ausgangspunkt

Immer mehr einführende Wirtschaftsmathematik-Lehrbücher erörtern Verallgemeinerte Matrizeninverse und Moore-Penrose-Inverse als elementraren Bestandteil wirtschaftsmathematischer Grundbildung. Auch hochschulische Kursveranstaltungen zu den Grundlagen der Wirtschaftsmathematik (wie z.B. an der FH Schmalkalden und der TU Dortmund) greifen den Themenbereich der Verallgemeinerten Matrizeninversen immer öfter auf.

Didaktisches Problem

Meistens werden Verallgemeinerte Matrizeninverse auf rein algebraischer Basis eingeführt Und diskutiert, die Moore-Penrose-Inversen beispielsweise anhand der vier Bedingungen:

$$\mathbf{A}\,\mathbf{A}^+\mathbf{A} = \mathbf{A} \qquad (\mathbf{A}^+\mathbf{A})^T = \mathbf{A}^+\mathbf{A}$$
$$\mathbf{A}^+\mathbf{A}\,\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^+ \qquad (\mathbf{A}\,\mathbf{A}^+)^T = \mathbf{A}\,\mathbf{A}^+$$

Um ein vollständiges Bild und zusätzliche didaktische Handlungsalternativen zu erhalten, ist es sinnvoll, Verallgemeinerte Matrizeninverse auch aus geometrischer Perspektive und unter Einbezug der Ideen von Grassmann und Hestenes zu diskutieren.

Didaktischer Blickwinkel

Die Geometrie verknüpft Hestenes zufolge die Algebra mit der physikalischen Welt.

Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftler anderer Fachgebiete werden diese Verknüpfungsbeziehung je nach Standpunkt auch aus einem anderen Blickwinkel zu deuten versuchen.

So ist es aus wirtschaftsmathematischer Perspektive legitim und didaktisch gerechtfertigt, die Verknüpfungsrichtung umzudeuten und zu sagen: Die Physik verknüpft die Algebra mit der Geometrie.

Physikdidaktischer Ausgangspunkt

Pauli-Matrizen repräsentieren Basisvektoren des dreidimensionalen Raums. Verallgemeinerte Pauli-Matrizen repräsentieren Basisvektoren höherdimensionaler Räume. (Und Dirac-Matrizen repräsentieren Basisvektoren vier- oder fünfdimensionaler Raumzeiten.)

Mit seiner Ausdehnungslehre formuliert Hermann Grassmann (1809 – 1877) bereits die Grundlagen verallgemeinerter Paul- und Dirac-Algebren. Die Lösung eines Systems Linearer Gleichungen gibt er schon 1844 in der ersten Auflage der Ausdehnungslehre an (siehe rechts).

Überblick: Erprobungen an der HWR Berlin

Teil 1: Grundlagen Teil 2: LGS mit zwei bzw. drei Unbekannten Teil 3: Direktes Produkt & LGS mit vier bzw. fünf Unbekannten	**WS 2014/2015** → DPG Wuppertal 2015
Teil 4: Gauß-Algorithmus als Koordinatentransformation	**WS 2015/2016** → DPG Hannover 2016
Teil 5: Eigenwerte und Eigenvektoren Teil 6: Sandwich-Produkte	**WS 2016/2017** → DPG Dresden 2017
Teil 7: Verallgemeinerte Matrizeninverse Ergänzendes Thema: GAALOP-Einsatz	**WS 2017/2018** → DPG Berlin & Würzburg 2018

‚Die Mathematik als ein Werkzeug der Physik' wird zu ‚Die Physik als ein Werkzeug der Mathematik'

Durch Rückgriff auf physikalische Argumentationsmuster der Pauli-Algebra können Moore-Penrose-Matrizeninverse geometrisch fundiert und so über die Algebra hinausgehend motiviert und erörtert werden.

Bei dieser Sichtweise wird die Mathematik nicht ausschließlich als ein Werkzeug der Physik, sondern umgekehrt ebenso die Physik – bzw. ein originär aus der Physik stammendes Konstrukt – als ein didaktisches Werkzeug der Mathematik betrachtet.

Lösung Linearer Gleichungen mit zwei Variablen

In moderner Schreibweise kann die Lösung eines Linearen Gleichungssystems $\mathbf{a}\,x + \mathbf{b}\,y = \mathbf{r}$ mit zwei Variablen x, y geschrieben werden als:

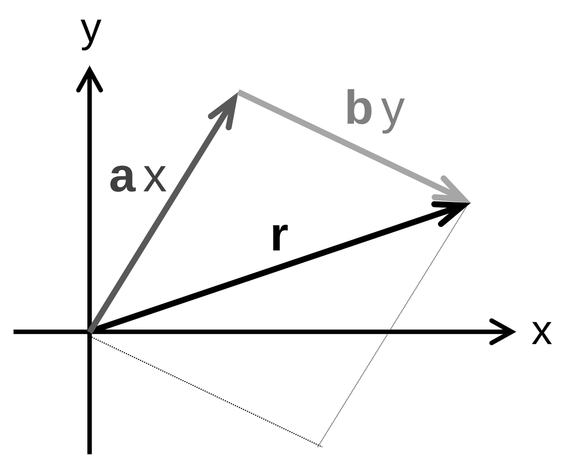
$$x = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{r} \wedge \mathbf{b}) \quad \text{oder} \quad x = (\mathbf{r} \wedge \mathbf{b})\,(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}$$
$$y = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{a} \wedge \mathbf{r}) \quad \text{oder} \quad y = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{r})\,(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}$$

Geometrische Interpretation der Grassmannschen Lösungsformeln

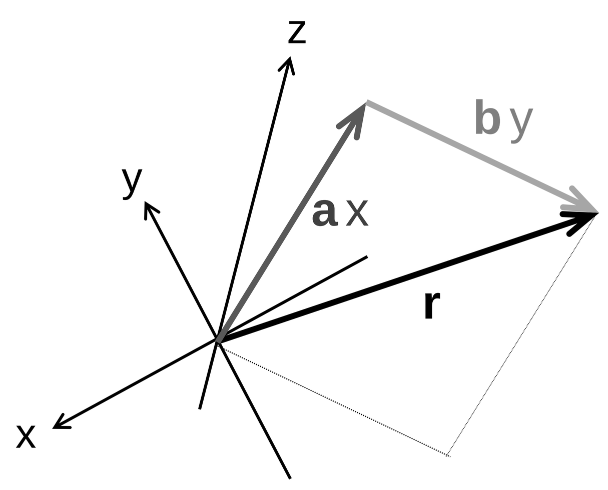
Das äu8ere Produkt zweier Vektoren kann als orientiertes Flächenstück und damit als die orientierte Fläche des durch diese beiden Vektoren aufgespannten Parallelogramms interpretiert werden. Da eine Änderung des Koordinatensystems die geometrische Situation nicht ändern wird, werden sich auch die Verhältnisse der orientierten Flächeninhalte der Parallelogramme $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$, $\mathbf{r} \wedge \mathbf{b}$ und $\mathbf{a} \wedge \mathbf{r}$ nicht ändern.

Koeffizienten-vektoren:
$\mathbf{a} = a_1\,\sigma_x + a_2\,\sigma_y$
$\mathbf{b} = b_1\,\sigma_x + b_2\,\sigma_y$
Ergebnisvektor:
$\mathbf{r} = r_1\,\sigma_x + r_2\,\sigma_y$

$$a_1\,x + b_1\,y = r_1$$
$$a_2\,x + b_2\,y = r_2$$



⟹



$$a_1\,x + b_1\,y = r_1$$
$$a_2\,x + b_2\,y = r_2$$
$$a_3\,x + b_3\,y = r_3$$

Koeffizienten-vektoren:
$\mathbf{a} = a_1\,\sigma_x + a_2\,\sigma_y + a_3\,\sigma_z$
$\mathbf{b} = b_1\,\sigma_x + b_2\,\sigma_y + b_3\,\sigma_z$
Ergebnisvektor:
$\mathbf{r} = r_1\,\sigma_x + r_2\,\sigma_y + r_3\,\sigma_z$

Eine Änderung des Koordinatensystem wird jedoch die algebraische Beschreibung der Vektoren ändern, die dann drei (anstelle von nur zwei) Komponenten aufweisen werden. Deshalb wird auch die inverse Matrix eine geänderte Darstellung besitzen. Diese Verallgemeinerte Pauli-Algebra-Matrizeninverse kann zur Lösung überdeterminierter **konsistenter** Linearer Gleichungssysteme, die mehr Gleichungen als Variablen aufweisen, genutzt werden.

Konventionelle Inverse quadratischer Matrizen und verallgemeinerte Matrizeninverse nicht-quadratischer Matrizen

Die Grassmannschen Lösungsformeln können immer auch als Matrizenmultiplikation formuliert werden. Die Matrix, die dabei mit dem Ergebnisvektor **r** multipliziert wird, wird die Inverse der ursprünglich gegebenen Koeffizientenmatrix sein.

$$x = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{r} \wedge \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\left((\sigma_x \wedge \mathbf{b})\,r_1 + (\sigma_y \wedge \mathbf{b})\,r_2\right)$$
$$y = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{a} \wedge \mathbf{r}) = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\underbrace{\left((\mathbf{a} \wedge \sigma_x)\,r_1 + (\mathbf{a} \wedge \sigma_y)\,r_2\right)}$$

Inverse einer (2 x 2)-Matrix: $\mathbf{A}^{-1} = \dfrac{1}{\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}} \begin{pmatrix} \sigma_x \wedge \mathbf{b} & \sigma_y \wedge \mathbf{b} \\ \mathbf{a} \wedge \sigma_x & \mathbf{a} \wedge \sigma_y \end{pmatrix}$

Wenn $(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \neq 0$ wird jedes Element von $\mathbf{A}^{-1}$ ein Skalar sein.

$$x = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{r} \wedge \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\left((\sigma_x \wedge \mathbf{b})\,r_1 + (\sigma_y \wedge \mathbf{b})\,r_2 + (\sigma_z \wedge \mathbf{b})\,r_3\right)$$
$$y = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{a} \wedge \mathbf{r}) = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\underbrace{\left((\mathbf{a} \wedge \sigma_x)\,r_1 + (\mathbf{a} \wedge \sigma_y)\,r_2 + (\mathbf{a} \wedge \sigma_z)\,r_3\right)}$$

Inverse einer (3 x 2)-Matrix: $\mathbf{A}^{-1} = \dfrac{1}{\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}} \begin{pmatrix} \sigma_x \wedge \mathbf{b} & \sigma_y \wedge \mathbf{b} & \sigma_z \wedge \mathbf{b} \\ \mathbf{a} \wedge \sigma_x & \mathbf{a} \wedge \sigma_y & \mathbf{a} \wedge \sigma_z \end{pmatrix}$
(falls der Bivektor $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ von links anmultipliziert wird)

Oder alternativ: $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma_x \wedge \mathbf{b} & \sigma_y \wedge \mathbf{b} & \sigma_z \wedge \mathbf{b} \\ \mathbf{a} \wedge \sigma_x & \mathbf{a} \wedge \sigma_y & \mathbf{a} \wedge \sigma_z \end{pmatrix} \dfrac{1}{\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}}$
(falls der Bivektor $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ von rechts anmultipliziert wird)

Da alle Elemente von $\mathbf{A}^{-1}$ Produkte zweier unterschiedlicher Bivektoren sind, werden diese Linearkombinationen aus Skalaren und Bivektoren sein.

⇒ Verallgemeinerte Pauli-Algebra-Matrizeninverse sind linkseitige Inverse. Die vierte Moore-Penrose-Bedingung gilt nur für die Skalarterme.

Schlussfolgerung

Die Elemente der Moore-Penrose-Matrizeninverse bestehen aus den skalarwertigen Anteilen der Verallgemeinerten Pauli-Algebra-Matrizeninversen.

Beispielaufgabe aus dem Skript