

Verallgemeinerte Matrizeninverse und Moore-Penrose-Matrizeninverse aus physikdidaktischer Sicht

Martin Erik Horn

HWR – Hochschule für Wirtschaft und Recht Berlin / Berlin School of Economics and Law
FB 1 – Wirtschaftswissenschaften, Facheinheit Quantitative Methoden
Badensche Str. 52 (Fach Nr. 63), D – 10825 Berlin
e_hornm@doz.hwr-berlin.de*

Kurzfassung

Die Geometrie verknüpft Hestenes zufolge die Algebra mit der physikalischen Welt. Dies ist die Sicht eines Physikers und Physikdidaktikers und so auch meine Sicht.

Dennoch ist klar, dass Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftler anderer Fachgebiete diese Verknüpfungsbeziehung unter einem anderen Blickwinkel betrachten werden. So ist es aus wirtschaftsmathematischer Perspektive nicht nur legitim, sondern auch didaktisch gerechtfertigt, die Verknüpfungsrichtung umzudeuten und zu sagen: Die Physik verknüpft die Algebra mit der Geometrie.

Am Beispiel verallgemeinerter Matrizeninverse wird dies aufgezeigt und hinterfragt: Moore-Penrose-Matrizeninverse werden derzeit in einführenden Wirtschaftsmathematik-Lehrbüchern hauptsächlich algebraisch unter Bezug auf die vier Moore-Penrose-Bedingungen motiviert und diskutiert. Durch Rückgriff auf physikalische und physikdidaktische Argumentationsmuster der Pauli-Algebra können Moore-Penrose-Matrizeninverse jedoch geometrisch fundiert und so über die Algebra weit hinausgehend erörtert werden.

Bei dieser Sichtweise wird die Mathematik somit nicht als ein Werkzeug der Physik, sondern die Physik – oder zumindest ein originär aus der Physik stammendes Konstrukt – als ein didaktisches Werkzeug der Mathematik betrachtet.

1. Verknüpfungsbeziehungen zwischen Physik, Mathematik und anderen Disziplinen

David Hestenes zufolge verknüpft Geometrie die Algebra mit der physikalischen Welt: „The power of GA (Geometric Algebra) derives from (...) the way geometry links the algebra to the physical world“ [1, S. 107].

Diese Verknüpfungen können gänzlich unterschiedlich gedacht und interpretiert werden – bis hin zu der radikalen Sichtweise Einsteins, dass die Geometrie selbst als ein Teil der Physik angesehen werden muss: „Um derartige (...physikalische...) Aussagen liefern zu können, muss die Geometrie dadurch ihres logisch-formalen Charakters entkleidet werden, dass den leeren Begriffsschemen der axiomatischen Geometrie erlebbare Gegenstände der Wirklichkeit (Erlebnisse) zugeordnet werden. (...) Die so ergänzte Geometrie ist offenbar eine Naturwissenschaft; wir können sie geradezu als den ältesten Zweig der Physik betrachten“ [2, S. 5/6].

Dies alles jedoch sind Sichtweisen von Physikerinnen und Physikern, von Physikdidaktikerinnen und

Physikdidaktikern, also von Protagonisten, die in der Regel sehr ähnliche wissenschaftstheoretische Prägnungen aufweisen. Und es sollte zu vermuten sein, dass Forscherinnen und Forscher anderer Wissenschaftsdisziplinen, die eine unter Umständen dramatisch andere wissenschaftstheoretische Prägung erfahren haben, auch andere Verknüpfungsbeziehungen zwischen den Disziplinen denken und herstellen.

So ist es aus wirtschaftsmathematischer und wirtschaftswissenschaftlicher Perspektive nicht nur legitim, sondern auch didaktisch gerechtfertigt, die Verknüpfungsrichtung umzudeuten und zu sagen: Die Physik verknüpft die Algebra mit der Geometrie.

Von dieser wirtschaftsmathematisch und wirtschaftswissenschaftlich basierten Perspektive ausgehend wird die Algebra nicht als ein Werkzeug der Physik, sondern vielmehr als ein Werkzeug der eigenen Disziplin eingeordnet. Der Physik kommt in dieser wirtschaftsmathematisch zentrierten Welt dann die Funktion eines Katalysators oder einer Brücke zu, die zwischen der Algebra und den Wirtschaftswissenschaften vermittelt.

Sehr konkret kann dies am Beispiel der Geometrischen Algebra bzw. der Pauli-Algebra als einer dreidimensional, Euklidisch reduzierten Geometrischen Algebra nachvollzogen werden.

* Aufgrund eines geplanten Hochschulwechsels ist diese Email-Adresse nur noch übergangsweise nutzbar. Zukünftig ist der Autor an der HTW Berlin unter hornmar@htw-berlin.de oder unter mail@martinerikhorn.de erreichbar.

Gemäß Einstein [2] werden den logisch-formalen Pauli-Matrizen, die als algebraische Entitäten zuerst rein formal gedacht werden, Basis-Schritte in die drei Raumrichtungen (als Gegenstände der Wirklichkeit) zugeordnet und so mit Hilfe der Physik eine Verknüpfung zur Geometrie geschaffen. Die so ergänzte Geometrie der nun naturwissenschaftlich-physikalisch fundierten Basisvektoren dient dann als Ausgangspunkt wirtschaftswissenschaftlicher Modellierungen.

Mit Hilfe der Physik kann hier also die Algebra mit der Geometrie kognitiv verknüpft werden.

Darüber hinaus kann diese Verknüpfung auch didaktisch gewertet und didaktisch genutzt werden, denn die oben von Einstein [2] geforderte Zuordnung von Erlebnissen als erlebbare Gegenstände der Wirklichkeit ist ein zutiefst phänomen-bezogener, didaktischer Prozess.

In den folgenden Abschnitten wird dieser Prozess am Beispiel der Konstruktion verallgemeinerter Matrizeninverse und Moore-Penrose-Matrizeninverse aufgezeigt und hinterfragt.

2. Geometrische Algebra

Die von Pauli [3], [4, S. 51], [5, S. 289/290] rein algebraisch formulierten Beziehungen der Pauli-Algebra

$$\begin{aligned} \sigma_x \sigma_y &= -\sigma_y \sigma_x & \sigma_y \sigma_z &= -\sigma_z \sigma_y & \sigma_z \sigma_x &= -\sigma_x \sigma_z \\ \sigma_x^2 &= \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = 1 \end{aligned} \quad \{1\}$$

werden durch die folgenden Zuordnungen von tatsächlich gangbaren Fußschritten in Einheitslänge als erlebbare Gegenstände der Wirklichkeit

$$\begin{aligned} \sigma_x &\rightarrow \text{Schritt in x-Richtung} \\ &\rightarrow \text{Basisvektor in x-Richtung} \\ \sigma_y &\rightarrow \text{Schritt in y-Richtung} \\ &\rightarrow \text{Basisvektor in y-Richtung} \\ \sigma_z &\rightarrow \text{Schritt in z-Richtung} \\ &\rightarrow \text{Basisvektor in z-Richtung} \end{aligned} \quad \{2\}$$

in die von Einstein geforderte erweiterte Geometrie überführt. Pauli-Matrizen repräsentieren Basisvektoren („a right-handed set of base vectors σ_i “ [6, S. 801]), eine Zuordnung, die übrigens bereits Grassmann (selbstredend ohne Bezug auf quantenmechanische Phänomene) in [7] formulierte.

Unter Nutzung dieser Konzeptualisierung wurde ebenfalls bereits von Grassmann die Lösung Linearer Gleichungssysteme beliebig vieler Gleichungen in [8, § 45, S. 70-72] begründet und diskutiert.

Dabei wird im zweidimensionalen Fall bei einem eindeutig lösbar System aus zwei algebraischen Linearen Gleichungen mit zwei Unbekannten x, y

$$\begin{aligned} a_x x + b_x y &= r_x \\ a_y x + b_y y &= r_y \end{aligned} \quad \{3\}$$

dieses System mit Hilfe der Beziehungen {2} räumlich-geometrisch in eine zweidimensionale Ebene eingebettet.

$$\begin{aligned} a_x x + b_x y &= r_x \\ a_y x + b_y y &= r_y \end{aligned} \quad \{4\}$$

so dass mit Hilfe der beiden Koeffizientenvektoren

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= a_x \sigma_x + a_y \sigma_y \\ \mathbf{b} &= b_x \sigma_x + b_y \sigma_y \end{aligned} \quad \{5\}$$

und des konstanten Ergebnisvektors

$$\mathbf{r} = r_x \sigma_x + r_y \sigma_y \quad \{6\}$$

Gl. {4} als geometrisch-algebraische Gleichung

$$\mathbf{a} x + \mathbf{b} y = \mathbf{r} \quad \{7\}$$

formuliert werden kann. Diese Gleichung kann graphisch als einfache Addition der beiden Vektoren $\mathbf{a} x$ und $\mathbf{b} y$ zu einem resultierenden Vektor \mathbf{r} dargestellt werden (siehe Abb. 1).

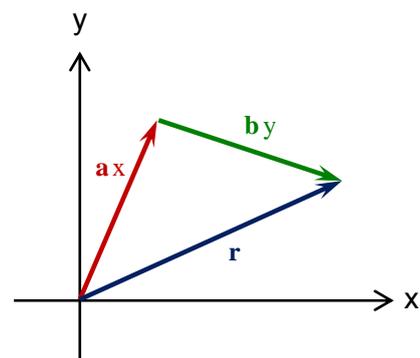


Abb.1: Graphische Darstellung des Linearen Gleichungssystems $\mathbf{a} x + \mathbf{b} y = \mathbf{r}$ {7} mit zwei Unbekannten.

Dabei ist zu beachten, dass die rot und grün eingefärbten Skalare x und y (in Abb. 1 auch durch die Schriftart *Times New Roman* gekennzeichnet) die beiden Variablen des Linearen Gleichungssystems bezeichnen, während die schwarz eingefärbten Buchstabensymbole x und y (in Abb. 1 durch die Schriftart *Arial* gekennzeichnet) die Richtungsbezeichnungen der Ebene darstellen.

Diese wichtige Differenzierung sollte mit Lernenden ausführlicher besprochen werden, damit es hier nicht zu Verwechslungen kommt.

Graphisch kann die Lösung des Linearen Gleichungssystems {7} durch Ermittlung des Schnittpunktes einer Geraden in Richtung des ersten Koeffizientenvektors \mathbf{a} , die durch den Fußpunkt des Ergebnisvektors \mathbf{r} verläuft, und einer zweiten Geraden in Richtung des zweiten Koeffizientenvektors \mathbf{b} , die durch den Endpunkt des Ergebnisvektors \mathbf{r} verläuft, recht einfach aufgefunden werden.

Rechnerisch algebraisch zeigte bereits Grassmann – wie bereits erwähnt – sehr ausführlich in [8, § 45], dass das Lineare Gleichungssystem {7} durch äußere Multiplikation mit den beiden Koeffizientenvektoren gelöst werden kann.

Die dabei zu bildenden äußeren Produkte

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} &= a_x b_y - a_y b_x \\ \mathbf{r} \wedge \mathbf{b} &= r_x b_y - r_y b_x \end{aligned} \quad \{8\}$$

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{r} = a_x r_y - a_y r_x$$

mit der Eigenschaft

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{a} = \mathbf{b} \wedge \mathbf{b} = 0 \quad \{9\}$$

zeigen eindrücklich, wie ein zuvor rein algebraisch zugängliches Konstrukt nun geometrisch gedeutet und verstanden werden kann. Die Gleichungen {8} beschreiben aus geometrischer Perspektive nichts anderes als eine simple Ermittlung des orientierten Flächeninhalts der von den Koeffizientenvektoren bzw. dem Ergebnisvektor aufgespannten Parallelogramme.

Liegen die beiden Vektoren parallel zueinander (siehe Gl. {9}), ist keine Bildung eines Parallelogramms möglich, so dass der Flächeninhalt dieser nicht existierenden Parallelogramme naturgemäß zu Null wird.

Die rechtsseitig mit dem Koeffizientenvektor \mathbf{b} bzw. linksseitig mit dem Koeffizientenvektor \mathbf{a} vorgenommene äußere Multiplikation von {7}

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}x + \mathbf{b}y) \wedge \mathbf{b} &= (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})x + 0y = \mathbf{r} \wedge \mathbf{b} \\ \mathbf{a} \wedge (\mathbf{a}x + \mathbf{b}y) &= 0x + (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})y = \mathbf{a} \wedge \mathbf{r} \end{aligned} \quad \{10\}$$

führt somit direkt auf die beiden Lösungsformeln

$$\begin{aligned} x &= (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1} (\mathbf{r} \wedge \mathbf{b}) \\ y &= (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1} (\mathbf{a} \wedge \mathbf{r}) \end{aligned} \quad \{11\}$$

Diese Lösungsformeln bilden das geometrisch-algebraische Analogon zur Cramerschen Regel und verknüpfen algebraisch jeweils zwei äußere Produkte durch Division sowie geometrisch zwei orientierte Flächenelemente durch einen Flächeninhaltsvergleich.

Da alle Flächenelemente parallel zueinander liegen und somit eine identische Richtungsbeschreibung durch sich entsprechende Bivektoren aufweisen (die sich bei der Division immer vollständig gegenseitig aufheben werden), können die beiden Lösungsformeln {11} auch alternativ als

$$\begin{aligned} x &= (\mathbf{r} \wedge \mathbf{b}) (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1} \\ y &= (\mathbf{a} \wedge \mathbf{r}) (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1} \end{aligned} \quad \{12\}$$

geschrieben werden.

Bei der Ermittlung von Lösungswerten Linearer Gleichungssysteme, deren Anzahl an Unbekannten der Anzahl gegebener Gleichungen entspricht, spielt es somit keine Rolle, ob eine linksseitige Prä-Division nach {11} oder aber eine rechtsseitige Post-Division nach {12} vorgenommen wird. Das skalare Ergebnis x bzw. y ist immer gleich.

Darüber hinaus ist sofort einsichtig, dass diese geometrisch gedeuteten Beziehungen sich nicht ändern werden, wenn die in Abb. 1 in eine Fläche eingebetteten Vektoren nun stattdessen in einem höherdimensionalen Raum eingebettet werden, da die orientierten Flächeninhalte dabei konstant bleiben. Diese Eigenschaft wird später bei Konstruktion von verallgemeinerten Matrizeninversen ein wesentliches Motivationselement darstellen.

3. Inverse quadratischer Matrizen

Die Lösungsformeln {11} bzw. {12} des zweidimensionalen Falls sowie allgemein die von Grassmann in [8, S. 72] gegebenen mit beliebig vielen Unbekannten können aufgrund der linearen Struktur des Ergebnisvektors {6} immer auch linear zerlegt werden.

Die Zerlegung von {11} führt auf

$$\begin{aligned} x &= (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1} ((r_x \sigma_x + r_y \sigma_y) \wedge \mathbf{b}) \\ &= (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1} (\sigma_x \wedge \mathbf{b}) r_x + (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1} (\sigma_y \wedge \mathbf{b}) r_y \\ y &= (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1} (\mathbf{a} \wedge (r_x \sigma_x + r_y \sigma_y)) \quad \{13\} \\ &= (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1} (\mathbf{a} \wedge \sigma_x) r_x + (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1} (\mathbf{a} \wedge \sigma_y) r_y \end{aligned}$$

während die Zerlegung von {12} auf

$$\begin{aligned} x &= ((r_x \sigma_x + r_y \sigma_y) \wedge \mathbf{b}) (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1} \\ &= (\sigma_x \wedge \mathbf{b}) (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1} r_x + (\sigma_y \wedge \mathbf{b}) (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1} r_y \\ y &= (\mathbf{a} \wedge (r_x \sigma_x + r_y \sigma_y)) (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1} \quad \{14\} \\ &= (\mathbf{a} \wedge \sigma_x) (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1} r_x + (\mathbf{a} \wedge \sigma_y) (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1} r_y \end{aligned}$$

führt. Diese Zerlegungen können mit Hilfe des Falkschen Schemas [24, S. 9-11] didaktisch einsichtig als Matrizenmultiplikationen formuliert werden.

Die linksseitigen Werte werden dabei wie erwartet die Inverse der aus den beiden Koeffizientenvektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} gebildeten Koeffizientenmatrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{bmatrix} \quad \{15\}$$

ergeben, wobei die durch Prä- und Post-Division ermittelten Matrizenelemente wieder identisch sein werden:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1} = \begin{pmatrix} \underline{x}_1 & \underline{x}_2 \\ \underline{y}_1 & \underline{y}_2 \end{pmatrix} \quad \{16\}$$

mit

$$\begin{aligned} x_1 &= (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1} (\sigma_x \wedge \mathbf{b}) = \underline{x}_1 = (\sigma_x \wedge \mathbf{b}) (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1} \\ y_1 &= (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1} (\mathbf{a} \wedge \sigma_x) = \underline{y}_1 = (\mathbf{a} \wedge \sigma_x) (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1} \\ x_2 &= (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1} (\sigma_y \wedge \mathbf{b}) = \underline{x}_2 = (\sigma_y \wedge \mathbf{b}) (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1} \\ y_2 &= (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1} (\mathbf{a} \wedge \sigma_y) = \underline{y}_2 = (\mathbf{a} \wedge \sigma_y) (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1} \end{aligned} \quad \{17\}$$

Hierbei wurden somit die beiden Linearen Gleichungssysteme

$$\mathbf{a}x + \mathbf{b}y = \mathbf{r}_1 \quad \text{und} \quad \mathbf{a}x + \mathbf{b}y = \mathbf{r}_2 \quad \{18\}$$

mit den jeweiligen Einheitsvektoren σ_x und σ_y als den zwei unterschiedlichen Ergebnisvektoren

$$\mathbf{r}_1 = \sigma_x \quad \text{und} \quad \mathbf{r}_2 = \sigma_y \quad \{19\}$$

gelöst.

Da bei den beiden Linearen Gleichungssystemen {18} die Anzahl an Unbekannten der Anzahl gegebener Gleichungen entspricht, ergeben sich für die beiden Inversen rein skalare Elemente.

Deshalb stimmt die durch Prä-Division ermittelte erste Inverse \mathbf{A}^{-1} mit der durch Post-Division ermittelten zweiten Inverse $\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1}$ vollständig überein.

4. Wirtschaftsmathematischer Ausgangspunkt

Immer mehr einführende Wirtschaftsmathematik-Lehrbücher erörtern verallgemeinerte Matrizeninverse und Moore-Penrose-Inverse als einen elementaren Bestandteil wirtschaftsmathematischer Grundbildung (siehe z.B. [9, Kap. 7]).

Auch hochschulische Kursveranstaltungen zu den Grundlagen der Wirtschaftsmathematik (wie z. B. an der FH Schmalkalden, der TU Dortmund und der Leibniz-Universität Hannover [10]) greifen den Themenbereich der verallgemeinerten Matrizeninversen immer öfter auf.

Dabei wird darauf verwiesen, dass „der vermittelte Stoff aktuell und modern sein (soll). Deshalb bedienen wir uns der in letzter Zeit immer populärer gewordenen Hilfsmittel wie verallgemeinerte Inversen und Moore-Penrose-Inverse von Matrizen und ihrer Anwendung zur Lösung linearer Gleichungssysteme“ [10, S. V].

Allerdings werden Moore-Penrose-Matrizeninverse derzeit in einführenden Wirtschaftsmathematik-Lehrbüchern hauptsächlich algebraisch unter Bezug auf die vier Moore-Penrose-Bedingungen

$$\mathbf{A} \mathbf{A}^+ \mathbf{A} = \mathbf{A} \quad \{20a\}$$

$$\mathbf{A}^+ \mathbf{A} \mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^+ \quad \{20b\}$$

$$(\mathbf{A}^+ \mathbf{A})^T = \mathbf{A}^+ \mathbf{A} \quad \{20c\}$$

$$(\mathbf{A} \mathbf{A}^+)^T = \mathbf{A} \mathbf{A}^+ \quad \{20d\}$$

motiviert und diskutiert [11, Gl. (2.2), S. 12 & Th. 4, S. 18], [12, S. 40], [13, Kap. 6, S. 363], [9, Gl. 7.13, S. 147], [10, Abs. 6.1, S. 125] wobei das hochgestellte T die konjugierte Transposition bezeichnet.

Die Beschränkung auf rein algebraische Zugänge stellt eine erhebliche didaktische Einschränkung und ein gravierendes Defizit der bisherigen Herangehensweise dar.

Eine geometrisch-physikalisch motivierte und fundierte Erörterung bietet zusätzliche didaktische Wege und eröffnet neue konzeptuelle Freiräume, die sowohl didaktisch wie auch fachlich alternative, den Blickwinkel öffnende Perspektiven zulassen.

Durch Rückgriff auf physikalische und physikdidaktische Argumentationsmuster der Pauli-Algebra im dreidimensionalen Fall bzw. der Geometrischen Algebra im allgemeinen Fall können Moore-Penrose-Matrizeninverse sehr einsichtig und leicht nachvollziehbar geometrisch fundiert und so über die Algebra weit hinausgehend erörtert werden.

5. Überdeterminierte Gleichungssysteme

Die das Lineare Gleichungssystem {7} determinierenden Vektoren $\mathbf{a}x$, $\mathbf{b}y$ und \mathbf{r} werden nun in relative zueinander gleicher Anordnung schräg in ein räumlich dreidimensionales Koordinatensystem eingebettet (siehe Abb. 2).

Da die Vektoren zueinander die gleichen, unveränderten Lagebeziehungen aufweisen, werden auch die

von Ihnen aufgespannten Parallelelogramme bzw. deren orientierte Volumina unverändert bleiben.

Die mit Hilfe der Grassmannschen Gleichungen {11} und {12} formulierten Beziehungen

$$x = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1} (\mathbf{r} \wedge \mathbf{b}) = (\mathbf{r} \wedge \mathbf{b}) (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}$$

$$y = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1} (\mathbf{a} \wedge \mathbf{r}) = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{r}) (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1} \quad \{21\}$$

führen somit wieder direkt zu den beiden Lösungswerten x und y .

Da alle Flächenelemente unverändert parallel zueinander liegen und somit eine identische Richtungsbeschreibung durch sich entsprechende Linearkombinationen an Bivektoren aufweisen werden, heben sich diese bei Division wie zuvor gegenseitig vollständig weg.

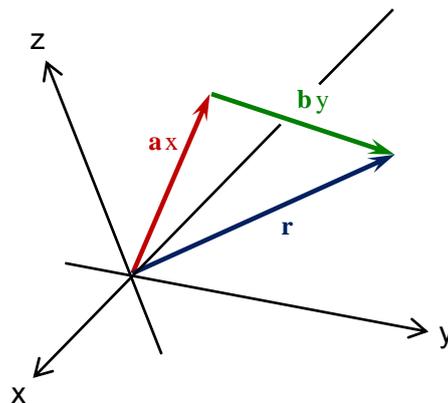


Abb.2: Graphische Darstellung des Linearen Gleichungssystems $\mathbf{a}x + \mathbf{b}y = \mathbf{r}$ {7} mit zwei Unbekannten.

Obleich die geometrische Situation und die charakteristischen geometrischen Größen unverändert bleiben, so ändert sich doch die algebraische Schreibung dieser Größen.

Eine Änderung des Koordinatensystems wird die algebraische Beschreibung der Vektoren beeinflussen, die nun – da in einen dreidimensionalen Raum eingebettet – auch drei (anstelle von nur zwei) Komponenten aufweisen werden. Die beiden Koeffizientenvektoren

$$\mathbf{a} = a_x \sigma_x + a_y \sigma_y + a_z \sigma_z$$

$$\mathbf{b} = b_x \sigma_x + b_y \sigma_y + b_z \sigma_z \quad \{22\}$$

und der konstante Ergebnisvektor

$$\mathbf{r} = r_x \sigma_x + r_y \sigma_y + r_z \sigma_z \quad \{23\}$$

bilden erneut das eindeutig lösbare Lineare Gleichungssystem

$$\mathbf{a}x + \mathbf{b}y = \mathbf{r} \quad \{24\}$$

Dieses Gleichungssystem weist jedoch nun drei (anstelle von zuvor zwei) Linearen Gleichungen auf:

$$a_x x \sigma_x + b_x y \sigma_x = r_x \sigma_x \rightarrow a_x x + b_x y = r_x$$

$$a_y x \sigma_y + b_y y \sigma_y = r_y \sigma_y \rightarrow a_y x + b_y y = r_y \quad \{25\}$$

$$a_z x \sigma_z + b_z y \sigma_z = r_z \sigma_z \rightarrow a_z x + b_z y = r_z$$

Da dieses Lineare Gleichungssystem weiterhin eine einzige und somit eindeutige Lösung besitzt, ist es

zwar überdeterminiert, aber dennoch konsistent. Allerdings ist die Koeffizientenmatrix nun nicht mehr quadratisch, sondern rechteckig.

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}; \mathbf{b}] = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{b}_x \\ \mathbf{a}_y & \mathbf{b}_y \\ \mathbf{a}_z & \mathbf{b}_z \end{pmatrix} \quad \{26\}$$

6. Inverse nicht-quadratischer Matrizen

Da der Ergebnisvektor {23} weiterhin eine lineare Struktur besitzt, kann erneut eine lineare Zerlegung der Lösungsformeln {21} vorgenommen werden, die sich mit Hilfe des Falkschen Schemas [24, S. 23-28] didaktisch einsichtig darstellen lassen

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1} ((r_x \sigma_x + r_y \sigma_y + r_z \sigma_z) \wedge \mathbf{b}) \\ &= (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1} (\sigma_x \wedge \mathbf{b}) r_x \\ &\quad + (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1} (\sigma_y \wedge \mathbf{b}) r_y \\ &\quad + (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1} (\sigma_z \wedge \mathbf{b}) r_z \\ \Rightarrow x_1 &= (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1} (\sigma_x \wedge \mathbf{b}) \quad \{27\} \\ x_2 &= (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1} (\sigma_y \wedge \mathbf{b}) \\ x_3 &= (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1} (\sigma_z \wedge \mathbf{b}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1} (\mathbf{a} \wedge (r_x \sigma_x + r_y \sigma_y + r_z \sigma_z)) \\ &= (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1} (\mathbf{a} \wedge \sigma_x) r_x \\ &\quad + (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1} (\mathbf{a} \wedge \sigma_y) r_y \\ &\quad + (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1} (\mathbf{a} \wedge \sigma_z) r_z \\ \Rightarrow y_1 &= (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1} (\mathbf{a} \wedge \sigma_x) \quad \{28\} \\ y_2 &= (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1} (\mathbf{a} \wedge \sigma_y) \\ y_3 &= (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1} (\mathbf{a} \wedge \sigma_z) \end{aligned}$$

und die nun auf jeweils drei Terme führt. Allerdings sind diese Terme jetzt nicht mehr rein skalarwertig, sondern weisen zusätzliche bivektorielle Anteile auf.

Während sich die skalarwertigen Anteile bei Prä- und Post-Division nicht unterscheiden, erfahren die bivektoriellen Anteile eine Orientierungsumkehr, was einen Vorzeichenwechsel bewirkt.

Die Zerlegung der durch eine Post-Division generierten Lösungsformeln lautet somit

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= ((r_x \sigma_x + r_y \sigma_y + r_z \sigma_z) \wedge \mathbf{b}) (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1} \\ &= (\sigma_x \wedge \mathbf{b}) (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1} r_x \\ &\quad + (\sigma_y \wedge \mathbf{b}) (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1} r_y \\ &\quad + (\sigma_z \wedge \mathbf{b}) (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1} r_z \\ \Rightarrow \underline{x}_1 &= (\sigma_x \wedge \mathbf{b}) (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1} \quad \{29\} \\ \underline{x}_2 &= (\sigma_y \wedge \mathbf{b}) (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1} \\ \underline{x}_3 &= (\sigma_z \wedge \mathbf{b}) (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= (\mathbf{a} \wedge (r_x \sigma_x + r_y \sigma_y + r_z \sigma_z)) (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1} \\ &= (\mathbf{a} \wedge \sigma_x) (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1} r_x \\ &\quad + (\mathbf{a} \wedge \sigma_y) (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1} r_y \\ &\quad + (\mathbf{a} \wedge \sigma_z) (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1} r_z \\ \Rightarrow \underline{y}_1 &= (\mathbf{a} \wedge \sigma_x) (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1} \quad \{30\} \\ \underline{y}_2 &= (\mathbf{a} \wedge \sigma_y) (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1} \\ \underline{y}_3 &= (\mathbf{a} \wedge \sigma_z) (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1} \end{aligned}$$

so dass zwei unterschiedliche Matrizeninverse \mathbf{A}^{-1} der Prä-Division und $\underline{\mathbf{A}}^{-1}$ der Post-Division

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} \neq \underline{\mathbf{A}}^{-1} = \begin{pmatrix} \underline{x}_1 & \underline{x}_2 & \underline{x}_3 \\ \underline{y}_1 & \underline{y}_2 & \underline{y}_3 \end{pmatrix} \quad \{31\}$$

gebildet werden können.

Da zur Konstruktion dieser verallgemeinerten Matrizeninversen die Pauli-Algebra herangezogen wird, können diese nicht-quadratischen Inversen als Verallgemeinerte Pauli-Algebra-Matrizeninverse [14] – [18] bezeichnet werden.

Auch zeigen Gl. {27} bis {30}, dass diese Verallgemeinerten Pauli-Algebra-Matrizeninverse linksseitige Inverse darstellen,

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{A} &= \mathbf{E}_{2 \times 2} & \mathbf{A} \mathbf{A}^{-1} &\neq \mathbf{E}_{3 \times 3} \\ \underline{\mathbf{A}}^{-1} \mathbf{A} &= \mathbf{E}_{2 \times 2} & \mathbf{A} \underline{\mathbf{A}}^{-1} &\neq \mathbf{E}_{3 \times 3} \end{aligned} \quad \{32\}$$

wobei die Einheitsmatrizen mit

$$\mathbf{E}_{2 \times 2} = [\sigma_x; \sigma_y] \quad \mathbf{E}_{3 \times 3} = [\sigma_x; \sigma_y; \sigma_z] \quad \{33\}$$

unterschiedliche Dimensionen besitzen.

Sollte zur Lösung eines Linearen Gleichungssystems eine Verallgemeinerte Pauli-Algebra-Matrizeninverse von rechts an die ursprüngliche Matrix \mathbf{A} anmultipliziert werden, ergibt sich in der Regel keine sinnvolle Lösung, da die Ungleichungen {32, rechts} gelten, wie eine einfache Überprüfung und Diskussion in den Folien des für die Studierenden angefertigten Skripts [24, S. 30] zeigt.

In vollkommen analoger Art und Weise, die dem hier auf Grundlage einer nicht-quadratischen (3×2) -Matrix gezeigten Verfahren entspricht, können für höherdimensionale $(j \times k)$ -Matrizen mit beliebigem $j \geq k$ die entsprechenden Verallgemeinerten Pauli-Algebra-Matrizeninverse berechnet werden.

7. Moore-Penrose Matrizeninverse

Aufgrund von Gl. {32, links} erfüllen Verallgemeinerte Pauli-Algebra-Matrizeninverse die ersten drei Moore-Penrose-Bedingungen {20a, b, c}. Die vierte Bedingung {20d} wird dann erfüllt, wenn der bivektorielle Anteil von \mathbf{A}^{-1} bzw. $\underline{\mathbf{A}}^{-1}$ in {31} wegfällt. Eine solche Matrizeninverse kann durch Aufaddition der prä- und post-divisionalen Matrizeninversen

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^+ &= \frac{1}{2} (\mathbf{A}^{-1} + \underline{\mathbf{A}}^{-1}) \quad \{34\} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_1 + \underline{x}_1 & x_2 + \underline{x}_2 & x_3 + \underline{x}_3 \\ y_1 + \underline{y}_1 & y_2 + \underline{y}_2 & y_3 + \underline{y}_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

erzeugt werden. Die so gebildete verallgemeinerte Matrizeninverse \mathbf{A}^+ entspricht der Moore-Penrose-Matrizeninversen.

Durch Differenzbildung entsteht darüber hinaus eine Matrix \mathbf{A}^- , die rein bivektorielle Elemente besitzt.

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^- &= \frac{1}{2} (\mathbf{A}^{-1} - \underline{\mathbf{A}}^{-1}) \quad \{35\} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_1 - \underline{x}_1 & x_2 - \underline{x}_2 & x_3 - \underline{x}_3 \\ y_1 - \underline{y}_1 & y_2 - \underline{y}_2 & y_3 - \underline{y}_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Moore-Penrose-Matrizeninverse sind somit lediglich der skalarwertige Teil einer natürlicheren, geometrisch fundierten Verallgemeinerten Pauli-Algebra-Matrizeninversen – eine Sichtweise, die übrigens auch in logisch umgekehrter Argumentationsrichtung gedeutet und diskutiert werden könnte.

Durch direkten Vergleich mit

$$\mathbf{A}^+ = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \quad \{36\}$$

[9, Gl. 7.14, S. 147] lässt sich leicht zeigen, dass die in {34} konstruierte Matrix tatsächlich der Moore-Penrose-Matrizeninversen entspricht. Mit

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{pmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \\ a_z & b_z \end{pmatrix} \quad \{37\}$$

ergeben sich

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a^2 & \mathbf{a} \bullet \mathbf{b} \\ \mathbf{a} \bullet \mathbf{b} & b^2 \end{pmatrix} \quad \{38\}$$

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}^T \mathbf{A}) &= a^2 b^2 - (\mathbf{a} \bullet \mathbf{b})^2 \\ &= a^2 b^2 - a^2 b^2 \cos^2 \alpha \\ &= a^2 b^2 \sin^2 \alpha = -(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^2 \end{aligned} \quad \{39\}$$

$$(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} = -\frac{1}{(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^2} \begin{pmatrix} b^2 & -\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} \\ -\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} & a^2 \end{pmatrix} \quad \{40\}$$

$$\mathbf{A}^+ = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \quad \{41\}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{b_x \mathbf{a} \bullet \mathbf{b} - a_x b^2}{(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^2} & \frac{b_y \mathbf{a} \bullet \mathbf{b} - a_y b^2}{(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^2} & \frac{b_z \mathbf{a} \bullet \mathbf{b} - a_z b^2}{(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^2} \\ \frac{a_x \mathbf{a} \bullet \mathbf{b} - b_x a^2}{(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^2} & \frac{a_y \mathbf{a} \bullet \mathbf{b} - b_y a^2}{(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^2} & \frac{a_z \mathbf{a} \bullet \mathbf{b} - b_z a^2}{(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^2} \end{pmatrix}$$

Dies entspricht dem Skalaranteil von {42}

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})(\sigma_x \wedge \mathbf{b})}{(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^2} & \frac{(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})(\sigma_y \wedge \mathbf{b})}{(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^2} & \frac{(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})(\sigma_z \wedge \mathbf{b})}{(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^2} \\ \frac{(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})(\mathbf{a} \wedge \sigma_x)}{(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^2} & \frac{(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})(\mathbf{a} \wedge \sigma_y)}{(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^2} & \frac{(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})(\mathbf{a} \wedge \sigma_z)}{(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^2} \end{pmatrix}$$

da sich die Skalaranteile der Nenner aller Elemente entsprechen. Beispielsweise sind für den jeweils ersten Term

$$\begin{aligned} b_x \mathbf{a} \bullet \mathbf{b} - a_x b^2 & \quad \{43\} \\ &= a_y b_x b_y + a_z b_x b_z - a_x b_y^2 - a_x b_z^2 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})(\sigma_x \wedge \mathbf{b}) & \quad \{44\} \\ &= ((a_x b_y - a_y b_x) \sigma_x \sigma_y + (a_y b_z - a_z b_y) \sigma_y \sigma_z \\ &\quad + (a_z b_x - a_x b_z) \sigma_z \sigma_x) (b_y \sigma_x \sigma_y - b_z \sigma_z \sigma_x) \\ &= a_y b_x b_y + a_z b_x b_z - a_x b_y^2 - a_x b_z^2 \\ &\quad + (a_y b_z - a_z b_y) \mathbf{b} \sigma_x \sigma_y \sigma_z \end{aligned}$$

die Skalaranteile wie erwartet identisch.

In ähnlicher Art und Weise sollte sich auch für Matrizeninverse mit einer höheren Anzahl an Zeilen und Spalten die Gleichheit der Skalaranteile von Verallgemeinerter Pauli-Algebra-Matrizeninversen und Moore-Penrose-Matrizeninversen zeigen lassen.

8. Kursdurchführung

Im Rahmen der sukzessiven Erprobung einer modernen Darstellung der Linearen Algebra auf Grundlage der Geometrischen Algebra in englischsprachigen Wirtschaftsmathematik-Kursen „Mathematics for Business and Economics“ (LV-Nr. 200 691.01) [20] wurden in den vergangenen Jahren an der HWR Berlin unterschiedliche Aspekte der Geometrischen Algebra didaktisch aufbearbeitet und die dazu entwickelten Materialien [19] eingesetzt.

Im Wintersemester 2017/2018 wurden für diesen wirtschaftsmathematischen Crash-Kurs zur Geometrischen Algebra Arbeitsblätter zu verallgemeinerten Matrizeninversen [24] entwickelt.

Auf Grundlage der bereits den Studierenden bekannten Ermittlung von Inversen quadratischer Matrizen wurde die Berechnung linksseitiger Inversen nicht-quadratischer Matrizen mit Hilfe der Geometrischen Algebra thematisiert und an Beispielen (siehe auch folgender Abschnitt 9) erörtert.

Da die Studierenden dieses Kurses zuvor bereits ausführlich Erfahrungen mit der Geometrischen Algebra im Rahmen einer Einführung und Nutzung des Programm-Tools GAALOP [21], [22] machen konnten, waren sehr breite Grundkenntnisse zur Geometrischen Algebra vorhanden.

Somit konnte auf soliden Kenntnissen zur Geometrischen Algebra aufgebaut werden, so dass der zur Verfügung stehende zeitliche Rahmen von 90 Minuten (was lediglich zwei Lehrveranstaltungsstunden entspricht) zur Erarbeitung Verallgemeinerter Pauli-Algebra-Matrizeninversen [24, S. 21-46] und die sich anschließende Reduktion auf Moore-Penrose-Matrizeninverse [24, S. 47-56] zur Behandlung dieses Themengebietes ausreichend war.

Längere Erläuterungsphasen waren allerdings an den Stellen notwendig, in denen die Berechnung nicht-quadratischer Matrizeninverser deutlich von der Berechnung quadratischer Inversen abweicht. Dies war insbesondere bei den Folien [24, S. 36 und folgende] der Fall.

Während bei Berechnung von quadratischen Inversen die bivectorielle Richtungsinformationen in Zähler und Nenner der Gleichungen {16} und {17} immer identisch sind und somit intuitiv gekürzt werden können, sind bei den Gleichungen {27} bis {31} etwas längere Umrechnungen notwendig.

Nach ausführlicher Besprechung eines Beispiels [24, S. 38, Berechnung von x_1] wurden den Studierenden die in gleicher Art und Weise durchzuführenden Berechnungen weiterer Matrizenelemente [24, S. 39-43, Berechnung von x_2, x_3, y_1, y_2, y_3] zur häuslichen Nachbearbeitung aufgetragen.

Aus Zeitgründen wurde auch nicht auf den Unterschied zwischen Prä- und Post-Division eingegangen. Stattdessen wurde die Division durch äußere Produkte (und damit hier durch Bivektoren) immer als Prä-Division dargestellt.

Aus den Diskussionsbeiträgen und Rückfragen der Studierenden während der Kursdurchführung kann geschlossen werden, dass die Inhalte von ihnen größtenteils gut nachvollzogen werden können und verstanden werden. Der zentrale Ansatz einer Aufspaltung der Matrizenmultiplikation zur Ermittlung von Matrizeninversen ist den Studierenden nach ausführlicher Besprechung des Falksches Schemas klar und einsichtig.

Es kann somit geschlossen werden, dass der hier in diesem Beitrag vorgestellte Ansatz tragfähig und gut durchführbar ist und in weiteren Kursen auf diese Art und Weise behandelt werden kann.

9. Kurze Erläuterung der Beispielaufgabe

Ausgehend von einer Beispielaufgabe zur Materialverflechtung (siehe Abb. 3), die auf das Lineare Gleichungssystem

$$\mathbf{p} = \mathbf{D}_{\text{qua}}^{-1} \mathbf{r} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 120 \\ 220 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \end{pmatrix} \quad \{49\}$$

Es werden somit 20 Mengeneinheiten des ersten Endproduktes P_1 und 30 Mengeneinheiten des zweiten Endproduktes P_2 hergestellt.

Dieses einfache Beispiel wird nun durch Einbezug eines dritten Rohstoffes R_3 erweitert (siehe Abb. 4), so dass das zugrunde liegende Lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 120 \\ 5x + 4y &= 220 \\ 4x + 8y &= 320 \end{aligned} \quad \{50\}$$

mit drei Gleichungen bei nur zwei Unbekannten überdeterminiert ist. Da jedoch eine einzige eindeu-

Erstes Beispiel: Aufgabenstellung

In einer Fabrik werden zwei verschiedene Endprodukte P_1 und P_2 hergestellt. Zur Herstellung dieser beiden Endprodukte werden die folgenden Mengen zweier verschiedener Rohstoffe R_1 und R_2 benötigt:

- 3 Mengeneinheiten (ME) von R_1 und 5 ME von R_2 zur Herstellung einer ME von P_1
- 2 ME von R_1 und 4 ME von R_2 zur Herstellung einer ME von P_2

Berechnen Sie die Mengen der Endprodukte P_1 und P_2 , die hergestellt werden, wenn genau 120 ME des ersten Rohstoffes R_1 und 220 ME des zweiten Rohstoffes R_2 während des Produktionsprozesses verbraucht werden.

Abb.3: Übersetzung der englischsprachigen Beispielaufgabe des Skripts [24, S. 16] ins Deutsche.

chungssystem

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 120 \\ 5x + 4y &= 220 \end{aligned} \quad \{45\}$$

führt und deshalb mit Hilfe der konventionellen, quadratischen Bedarfsmatrix

$$\mathbf{D}_{\text{qua}} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \quad \{46\}$$

gelöst werden kann, wird der Grassmannsche Ansatz zur Berechnung inverser Matrizen wiederholt. Die Berechnung der äußeren Produkte der Pauli-Vektoren

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= 3 \sigma_x + 5 \sigma_y \\ \mathbf{b} &= 2 \sigma_x + 4 \sigma_y \\ \mathbf{r}_1 &= \sigma_x \quad \mathbf{r}_2 = \sigma_y \end{aligned} \quad \{47\}$$

liefert die folgende (2×2) -Matrizeninverse

$$\mathbf{D}_{\text{qua}}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \quad \{48\}$$

Damit berechnet sich der Produktionsvektor, der die Herstellungsmengen der beiden Endprodukte angibt, zu:

Zweites Beispiel: Aufgabenstellung

In einer Fabrik werden zwei verschiedene Endprodukte P_1 und P_2 hergestellt. Zur Herstellung dieser beiden Endprodukte werden die folgenden Mengen dreier verschiedener Rohstoffe R_1 , R_2 und R_3 benötigt:

- 3 ME von R_1 , 5 ME von R_2 und 4 ME von R_3 zur Herstellung einer ME von P_1
- 2 ME von R_1 , 4 ME von R_2 und 8 ME von R_3 zur Herstellung einer ME von P_2

Berechnen Sie die Mengen der Endprodukte P_1 und P_2 , die hergestellt werden, wenn genau 120 ME des ersten Rohstoffes R_1 , 220 ME des zweiten Rohstoffes R_2 und 320 ME des dritten Rohstoffes R_3 während des Produktionsprozesses verbraucht werden.

Abb.4: Übersetzung der zweiten englischsprachigen Beispielaufgabe des Skripts [24, S. 33] ins Deutsche.

tige Lösung existiert, ist es weiterhin konsistent. Die Bedarfsmatrix

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \quad \{51\}$$

ist nunmehr rechteckig und die Pauli-Vektoren weisen mit

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= 3 \sigma_x + 5 \sigma_y + 4 \sigma_z \\ \mathbf{b} &= 2 \sigma_x + 4 \sigma_y + 8 \sigma_z \\ \mathbf{r}_1 &= \sigma_x \quad \mathbf{r}_2 = \sigma_y \quad \mathbf{r}_3 = \sigma_z \end{aligned} \quad \{52\}$$

jeweils drei unterschiedliche Komponenten auf. Mit Hilfe von

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1} = -\frac{1}{418} (\sigma_x \sigma_y + 12 \sigma_y \sigma_z - 8 \sigma_z \sigma_x) \quad \{53\}$$

und den beiden Dualen der Koeffizientenvektoren

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \mathbf{b} \sigma_x \sigma_y \sigma_z = 8 \sigma_x \sigma_y + 2 \sigma_y \sigma_z + 4 \sigma_z \sigma_x \\ \mathbf{N} &= \mathbf{a} \sigma_x \sigma_y \sigma_z = 4 \sigma_x \sigma_y + 3 \sigma_y \sigma_z + 5 \sigma_z \sigma_x \end{aligned} \quad \{54\}$$

kann nun die Verallgemeinerte Pauli-Algebra-Matrizeninverse $\{42\}$

$$\mathbf{D}^{-1} = \frac{1}{418} \begin{pmatrix} 68-12M & 94+8M & -64-M \\ -37+12N & -45-8N & 84+N \end{pmatrix} \quad \{55\}$$

berechnet werden.

Damit ergibt sich der Produktionsvektor der Herstellungsmengen der beiden Endprodukte erneut zu

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \mathbf{D}^{-1} \mathbf{r} \\ &= \frac{1}{418} \begin{pmatrix} 68-12M & 94+8M & -64-M \\ -37+12N & -45-8N & 84+N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 120 \\ 220 \\ 320 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \end{pmatrix} \quad \{56\} \end{aligned}$$

so dass wie gehabt 20 ME des ersten Endproduktes P_1 und 30 ME des zweiten Endproduktes P_2 hergestellt werden.

Da sich die bivectoriellen Anteile nach Gl. {35}

$$\mathbf{D}^- = \frac{1}{418} \begin{pmatrix} -12M & 8M & -M \\ 12N & -8N & N \end{pmatrix} \quad \{57\}$$

bei Multiplikation mit dem Ergebnisvektor des konsistenten Linearen Gleichungssystems {58}

$$\mathbf{D}^- \mathbf{r} = \frac{1}{418} \begin{pmatrix} -12M & 8M & -M \\ 12N & -8N & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 120 \\ 220 \\ 320 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gegenseitig kompensieren und so nichts zum Gesamtergebnis beitragen, entspricht das Ergebnis einer Multiplikation mit der Moore-Penrose-Matrizeninversen {34}, {36}

$$\mathbf{D}^+ = \frac{1}{418} \begin{pmatrix} 68 & 94 & -64 \\ -37 & -45 & 84 \end{pmatrix} \quad \{59\}$$

genau dem Ergebnis {56}: {60}

$$\mathbf{p} = \mathbf{D}^+ \mathbf{r} = \frac{1}{418} \begin{pmatrix} 68 & 94 & -64 \\ -37 & -45 & 84 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 120 \\ 220 \\ 320 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \end{pmatrix}$$

Wie zu erwarten, erfüllt \mathbf{D}^+ alle vier Moore-Penrose-Bedingungen {20} [24, S. 53-56]:

$$\mathbf{D} \mathbf{D}^+ \mathbf{D} = \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \quad \{61\}$$

$$\mathbf{D}^+ \mathbf{D} \mathbf{D}^+ = \mathbf{D}^+ = \frac{1}{418} \begin{pmatrix} 68 & 94 & -64 \\ -37 & -45 & 84 \end{pmatrix} \quad \{62\}$$

$$(\mathbf{D}^+ \mathbf{D})^T = \mathbf{D}^+ \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \{63\}$$

$$(\mathbf{D} \mathbf{D}^+)^T = \mathbf{D} \mathbf{D}^+ = \frac{1}{418} \begin{pmatrix} 130 & 192 & -24 \\ 192 & 290 & 16 \\ -24 & 16 & 416 \end{pmatrix} \quad \{64\}$$

Und wie zu erwarten, erfüllt \mathbf{D}^- drei der vier Moore-Penrose-Bedingungen {20a,b,d} nicht:

$$\mathbf{D} \mathbf{D}^- \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \mathbf{D} \quad \{65\}$$

$$\mathbf{D}^- \mathbf{D} \mathbf{D}^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \mathbf{D}^- \quad \{66\}$$

$$(\mathbf{D}^- \mathbf{D})^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{D}^- \mathbf{D} \quad \{67\}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{D} \mathbf{D}^- &= \frac{1}{418} \begin{pmatrix} -36M+24N & 24M-16N & -3M+2N \\ -60M+48N & 40M-32N & -5M+4N \\ -48M+96N & 32M-64N & -4M+8N \end{pmatrix} \\ &\neq (\mathbf{D} \mathbf{D}^-)^T \quad \{68\} \end{aligned}$$

Es ist jedoch noch eine offene Forschungsfrage, ob Verallgemeinerte Pauli-Algebra-Matrizeninverse \mathbf{D}^{-1} nicht vielleicht doch die vierte Moore-Penrose-Bedingung zu erfüllen in der Lage sind, falls eine Modifikation des Begriffs der konjugierten Transposition erfolgt. Letztendlich existieren in der Geometrischen Algebra sehr unterschiedliche komplexe Größen, die je nach Dimension unterschiedlich komplex zu konjugieren sind.

Didaktisch interessant ist aber auch ein weiterer Aspekt, der die Verallgemeinerte Pauli-Matrizeninverse \mathbf{D}^{-1} betrifft. Die Elemente dieser Inversen {55}

$$\begin{aligned} 68 - 12M &= 68 - 96 \sigma_x \sigma_y - 24 \sigma_y \sigma_z - 48 \sigma_z \sigma_x \\ &= 68 - 96i - 24j + 48k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 94 + 8M &= 94 + 64 \sigma_x \sigma_y + 16 \sigma_y \sigma_z + 32 \sigma_z \sigma_x \\ &= 94 + 64i + 16j - 32k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -64 - M &= -64 - 8 \sigma_x \sigma_y - 2 \sigma_y \sigma_z - 4 \sigma_z \sigma_x \\ &= -64 - 8i - 2j + 4k \quad \{69\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -37 + 12N &= -37 + 48 \sigma_x \sigma_y + 36 \sigma_y \sigma_z + 60 \sigma_z \sigma_x \\ &= -37 + 48i + 36j - 60k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -45 - 8N &= -45 - 32 \sigma_x \sigma_y - 24 \sigma_y \sigma_z - 40 \sigma_z \sigma_x \\ &= -45 - 32i - 24j + 40k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 84 + N &= 84 + 4 \sigma_x \sigma_y + 3 \sigma_y \sigma_z + 5 \sigma_z \sigma_x \\ &= 84 + 4i + 3j - 5k \end{aligned}$$

können als Quaternionen mit den quaternionischen Basiseinheiten

$$i = \sigma_x \sigma_y \quad j = \sigma_y \sigma_z \quad k = -\sigma_z \sigma_x \quad \{70\}$$

gedeutet werden, so dass über diesen Zugang auch eine Motivation zur Diskussion quaternionischer Strukturen geschaffen werden kann.

Und auf jeden Fall geben Verallgemeinerte Matrizeninverse schon per se Anlass genug, über Möglichkeiten, über Grenzen und vor allem auch über noch nicht erschlossene Erweiterungen der Matrizenrechnung nachzudenken.

Sie können und sie sollten aber auch ein Anlass dafür sein, über Möglichkeiten, über Grenzen und über noch nicht erschlossene Erweiterungen unserer eigenen Themenfelder – der Physikdidaktik und der Fachphysik – in Bezug auf andere, physikferne Fachgebiete nachzudenken.

10. Literatur

- [1] Hestenes, David (2003): Oersted Medal Lecture 2002 – Reforming the Mathematical Language of Physics. In: American Journal of Physics, Vol. 71, No. 2, S. 104-121.
- [2] Einstein, Albert (1921): Geometrie und Erfahrung. Erweiterte Fassung des Festvortrages gehalten an der Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin am 27. Jan. 1921. Verlag von Julius Springer, Berlin.
- [3] Pauli, Wolfgang (1927): Zur Quantenmechanik des magnetischen Elektrons. In: Zeitschrift für Physik, Vol.43, No. 9/10, S. 601-623.
- [4] Tomonaga, Sin-Itiro (1997): The Story of Spin. The University of Chicago Press, Chicago, London.
- [5] Pais, Abraham (2002): Inward Bound. Of Matter and Forces in the Physical World. Reprint of the paperback edition with corrections. Clarendon Press, Oxford & Oxford University Press, New York.
- [6] Hestenes, David (1967): Real Spinor Fields. In: Journal of Mathematical Physics, Vol. 8, No. 4, S. 798-808.
- [7] Grassmann, Hermann (1877): Der Ort der Hamilton'schen Quaternionen in der Ausdehnungslehre. In: Mathematische Annalen, Vol. 12, S. 375-386.
- [8] Grassmann, Hermann (1844): Die Wissenschaft der extensiven Grösse oder die Ausdehnungslehre, eine neue mathematische Disciplin. Erster Theil, die lineale Ausdehnungslehre enthaltend. Verlag von Otto Wigand, Leipzig.
- [9] Dadkhah, Kamran (2011): Foundations of Mathematical and Computational Economics. 2. Auflage, Springer Heidelberg, Dordrecht, London.
- [10] Schmidt, Karsten; Trenkler, Götz (2015): Einführung in die Moderne Matrix-Algebra. Mit Anwendungen in der Statistik. 3. Auflage, Springer Gabler, Berlin, Heidelberg.
- [11] Cline, Randall E. (1979): Elements of the Theory of Generalized Inverses for Matrices. UMAP Expository Monograph Series. Education Development Center, Newton, Massachusetts.
- [12] Ben-Israel, Adi; Greville, Thomas (2003): Generalized Inverses. Theory and Applications. CMS Books in Mathematics. 2. Auflage, Springer-Verlag, New York, Berlin.
- [13] Bernstein, Dennis S. (2009): Matrix Mathematics. Theory, Facts, and Formulas. Princeton University Press, Princeton, Oxford.
- [14] Horn, Martin Erik (2016): Inverse von Rechteck-Matrizen. In: Institut für Mathematik und Informatik der Pädagogischen Hochschule Heidelberg (Hrsg.): BzMU – Beiträge zum Mathematikunterricht 2016. Band 1, S. 457-460, WTM-Verlag, Münster.
- [15] Horn, Martin Erik (2016): More Examples of Non-Square Matrix Inverses. Übersetzte und ergänzte Fassung des Beitrags [14]. Elektronisch veröffentlicht als Anhang von [16], Url: www.phydid.de/index.php/phydid-b/article/view/723/868 (17.12.2016).
- [16] Horn, Martin Erik (2016): Die Geometrische Algebra im Schnelldurchgang. In: PhyDid B, Didaktik der Physik, Beiträge zur DPG-Frühjahrstagung in Hannover 2016, Url: www.phydid.de/index.php/phydid-b/article/view/723 (17.12.2016).
- [17] Horn, Martin Erik (2016): Moderne Lineare Algebra im wirtschaftsmathematischen Kontext. In: Walther Paravicini, Jörn Schnieder (Hrsg.): Hanse-Kolloquium zur Hochschuldidaktik der Mathematik 2015. Beiträge zum gleichnamigen Kolloquium an der Universität Lübeck, S. 103-129. WTM-Verlag, Münster.
- [18] Horn, Martin Erik (2018): Sind verallgemeinerte Moore-Penrose-Matrizeninverse vollständig? Eingereicht bei: BzMU – Beiträge zum Mathematikunterricht 2018. Beiträge zur GDM-Jahrestagung in Paderborn, WTM-Verlag, Münster.
- [19] Horn, Martin Erik (2014–2017): Modern Linear Algebra. A Geometric Algebra Crash Course. OHP-Folien der Kurse „Mathematics for Business and Economics“, LV-Nr. 200 691.01, Hochschule für Wirtschaft und Recht Berlin / Berlin School of Economics and Law. Part I: Basics & Introduction. Url: www.phydid.de/index.php/phydid-b/article/view/626/794 (17.12.2015), Part II: Solving Systems of Linear Equations. Url: www.phydid.de/index.php/phydid-b/article/view/626/795 (17.12.2015), Part III: The Direct Product & Solving Higher-Dimensional Systems of Linear Equations. Url: www.phydid.de/index.php/phydid-b/article/view/626/796 (17.12.2015), Part IV: Transformation of Coordinates & Gaussian Method of Solving a System of Linear Equations. Url: www.phydid.de/index.php/phydid-b/article/view/727/892 (17.12.2016), Part V: Eigenvalues and Eigenvectors. Url: www.phydid.de/index.php/phydid-b/article/view/782/954 (22.12.2017), Part VI: Solving Systems of Linear Equations with Sandwich Products. Url: www.phydid.de/index.php/phydid-b/article/view/801/956 (22.12.2017).
- [20] HWR Berlin (2017): Elektronisches Vorlesungsverzeichnis der Hochschule für Wirtschaft und Recht Berlin, Wintersemester 2017/2018. Url: www.hwr-berlin.de (30.10. 2017). Über die Link-Kette → *Studierendenportal* → *Campus4U* → *Module* → *Suche nach Modulen* und Eingabe der Modulnummer 200691 kann ohne Passworteingabe auf die frei zugänglichen Modulbeschreibungen zugegriffen werden.

- [21] Horn, Martin Erik (2018): Die Geometrische Algebra mit GAALOP im Schnelldurchgang. Beitrag DD 02.03 zur Frühjahrstagung 2018 des Fachverbands ‚Didaktik der Physik‘ der Deutschen Physikalischen Gesellschaft an der Universität Würzburg. Zur Veröffentlichung eingereicht bei PhyDid B.
- [22] Horn, Martin Erik (2018): Moderne Lineare Algebra: Geometrische Algebra mit GAALOP. Übungsblätter des Moduls „Wirtschaftsmathematik“ der Bachelor-Poolveranstaltungen an der HWR Berlin, LV-Nr. 200 601.07, überarbeitete und ergänzte Fassung vom 30. April 2018. Englische Fassung: Modern Linear Algebra: Geometric Algebra with GAALOP. Worksheets of the module „Mathematics for Business and Economics“ of joint first-year bachelor lessons at Berlin School of Economics and Law/Hochschule für Wirtschaft und Recht Berlin, LV-Nr. 200 691.01 & 400 691.01, Stand: 07. Jan. 2018, eingereicht als Anhang von Beitrag [21].
- [23] Horn, Martin Erik (2018, Zusatzdatei): Poster DD 02.35, „Verallgemeinerte Matrizeninverse und Moore-Penrose-Matrizeninverse aus physikdidaktischer Sicht“ vom 19. März 2018, siehe auch Url: www.dpg-verhandlungen.de/year/2018/conference/wuerzburg/part/dd/session/2/contribution/35 (01.03. 2018).
- [24] Horn, Martin Erik (2017, Zusatzdatei): Modern Linear Algebra. A Geometric Algebra Crash Course. Part VII: Generalized Matrix Inverses. OHP-Folien des Kurses „Mathematics for Business and Economics“ (Stand: 19. Dez. 2017), LV-Nr. 200 691.01, Wintersemester 2017/2018. Hochschule für Wirtschaft und Recht Berlin / Berlin School of Economics and Law.
- [25] Horn, Martin Erik (2018, Zusatzdatei): Poster SOE 7.02, „The Geometry of Moore-Penrose Generalized Matrix Inverses“ vom 12. März 2018, siehe auch Url: www.dpg-verhandlungen.de/year/2018/conference/berlin/part/soe/session/7/contribution/2 (01.03. 2018).
- [26] Horn, Martin Erik (2018, Zusatzdatei): Pauli Algebras in Economics: Econo-mathematics from Geometry to Didactics and back – The Geometry of Moore-Penrose Generalized Matrix Inverses. Short talk SOE 9.2 and poster presentation SOE 7.2 at the DPG Spring Meeting of the German Physical Society in Berlin 2018, Physics of Socio-Economic Systems Division.