Posterbeitrag zur DPG-Frühjahrstagung 2017 an der Universität Dresden, DD 02.17, Mo, 20. März 2017, 14:00 h – 16:00 h, Postersitzung P3, Foyer Chemiegebäude

Zur Lösung Linearer Gleichungssysteme mit Hilfe gemischter Sandwich-Produkte

Martin Erik Horn, HWR Berlin, FB 1, FE Quantitative Methoden

Hochschule für Wirtschaft und Recht Berlin
Berlin School of Economics and Law

Email: *e_hornm@doz.hwr-berlin.de*

Didaktisches Problem: Mathematik-Virus **MV/G**

David Hestenes (1992): “A mathematical virus (MV) is a preconception about the structure, function or method of mathematics which impairs one's ability to do mathematics. Just as a computer virus (CV) is program which impairs the operating system of a computer, an MV is an idea which impairs the conceptualization of mathematics in the mind.”

MV/G: “Grassmann Algebra is more fundamental than Clifford Algebra.”

Von einer Infektion mit dem Mathematik-Virus **MV/G** sind Personen betroffen, die davon ausgehen, dass die Mathematik der äußere Algebra (Grassmann-Algebra) grundlegender ist als eine Mathematik, die äußere und innere Algebra (Clifford-Algebra), umfasst.

Didaktischer Vorschlag:

Um zu verhindern, dass sich Lernende mit dem Mathematik-Virus **MV/G** anstecken oder dass sich Präkonzepte dieser Art verfestigen, ist es sinnvoll, neben der Lösung Linearer Gleichungssysteme mit Hilfe äußerer Produkte auch deren Lösung mit Hilfe vollständiger Geometrischer Produkte zu erörtern.

Zeitskala: Lineare Gleichungssysteme

Einbezug physikalischer Ideen

t

Frühe Hochkulturen: Babylonier, Chinesen, etc. (rein textbasierte Lösungswege)

ca. 2000 Jahre

Diophantus von Alexandria
(Entwicklung der Variablenschreibweise)

abstrakte formelbasierte Lösungsbeschreibungen

ca. 2000 Jahre

Varianten des Gaußschen Eliminationsverfahrens

Leibniz, Seki, Cramer, **Grassmann**, Peirce, Clifford, Hamilton, Cartan, Pauli, Dirac, Riesz, Hestenes

Grassmann nutzt 1844 die äußere Algebra zur Lösung Linearer Gleichungssysteme. Ein vollständiges Geometrisches Produkt führt er erst 1877 in seinem Beitrag

Der Ort der Hamilton’schen Quaternionen in der Ausdehnungslehre.

ein – allerdings ohne einen Bezug zur Lösung Linearer Gleichungssysteme zu ziehen. Dies kann eine Herausbildung oder Festigung des Mathematik-Virus **MV/G** begünstigen.

Die Wissenschaft
der
extensiven Grösse
oder
die Ausdehnungslehre,
eine neue mathematische Disciplin
dargestellt und durch Anwendungen erläutert
von
Hermann Grassmann
Lehrer an der Friedrich - Wilhelm - Schule zu Stettin

Erster Theil,
die **lineale Ausdehnungslehre** enthaltend.

Leipzig, 1844.
Verlag von Otto Wigand

§ 45. Dass nun die äussere Multiplikation, da sie den Begriff des Verschiedenartigen wesentlich voraussetzt, auf die Zahlenlehre keine so unmittelbare Anwendung findet, wie auf die Geometrie und Mechanik, darf uns freilich nicht wundern, indem die Zahlen ihrem Inhalte nach als gleichartige erscheinen. Aber desto interessanter ist es, zu bemerken, wie in der Algebra, sobald an der Zahl noch die Art ihrer Verknüpfung mit andern Grössen festgehalten, und in dieser Hinsicht die eine als von der andern formell verschiedenartig aufgefasst wird, auch die Anwendbarkeit der äusseren Multiplikation mit einer so schlagenden Entschiedenheit heraustritt, dass ich wohl behaupten darf, es werde durch diese Anwendung auch die Algebra eine wesentlich veränderte Gestalt gewinnen. Um hiervon eine Idee zu geben, will ich n Gleichungen ersten Grades mit n Unbekannten setzen, von der Form

$$\begin{array}{l} a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots\ldots + a_nx_n = a_0 \\ b_1x_1 + b_2x_2 + \ldots\ldots + b_nx_n = b_0 \\ \vdots \\ s_1x_1 + s_2x_2 + \ldots\ldots + s_nx_n = s_0, \end{array}$$

wo $x_1 \ldots\ldots x_n$ die Unbekannten seien. Hier können wir die Zahlenkoefficienten, welche verschiedenen Gleichungen angehören, sofern wir diese Verschiedenheit an ihrem Begriff noch festhalten, als verschiedenartig ansehen, und zwar alle als an sich verschiedenartig, d. h. als unabhängig in dem Sinne unserer Wissenschaft, die einer und derselben Gleichung als unter sich in derselben Beziehung gleichartig. Addiren wir nun in diesem Sinne alle n Gleichungen und bezeichnen die Summe des Verschiedenartigen in dem Sinne unserer Wissenschaft mit dem Verknüpfungszeichen $\dot{+}$, indem die gleichen Stellen in den so gebildeten Summenausdrücken immer dem Gleichartigen zukommen sollen, so erhalten wir

$$(a_1 \dot{+} b_1 \dot{+} \ldots \dot{+} s_1)x_1 \dot{+} (a_2 \dot{+} b_2 \dot{+} \ldots \dot{+} s_2)x_2 \dot{+} \ldots \dot{+} (a_n \dot{+} b_n \dot{+} \ldots \dot{+} s_n)x_n = (a_0 \dot{+} b_0 \dot{+} \ldots \dot{+} s_0),$$

oder bezeichnen wir $(a_1 \dot{+} b_1 \dot{+} \ldots\ldots \dot{+} s_1)$ mit p_1 und entsprechend die übrigen Summen, so haben wir

$$p_1x_1 \dot{+} p_2x_2 \dot{+} \ldots\ldots \dot{+} p_nx_n = p_0.$$

Aus dieser Gleichung, welche die Stelle jener n Gleichungen vertritt, lässt sich nun auf der Stelle jede der Unbekannten, z. B. x_1 finden, wenn wir die beiden Seiten mit dem äusseren Produkte aus den Koefficienten der übrigen Unbekannten äusserlich multipliciren, also hier mit $p_2 \cdot p_3 \ldots\ldots p_n$. Da nämlich, wenn man die Glieder der linken Seite einzeln multiplicirt, nach dem Begriff des äusseren Produktes (§ 31) alle Produkte wegfallen, welche zwei gleiche Faktoren enthalten, so erhält man

$$p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \ldots\ldots p_n x_1 = p_0 \cdot p_2 \cdot p_3 \ldots\ldots p_n.$$

Also da beide Produkte, als demselben System n-ter Stufe angehörig einander gleichartig sind, so hat man

$$x_1 = \frac{p_0 \cdot p_2 \cdot p_3 \ldots\ldots p_n}{p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \ldots\ldots p_o} \text{*)}.$$

Also jede Unbekannte ist einem Bruche gleich, dessen Nenner das äussere Produkt der Koefficienten $p_1 \ldots p_n$ ist, und dessen Zähler man erhält, wenn man in diesem Produkt statt des Koefficienten jener Unbekannten die rechte Seite, nämlich p_0, als Faktor setzt. Alle Unbekannten haben also denselben Nenner, und werden unbestimmt oder unendlich, wenn dieser Nenner null wird, d. h.

$$p_1 \cdot p_2 \ldots\ldots p_n = 0$$

ist.

Mathematische Grundlagen:

Vektoren

Vektoren werden als Linearkombinationen von verallgemeinerten Pauli-Matrizen dargestellt (⇒ Geometrische Algebra). Beispiel im 3d Raum:

$$\mathbf{r} = x\,\sigma_x + y\,\sigma_y + z\,\sigma_z$$

Lineare Gleichungssysteme

Jedes Lineare Gleichungssystem kann als Linearkombination von Koeffizientenvektoren geschrieben werden. Beispiel mit drei Variablen x, y, z:

$$\mathbf{a}\,x + \mathbf{b}\,y + \mathbf{c}\,z = \mathbf{r}$$

Sandwich-Produkte

Ein mathematisches Objekt wird als mittlerer Faktor in Sandwich-Form rechts- und linksseitig mit identischen Größen (reines Sandwich-Produkt) oder mit unterschiedlichen Größen (gemischtes Sandwich-Produkt) multipliziert.

Geometrische Interpretation von Sandwich-Produkten mit Vektoren:

reines Sandwich-Produkt
↕
Spiegelung (+ ggfs. Streckung)

Beispiel 1: Die Sandwich-Multiplikation mit dem Basisvektor σ_x

$$\sigma_x\,\mathbf{r}\,\sigma_x = \sigma_x\,(x\,\sigma_x + y\,\sigma_y + z\,\sigma_z)\,\sigma_x = x\,\sigma_x - y\,\sigma_y - z\,\sigma_z$$

kehrt die senkrecht zur x-Achse stehenden Komponenten um, so dass hier eine Spiegelung an der x-Achse modelliert wird.

Beispiel 2: Die Sandwich-Multiplikation mit dem Koeffizientenvektor **a**

$$\mathbf{a\,r\,a} = \mathbf{a}\,(\mathbf{a}\,x + \mathbf{b}\,y + \mathbf{c}\,z)\,\mathbf{a} = a^2\mathbf{a}\,x + \mathbf{aba}\,y + \mathbf{aca}\,z$$

modelliert eine Spiegelung an einer Achse in Richtung des Vektors **a** und erzeugt gleichzeitig eine Streckung um a^2.

gemischtes Sandwich-Produkt
↕
Achsenvertauschung (+ ggfs. Streckung)

Beispiel 3: Eine linksseitige Multiplikation mit σ_x und rechtsseitige Multiplikation mit σ_y

$$\sigma_x\,\mathbf{r}\,\sigma_y = \sigma_x\,(x\,\sigma_x + y\,\sigma_y + z\,\sigma_z)\,\sigma_y = y\,\sigma_x + x\,\sigma_y - z\,\sigma_x\sigma_y\sigma_z$$

vertauscht die x- und y-Achse, während weitere Komponenten in Trivektoren überführt werden.

Beispiel 4: Eine linksseitige Multiplikation mit dem Koeffizientenvektor **a** und rechtsseitige Multiplikation mit **b**

$$\mathbf{a\,r\,b} = \mathbf{a}\,(\mathbf{a}\,x + \mathbf{b}\,y + \mathbf{c}\,z)\,\mathbf{b} = b^2\mathbf{a}\,y + a^2\mathbf{b}\,x + \mathbf{acb}\,z$$

vertauscht bei gleichzeitiger Streckung die **a**- und **b**-Achse.

Lösungsansatz:

$$\mathbf{c\,r\,b} = \mathbf{cab}\,x + b^2\mathbf{c}\,y + c^2\mathbf{b}\,z$$
$$\mathbf{b\,r\,c} = \mathbf{bac}\,x + b^2\mathbf{c}\,y + c^2\mathbf{b}\,z$$

gemischte Sandwich-Produkte

$$\mathbf{c\,r\,b} - \mathbf{b\,r\,c} = (\mathbf{cab} - \mathbf{bac})\,x$$

Differenzbildung

$$\Rightarrow \quad x = (\mathbf{cab} - \mathbf{bac})^{-1}\,(\mathbf{crb} - \mathbf{brc})$$

Analog ergibt sich:

$$y = (\mathbf{abc} - \mathbf{cba})^{-1}\,(\mathbf{arc} - \mathbf{cra})$$
$$z = (\mathbf{bca} - \mathbf{acb})^{-1}\,(\mathbf{bra} - \mathbf{arb})$$

Division durch triviektoriellen Vorfaktor

Ergebnis:

Die Erprobung am Ende der Lerneinheit zur Linearen Algebra im WS 2016/2017 hat gezeigt, dass die Lösung einfacher Linearer Gleichungssysteme mit Hilfe von Sandwich-Produkten auch in relativ knapper Zeit (zwei Vorlesungsstunden) als Ergänzung des Grassmannschen Ansatzes mit den Studierenden erfolgreich erörtert werden kann.