

Zur Lösung Linearer Gleichungssysteme mit Hilfe gemischter Sandwich-Produkte

Martin Erik Horn

HWR – Hochschule für Wirtschaft und Recht Berlin / Berlin School of Economics and Law
Badensche Str. 52, 10825 Berlin
Email: e_hornm@doz.hwr-berlin.de, mail@martinerikhorn.de

Kurzfassung

Die Lösung Linearer Gleichungssysteme beruht nach Cramer und Graßmann auf der intelligenten Verknüpfung von Determinanten bzw. äußeren Produkten. Dieser historisch gefestigte Lösungsansatz wurde vor einer Formulierung Geometrischer Produkte entwickelt und stellt letztendlich eine schrittweise Verknüpfung von Produkten aus zwei geometrisch-algebraischen Faktoren dar.

Dieser Lösungsansatz soll aus physikalischer und physikdidaktischer Perspektive hinterfragt und durch einen Lösungsansatz, der sich auf Produkte aus drei Faktoren (gemischte Sandwich-Produkte) stützt, ergänzt werden.

1. Historischer Rückblick: Gleichungssysteme

Eine der ersten abstrakten Kulturtechniken, die von der Menschheit entwickelt wurde, war die Mathematik. Und einer der ersten mathematischen Kulturtechniken, die von unseren mathematikaffinen Vorgängern entwickelt wurde, war die Lösung von Gleichungen und Gleichungssystemen.

Neben der damals mit Sicherheit schon vorhandenen Motivation, die Mathematik als geistig herausforderndes Abenteuer zu begreifen, durch das neue Erkenntnisse des reinen Erkenntniswillens wegen geschaffen werden, waren es in den frühen Hochkulturen der großen Flusssysteme auch immer handfest alltagsnotwendige Aufgaben und Fragestellungen, die zu einer Weiterentwicklung der Mathematik führten.

So musste nach den regelmäßig auftretenden Überschwemmungen am Nil oder im Zweistromland das fruchtbare Land wieder möglichst gerecht verteilt werden, auch wenn eventuelle Feldmarkierungen unter Schlamm verschüttet oder weggeschwemmt worden waren.

Während eine gerechte Neu-Verteilung der Felder naturgemäß proportional zum Flächeninhalt des Feldbesitzes erfolgen sollte, beruhten die damaligen Messverfahren auf Längenmessungen. Die Landvermesser standen somit vor dem mathematischen Dilemma, zwei Gleichungen (beispielsweise eine erste für den Umfang und eine zweite für den Flächeninhalt von Feldern) so zu verknüpfen, dass eine sinnvolle Lösung ermittelt werden konnte.

Die damals lebenden Mathematiker entwickelten infolgedessen Lösungsschemata zur Lösung dieser Aufgabe, wobei die Verknüpfung einer Gleichung ersten Grades (für eine längenorientierte Größe) und

eine Gleichung zweiten Grades (für eine flächenbezogene Größe) auf die Lösung einer quadratischen Gleichung [1, S. 64–71], [2] führte.

Parallel zu dieser anspruchsvollen Aufgabe erkundeten die frühzeitlichen Mathematiker Lösungsschemata für die Verknüpfung zweier Gleichungen ersten Grades. Die Lösung eines linearen Gleichungssystems mit zwei Unbekannten war somit schon damals so etwas wie eine didaktisch³ motivierte Aufwärmübung, um auf die Lösung anspruchsvoller Gleichungssysteme vorzubereiten.

Die damals praktizierten Verfahren zur Lösung Linearer Gleichungssysteme beruhten im Wesentlichen auf dem Gaußschen Eliminationsverfahren, das in zahlreichen Variationen und Vorstufen seit Anbeginn der historisch aufgezeichneten Mathematik [3], [4] genutzt wurde.

In dem hier vorliegenden Beitrag soll jedoch eine alternative und konzeptionell prinzipiell andersartige Art, Gleichungssysteme zu lösen [5] vorgestellt und diskutiert werden.

2. Zwei historische Beispiele für Aufgaben zu Linearen Gleichungssystemen

Es ist davon auszugehen, dass mathematischen Kulturtechniken bereits vor Erfindung der Schrift¹ entwickelt wurden, denn die Probleme, die zu lösen

¹ Eines der wichtigsten Tätigkeitsfelder frühzeitlicher Mathematiker war die Buchhaltung. Es spricht Vieles dafür, dass diese Mathematiker und Buchhalter die Schrift erfanden [6, Kap. 10]. Die Schlussfolgerung, dass die Mathematik der Schrifterfindung vorausging und diese sogar bedingte („as far as our evidence goes, ‘mathematics’ precedes writing“ [7, S. 16]) scheint trotz der naturgemäß unvollständigen Quellenlage nahezu zwingend. Die Erfindung der Schrift ist eine Folge mathematischen Handelns und mathematischen Denkens.

waren (wie die eben diskutierte gerechte Neu-Verteilung überschwemmten Landes oder im Todesfall unter mehreren Erben²) mussten bereits lange vor Erfindung der Schrift gelöst werden, ohne dass es dabei jeweils zu größeren gesellschaftlichen Verwerfungen kommt.

So hat es den Anschein, dass eine hoch entwickelte Mathematik quasi aus dem Nichts auftaucht, deren Entwicklungslinien im Dunkeln einer schriftlich nicht fixierten Vorgeschichte liegen. Die archäologisch gesicherten und uns heute zugänglichen mathematischen Keilschrifttexte sind sowohl in der Frühzeit der Sumerer (vor 3000 v.Chr.) [9, Kap. 6] wie auch in der Blütezeit Alt-Babylonischer Mathematik (ca. 21000 – 1600 v.Chr.) hauptsächlich schulische Lehr- und Übungstexte [8, Abschnitt 3.2]³, die bereits lange zuvor erworbenes Wissen didaktisch aufbereitet zur Verfügung stellen.

Ein solcher Aufgabentext aus der Alt-Babylonischen Periode findet sich in der Sammlung des Vorderasiatischen Museums Berlin (siehe Abb. 1).

Zwei Felder umfassen zusammen eine Fläche von 1800 Sar.

Die Pachtgebühr zur Nutzung des ersten Feldes beträgt 2 Silà Weizen pro 3 Sar, die Pachtgebühr zur Nutzung des zweiten Feldes beträgt 1 Silà Weizen pro 2 Sar.

Die Pachteinnahmen aus dem ersten Feld übersteigen die Pachteinnahmen aus dem zweiten Feld um 500 Silà.

Wie groß sind die beiden Felder?

Abb.1: Aufgabenstellung des Keilschrifttextes VAT 8389 (Eigene Übersetzung der englischen Angaben in [3, S. 782] bzw. [4, S. 167]).

Ein weiteres Zentrum einer frühen mathematischen Hochkultur stellt das alte China dar. So war die Zeit der frühen Han-Dynastie (202 v.Chr. – 9 n.Chr.) eine Periode höchster mathematischer Kreativität [10, S. 162]. Insbesondere ein Werk, das wahrscheinlich zu großen Teilen auf bereits zuvor verfasste, aber in den politischen Wirren der Qin-Dy-

² Hier führt Wußing zahlreiche Beispiele an: „Als Widerspiegelung gesellschaftlicher Verhältnisse sind sog. ‚Verteilungsaufgaben‘ recht häufig: Verteilung der Abgaben bei Feldern mit unterschiedlichem spezifischem Ertrag, Berechnung der Entlohnung der anzuliefernden Ziegel entsprechend der beim Transport zurückgelegten Entfernung, und ähnliche Probleme“ [8, S. 140].

³ Zitat: „Høyrup versucht in seiner schon erwähnten Studie ein Gesamtbild (... und ...) betont, dass die mathematischen Texte Schultexte sind“ [8, S. 141].

nastie zerstörte Arbeiten zurückgeht, ist das Buch „Neun Kapitel über die Kunst von Berechnungen“. Diese Ausgabensammlung – also wie bei den Babyloniern ein didaktisch motiviertes Werk – besteht aus 246 Aufgaben und Musterlösungen, deren Wirkung in Asien mit der Wirkung von Euklids *Elementen* in Europa verglichen werden kann [10, Kap. 9].

Insbesondere findet sich in dieser Aufgabensammlung eine ausführliche Beschreibung der Methode, Lineare Gleichungssysteme mit beliebig vielen Unbekannten zu lösen, „– a method that is still taught to beginning students of matrix algebra today. And all this took place over 2,000 years ago!“ [10, S. 162]

Auch die chinesischen Mathematiker lösten diese und ähnliche Aufgaben in Anlehnung an das Gauß-Verfahren. Aufgrund der Nutzung von Rechenbrettern entwickelten sie zudem eine handfest-anschauliche Vorstellung von Matrizendarstellungen, so dass zur Recht „von einer Art Matrizenrechnung“ [11, S. 176], [8, S. 57] gesprochen werden kann.

In der Literatur finden sich verschiedene Fassungen dieser Aufgabe [10, S. 161], [3, S. 783], [11, S. 177], [8, S. 57/58], die sich in etwa mit der in Abbildung 2 aufgeführten Aufgabenstellung zusammenfassen lassen.

Auf drei Feldern werden drei verschiedene Reissorten geerntet.

Drei Körbe der ersten Sorte, zwei Körbe der zweiten Sorte und ein Korb der dritten Sorte wiegen zusammen 39 Tou.

Zwei Körbe der ersten Sorte, drei Körbe der zweiten Sorte und ein Korb der dritten Sorte wiegen zusammen 34 Tou.

Und ein Korb der ersten Sorte, zwei Körbe der zweiten Sorte sowie drei Körbe der dritten Sorte wiegen zusammen 26 Tou.

Wie viel wiegt jeweils ein Korb einer Reissorte?

Abb.2: Aufgabenstellung der Reisfelderaufgabe aus dem achten Kapitel der „Neun Kapitel über die Kunst von Berechnungen“.

Alle diese frühen Aufgaben wurden in Textform gestellt, in Textform diskutiert und in Textform gelöst, da die Variablenschreibweise noch unbekannt war: „We started in 1 800 BCE with the Babylonians solving quadratic equations written as word problems, and now here we are 2,600 years later with al-Khwarizmi ... solving quadratic equations written as

word problems. - - It is, I agree, all a bit depressing” [10, S. 51]. Aus unserer heutigen, hochabstrakten Sicht auf die Mathematik ist es in der Tat erstaunlich, dass über Jahrtausende die Mathematik in gewisser Weise erzählend – und nicht rechnend – praktiziert wurde.

Dieses Erstaunen kann auch Derbyshire nicht unterdrücken, wenn er fortfährt: „Yet it is also inspiring, in a way. The extreme slowness of progress in putting together a symbolic algebra testifies to the very high level at which this subject dwells“ [10, S. 51].

3. Das Wunder der Algebra

Es war für die Menschheit somit ein wahrhaft gigantischer Schritt, den Diophantus und seine Zeitgenossen gingen, als sie zum ersten Mal mathematische Größen und mathematische Operationen symbolhaft abstrakt und nicht mehr konkret textgebunden ausdrückten und – mehr noch – diese abstrakten Zeichenkombinationen sodann logisch konsistent transformierten.

Es war eines der wohl ersten *Anni Mirabiles*, ein Wunderjahr, in der Geschichte der Wissenschaften, und so beschreibt es Johnson auch: „The wonder ... is not that it took us so long to learn how to do this stuff; the wonder is that we can do it at all“ [10, S. 51]. Ohne Diophantus hätte es uns als Menschheit auch passieren können, dass wir über weitere Jahrtausende (und mit einer nicht geringen Wahrscheinlichkeit sogar bis heute⁴) ohne jedes Wissen über algebraische Zusammenhänge und Operationen geblieben wären.

Nach Einführung der Variablenschreibweise können die im vorigen Abschnitt aufgeführten Textaufgaben nun in die übliche Schreibweise Linearer Gleichungen übersetzt werden (siehe Abbildungen 3 und 4).

Wie bereits erwähnt wurden diese und andere Lineare Gleichungssysteme zeilenorientiert und in Ablehnung an das Gauß-Verfahren bzw. dessen Vorstufen

$$\begin{array}{r} x + y = 1800 \\ \frac{2}{3}x - \frac{1}{2}y = 500 \end{array}$$

Abb.3: Lineares Gleichungssystem der Alt-Babylonischen Keilschriftaufgabe VAT 8389.

⁴ In einer solchen Parallelwelt algebra- und mathematikstichtischer Ausprägung scheint sich auch ein Teil der bundesdeutschen Physikdidaktik zu bewegen. Unter dem vermeintlichen Schlagwort einer Phänomenologie zieht sich ein Teil der physikdidaktisch Agierenden hierzulande auf eine Phänomene überbetonende und mathematische Abstraktion vermeidende Position zurück, bei der es im schulischen Kontext gelte, Physik mit „so wenig Mathematik wie möglich“ [12, S. 121] zu vermitteln. Sollte in Schulen – auch über Fächergrenzen hinweg – nicht so viel wie möglich vermittelt werden?

gelöst. Über Jahrtausende hat sich so eine Lösungsroutine verfestigt, die in einem längeren und nun schon seit einigen Jahrhunderten andauernden Prozess aufgebrochen wird.

4. Lernen bedeutet zuvorderst Überdenken

Dieser Prozess startete 1683 mit einer verblüffenden historischen Gleichzeitigkeit: „It is one of the most remarkable coincidences in the history of mathematics that the discovery of determinants took place twice in that year. One of these discoveries occurred in the kingdom of Hanover, now part of Germany; the other was in Edo, now known as Tokyo, Japan” [10, S. 168]⁵.

Ausgangspunkt des Ansatzes von Takakazu Seki in Tokyo und Gottfried Wilhelm von Leibniz in Hannover ist ein Perspektivwechsel, wie er jedem Lernprozess innewohnt. Lernen bedeutet Überdenken und Überdenken bedeutet, sich einem Sachverhalt aus einer anderen Perspektive und unter einem anderen Blickwinkel zu nähern.

So wird die jahrtausendelange Fixierung auf eine zeilenorientierte Betrachtung und Analyse Linearer Gleichungssysteme durch die Nutzung von Determinanten aufgebrochen, da die Determinante einer Matrix nicht nur zeilenbezogen, sondern auch spaltenbezogen berechnet und gedeutet werden kann.

Einer zeilenorientierter Betrachtung wird so zwanglos eine spaltenorientierte Betrachtung zur Seite gestellt. Rückwirkend auf Systeme Linearer Gleichungen kann dann ein Lineares Gleichungssystem nicht nur als Ansammlung mehrerer zeilenweise geschriebener Gleichungen, sondern aus neuer Perspektive zusätzlich als Komposition von spaltenweise angeordneten Koeffizientenvektoren gedacht und beschrieben werden.

$$\begin{array}{r} 3x + 2y + z = 39 \\ 2x + 3y + z = 34 \\ x + 2y + 3z = 26 \end{array}$$

Abb.4: Lineares Gleichungssystem der Reisfelderaufgabe aus den „Neun Kapiteln“ der Han-Dynastie.

Die graphischen Darstellungen einer spaltenweisen Komposition der Ergebnisvektoren \mathbf{r} der beiden historischen Textaufgaben der Abbildungen 1 und 2 werden in den Abbildungen 5 und 7 auf der folgenden Seite gezeigt.

⁵ Derbyshire beschreibt hier die westliche, eurozentristische Sicht auf die Entdeckung – bzw. Erfindung – von Determinanten. Aus fernöstlicher Perspektive stellt sich die historische Einordnung anders dar: „Seki treats of n equations. While Leibniz's discovery was made in 1693 and was not published until after his death, it is evident that Seki was not only the discoverer but that he had a much broader idea than that of his great German contemporary“ [13, S. 125].

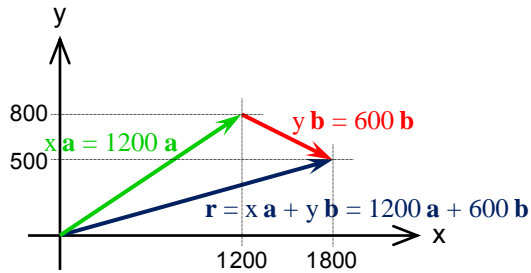


Abb.5: Graphische, spaltenorientierte Darstellung des linearen Gleichungssystems der Keilschriftaufgabe VAT 8389 mit den Lösungswerten $x = 1200$ und $y = 600$.

Folgerichtig beschrieben und ausgewertet wurde dieser spaltenorientierte Ansatz einige Jahrzehnte nach Seki und Leibniz durch den Schweizer Mathematiker Cramer [10, § 9.4], der damit erstmals eine vollkommen aus der Tradition des Gauß-Verfahrens fallende Methode zur Lösung Linearer Gleichungssysteme vorstellte.

Immer noch wurden dabei die den Rechnungen zugrunde liegenden Größen – reelle Zahlen als die Elemente der betrachteten Matrizen – in klassischer Weise algebraisch gefasst. Dies sollte sich mit dem nun folgenden Schritt Graßmanns dramatisch ändern.

5. Eine vollkommen andere, physikorientierte Algebra

Mit seiner Ausdehnungslehre [14] schuf Graßmann 1844 „one of the supreme landmarks in the history of the human mind“ [15, S. 326] – so komplett und einzigartig anders als das bisher Dagewesene, dass Sarton das Jahr der Veröffentlichung als weiteres *Annus Mirabilis* [15, S. 326], einem Wunderjahr Graßmanns, einordnet.

Zentraler Punkt ist dabei die Nutzung der äußeren Multiplikation zur Verknüpfung der Koeffizientenvektoren, die zu einem in doppelter Hinsicht prägenden Paradigmenwechsel führt. Zum einen ist dieser Paradigmenwechsel zutiefst algebraisch.

Auch Graßmann selbst betont diesen algebraischen Umbruch und führt aus, dass bei dem von ihm beschriebenen Verfahren zur Lösung Linearer Gleichungssysteme, „die Anwendbarkeit der äußeren Multiplikation mit einer so schlagenden Entschiedenheit heraustritt, dass (...) durch diese Anwendung auch die Algebra eine wesentlich veränderte Gestalt gewinnen“ [14, S. 71] werde.

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \sigma_x + \frac{2}{3} \sigma_y & \mathbf{b} &= \sigma_x - \frac{1}{2} \sigma_y \\ \mathbf{r} &= 1800 \sigma_x + 500 \sigma_y \\ x &= \frac{\mathbf{r} \wedge \mathbf{b}}{\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}} = \frac{-1400 \sigma_x \sigma_y}{-\frac{7}{6} \sigma_x \sigma_y} = 1200 \\ y &= \frac{\mathbf{a} \wedge \mathbf{r}}{\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}} = \frac{-700 \sigma_x \sigma_y}{-\frac{7}{6} \sigma_x \sigma_y} = 600 \end{aligned}$$

Abb.6: Lösung der Keilschriftaufgabe VAT 8389 nach Graßmann in moderner Schreibweise mit Hilfe der Pauli-Algebra.

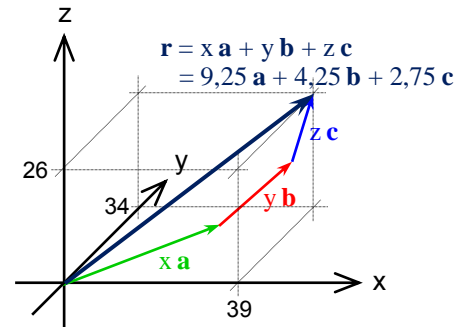


Abb.7: Graphische, spaltenorientierte Darstellung des linearen Gleichungssystems der Reisfelderaufgabe mit den Lösungswerten $x = 37/4$, $y = 17/4$ und $z = 11/4$.

„die Anwendbarkeit der äußeren Multiplikation mit einer so schlagenden Entschiedenheit heraustritt, dass (...) durch diese Anwendung auch die Algebra eine wesentlich veränderte Gestalt gewinnen“ [14, S. 71] werde.

Diese andere Algebra wird beispielhaft für die beiden historischen Aufgaben in den Abbildungen 6 und 8 gezeigt.

Zum zweiten ist dieser Paradigmenwechsel zutiefst geometrisch. Und er ist zutiefst geometrisch, weil er zugleich zutiefst physikalisch ist.

Graßmann greift mit seinem Vorgehen tatsächlich ein physikalisches Argumentationsmuster vorweg, das nach seinem Tode noch zu tiefgreifenden Umwälzungen in der Physik führen sollte – die Geometrisierung algebraischer Größen.

Wenn in der Speziellen Relativitätstheorie der Zeit eine Richtung zugeordnet und diese so mit räumlichen Richtungsgrößen verknüpft wird, folgt die Physik hier der Idee Graßmanns, der den einzelnen Linearen Gleichungen eines Gleichungssystems Richtungen zuordnet und diese so geometrisch verknüpft.

Unter Nutzung der Pauli-Algebra kann dieses Vor-

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= 3 \sigma_x + 2 \sigma_y + \sigma_z \\ \mathbf{b} &= 2 \sigma_x + 3 \sigma_y + 2 \sigma_z \\ \mathbf{c} &= \sigma_x + \sigma_y + 3 \sigma_z \\ \mathbf{r} &= 39 \sigma_x + 34 \sigma_y + 26 \sigma_z \\ x &= \frac{\mathbf{r} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}}{\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}} = \frac{111 \sigma_x \sigma_y \sigma_z}{12 \sigma_x \sigma_y \sigma_z} = 9,25 \\ y &= \frac{\mathbf{a} \wedge \mathbf{r} \wedge \mathbf{c}}{\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}} = \frac{51 \sigma_x \sigma_y \sigma_z}{12 \sigma_x \sigma_y \sigma_z} = 4,25 \\ z &= \frac{\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{r}}{\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}} = \frac{33 \sigma_x \sigma_y \sigma_z}{12 \sigma_x \sigma_y \sigma_z} = 2,75 \end{aligned}$$

Abb.8: Lösung der Reisfelderaufgabe nach Graßmann in moderner Schreibweise mit Hilfe der Pauli-Algebra.

gehen in moderner Form durch eine simple Multiplikation der einzelnen Linearen Gleichungen mit Pauli-Matrizen, die als Basisvektoren eines Euklidischen Raums [16], [17, Abs. 2.6] interpretiert werden müssen, dargestellt werden [18], [19], [20].

Ursprünglich fokussierte Graßmann auf die rein algebraische Herleitung und Interpretation der in Abb. 6 und 8 genutzten Lösungsgleichungen. In der Tat können diese – und nach Peirce und Arnold müssen diese zwingend – geometrisch eingebunden und interpretiert werden.

So betont Peirce als einer der wenigen Mathematiker, die Graßmanns Schreib- und Ausdrucksweise zu seinen Lebzeiten verstanden, den geometrischen Kern seiner Argumentation [21].

Graßmann revolutioniert in diesem Sinne den Lösungsansatz von Cramer auch aus didaktischer Sicht, denn erst durch Graßmann wird die geometrische Natur der von Cramer verwendeten Zähler- und Nennerdeterminanten einsichtig: Sie sind die (Hyper-)Volumina der durch die Koeffizientenvektoren und den Ergebnisvektor aufgespannten (Hyper-)Parallelepipede bzw. Parallelotope.

Eine stärkere Beachtung dieses elementaren Sachverhalts in der Grundlagenausbildung fordert Arnold mit dramatischen Worten ein: „The determinant of a matrix is an (oriented) volume of the parallelepiped whose edges are its columns. (...) If determinants are defined otherwise, then any sensible person will forever hate all the determinants“ [22].

Bei der von Graßmann eingeführten Sichtweise handelt es sich also tatsächlich um eine konzeptionell untrennbare Verzahnung von Algebra und Geometrie und damit um eine im innersten Kern zutiefst Geometrische Algebra.

6. Der Mathematik-Virus MV/G

Die ursprüngliche Fokussierung Graßmanns auf rein algebraische Argumentationsmuster⁶ hatte auf die Art und Weise, wie seine Ideen in das Gesamtgefüge der Mathematik einzuordnen sind, didaktisch problematische Auswirkungen.

Bei der Einführung eines neuen Ansatzes oder einer neuen Idee gibt es prinzipiell immer zwei Möglichkeiten. Die neue Idee kann entweder als

- Ergänzung oder aber als
- Ersetzung

des ursprünglich Vorhandenen gedeutet werden. So auch bei Graßmanns äußerer Algebra.

Aus geometrischer Perspektive ist die äußere Algebra ohne Zweifel als eine dringend notwendige Er-

gänzung zur inneren Algebra zu verstehen. Das äußere Produkt zweier Vektoren $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ ergibt erst zusammen mit dem inneren Produkt $\mathbf{a} \bullet \mathbf{b}$ ein mathematisch geschlossenes Geometrisches Produkt

$$\mathbf{a} \mathbf{b} = \mathbf{a} \bullet \mathbf{b} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \quad \{1\}$$

das in verblüffender Weise⁷ die Geometrie mit der physikalischen Welt verbindet⁸. Letztendlich ist diese zentrale Gleichung {1} nichts anderes als eine vektorgebundene Umformulierung des trigonometrischen Pythagoras

$$1 = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \quad \{2\}$$

Und kein didaktisch denkender Geist würde je auf die Idee kommen, eine Weltsicht alleine auf den Sinus-Term zu gründen – auch wenn das prinzipiell möglich und mental herausfordernd lösbar wäre.

Unter Mathematikerinnen und Mathematikern ist eine allein auf der äußeren Algebra aufbauende Weltsicht jedoch nicht ungewöhnlich. Sie tritt sogar so oft auf, dass Hestenes dieser Anschauung eine eigene Kategorie didaktischer Fehlkonzeppte zuweist.

Dabei verwendet Hestenes zur Veranschaulichung seiner Argumentation das Bild eines mathematischen Virus (MV), der einem biologischen Virus (BV) oder einem Computervirus (CV) gleich einen Wirtskörper befällt „until it impairs the functioning of the host, sometimes to the point of disabling the host altogether. Moreover, it is infectious, spreading from one host to another on contact“ [25].

Ein mathematischer Virus „can infect the mind – the mind of anyone doing mathematics, from young student to professional mathematician“ [25]. Ein solcher Virus stellt nach Hestenes in der Tat ein gravierendes Fehl- oder Präkonzept dar – „a preconception about the structure, function or method of mathematics which impairs one's ability to do mathematics“ [25].

Im Bereich der Geometrischen Algebra bzw. Clifford-Algebra identifiziert Hestenes mehrere, sehr unterschiedliche mathematische Viren. Eine der virulentesten mathematischen Viren, die verantwortlich für ein Versagen der konventionellen Mathematik seien, bezeichnet Hestenes als MV/G oder als „Grassmann Virus“. Das hinter diesem Virus stehende Fehlkonzept lässt sich leicht identifizieren: „MV/G: Grassmann Algebra is more fundamental than Clifford Algebra“ [25].

Die von diesem Virus Befallenen gehen davon aus, dass die Grassmann-Algebra – also die Algebra

⁶ Mit einer Beschreibung seines Ansatzes als „Algebra, sobald an der Zahl noch die Art ihrer Verknüpfung mit anderen Größen festgehalten, und in dieser Hinsicht die eine als von der anderen formell verschiedenartig aufgefasst wird“ [14, S. 70/71] folgt Graßmann einen zu Beginn geometriefernen Argumentationsmodus.

⁷ Sobczyk schreibt dazu: „Why hadn't I ever heard of this striking product, and why hadn't I ever heard of a bivector or directed plane segment, since it was the natural generalization of a vector. Twenty-five years later I still find myself asking these same questions...“ [23, S. 1291].

⁸ Denn unter anderem daraus schöpft die Geometrische Algebra (GA) ihre konzeptionelle Stärke: „The power of GA derives from ... the way geometry links the algebra to the physical world“ [24, S. 70/71].

äußerer Produkte – fundamentaler sei als die Clifford-Algebra – also die Algebra äußerer und innerer Produkte. Unter anderem verkennen die von diesem Virus Befallenen vollständig die elementare Bedeutung von Gl. {1}.

Um im schulischen und hochschulischen Bereich bei einer eventuellen Diskussion der Geometrischen Algebra in der Mathematik oder einer Anwendung der Geometrischen Algebra im Bereich der Physik des Aufkommen des Grassmann-Virus MV/G zu vermeiden oder zumindest dessen Wirkung zu mindern, ist eine Anti-MV/G-Strategie notwendig.

Diese kann unter anderem darin bestehen, die Nutzung des vollständigen Geometrischen Produktes auch dann zu diskutieren, wenn ein Resultat – wie beispielsweise bei der Lösung Linearer Gleichungssysteme – auch alleine unter Rückgriff auf äußere Produkte gefunden werden könnte.

Genau dies ist das zentrale didaktische Ziel dieses Beitrags: Neben die in den vorangegangenen Ausarbeitungen zur Geometrischen Algebra [18], [26], [27] gestellte Nutzung der äußeren Algebra ein Lösungsschema Linearer Gleichungssysteme zu setzen, das sich auf vollständige Geometrische Produkte bezieht – und dieses algebraische Lösungsschema dann auch geometrisch zu deuten.

7. Reine Sandwich-Produkte

Seit der 4. Earl of Sandwich sich um etwa 1760 erstmals ein zwischen zwei identische Toastbrot-Scheiben gekonnt eingelegtes Rindfleisch-Filet reichen ließ, darf eine Struktur, in der ein Inneres von einem Äußeren zweiseitig umschlossen wird, guten Gewissens als Sandwich bezeichnet werden.

Das gilt auch für die Mathematik, in der insbesondere im englischen Sprachraum ein Produkt aus drei Faktoren als Sandwich-Produkt bezeichnet werden kann. Wird das mathematische Objekt in der Mitte von zwei identischen Objekten eingeklemmt, kann von einem reinen Sandwich-Produkt gesprochen werden. Wird das mittige Objekt von zwei unterschiedlichen Objekten umschlossen, so handelt es sich um ein gemischtes Sandwich-Produkt (siehe Abschnitte 8 & 9).

In der Geometrischen Algebra kommt Sandwich-Produkten eine entscheidende mathematische Stellung zu, da sie sich in unerwartet einfacher Weise geometrisch deuten lassen: „Reflection in a line is represented by a sandwiching construction involving the geometric product. Though that may have seemed a curiosity (...) it is crucial to the representation of operators in geometric algebra“ [28, S. 167].

Und dies gilt sehr allgemein für eine beliebige Anzahl an Dimensionen, da „the distinction between subspaces and operators fades when we realize that any subspace generates a reflection operator, which can act on any element“ [28, S. 167].

Eine übersichtliche Darstellung dieses Zusammenhangs findet sich auch in [29] mit der einfachen

Botschaft: „Sandwich products describe reflections.“

Zu beachten ist allerdings, dass die Reflexion noch von einer Streckung oder Stauchung begleitet wird, falls das reflektierende Objekt nicht durch eine Einheitsgröße dargestellt wird. Bei der Reflexion an einer Achse in Richtung des Vektors \mathbf{b} wird durch das Sandwich-Produkt $\mathbf{b r b}$ der Vektor \mathbf{r} nicht nur an einer Achse in Richtung des Vektors \mathbf{b} reflektiert, sondern auch um den Faktor \mathbf{b}^2 gestreckt.

Deshalb sollte noch durch diesen Streckungsfaktor dividiert werden, um den Reflexionsvektor \mathbf{b} in einen Einheitsvektor zu überführen [29, Gl. 10] und so die gewünschte Reflexion zu modellieren:

$$\mathbf{r}_{\text{ref}} = \mathbf{b r} \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{b}^2} = \mathbf{b r b}^{-1} \quad \{3\}$$

Nun hat man die notwendigen mathematischen Werkzeuge zur Hand, um die Lösung eines einfachen Linearen Gleichungssystems mit zwei Unbekannten x und y

$$\mathbf{r} = \mathbf{a x} + \mathbf{b y} \quad \{4\}$$

unter alleinigen Rückgriff auf Geometrische Produkte zu lösen, indem die Sandwich-Produkte mit den Koeffizientenvektoren gebildet und ausgewertet werden.

Da sich diese Sandwich-Produkte geometrisch als Reflexionen deuten lassen, ist eine graphische Veranschaulichung (siehe Abb. 9) sinnvoll. Zusammen mit der Reflexion des Koeffizientenvektors \mathbf{a} an der Achse in Richtung des Koeffizientenvektors \mathbf{b}

$$\mathbf{a}_{\text{ref}} = \mathbf{b a} \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{b}^2} = \mathbf{b a b}^{-1} \quad \{5\}$$

kann der Lösungswert für die Unbekannte x durch Differenzenbildung (siehe Abb. 11) leicht ermittelt werden. Dies wird in Abb. 10 am Beispiel der Keilschriftaufgabe VAT 8389 schrittweise vorgestellt.

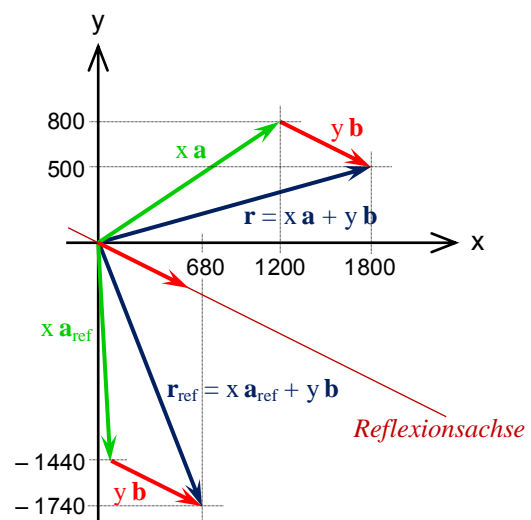


Abb.9: Veranschaulichung des Sandwich-Produkts $\mathbf{b r b}^{-1}$ als Reflexion an der \mathbf{b} -Achse am Beispiel der Keilschriftaufgabe VAT 8389.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a} &= \sigma_x + \frac{2}{3} \sigma_y & \mathbf{b} &= \sigma_x - \frac{1}{2} \sigma_y \\
 \mathbf{r} &= 1800 \sigma_x + 500 \sigma_y & \mathbf{b}^2 &= \frac{5}{4} \\
 \mathbf{a}_{\text{ref}} &= \mathbf{b} \mathbf{a} \mathbf{b} / \mathbf{b}^2 = \frac{1}{15} \sigma_x - \frac{6}{5} \sigma_y \\
 \mathbf{r}_{\text{ref}} &= \mathbf{b} \mathbf{r} \mathbf{b} / \mathbf{b}^2 = 680 \sigma_x - 1740 \sigma_y \\
 \mathbf{a} - \mathbf{a}_{\text{ref}} &= \frac{14}{15} \sigma_x + \frac{28}{15} \sigma_y \\
 \mathbf{r} - \mathbf{r}_{\text{ref}} &= 1120 \sigma_x + 2240 \sigma_y \\
 x &= \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\text{ref}}}{\mathbf{a} - \mathbf{a}_{\text{ref}}} = 1200
 \end{aligned}$$

Abb.10: Berechnung des Lösungswertes für x der Keilschriftaufgabe VAT 8389 mit Hilfe einer Reflexion an der Achse in Richtung des Koeffizientenvektors **b**.

Die Lösungsformeln für das Lineare Gleichungssystem {4} lauten somit:

$$x = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{b} \mathbf{r} \mathbf{b}^{-1}}{\mathbf{a} - \mathbf{b} \mathbf{a} \mathbf{b}^{-1}} \quad \{6\}$$

$$y = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{a} \mathbf{r} \mathbf{a}^{-1}}{\mathbf{b} - \mathbf{a} \mathbf{b} \mathbf{a}^{-1}} \quad \{7\}$$

Diese sind den Grassmannschen Lösungsformeln (siehe Abb. 6) äquivalent, da sich nach rechtsseitiger Multiplikation mit dem jeweiligen Koeffizientenvektor in Zähler und Nenner der Gl. {6} bzw. {7} die Definitionsgleichung für das äußere Produkt ergibt.

Es lassen sich somit Lösungsgleichungen aufstellen, die in leicht nachvollziehbarer und graphisch fassbarer Weise unter alleiniger Nutzung Geometrischer Produkte Lineare Gleichungssysteme lösen.

Die hier vorgestellte Lösungsmethode kann auch auf Systeme Linearer Gleichungen mit mehr als zwei Unbekannten übertragen werden. Dabei sollte sukzessive das Sandwich-Produkt mit den jeweiligen modifizierten Koeffizienten der zu eliminierenden Variablen gebildet werden.

Dieses Vorgehen wird bei einer höheren Anzahl an Unbekannten schnell unübersichtlich und führt bereits bei einem Linearen Gleichungssystem mit drei Unbekannten x, y und z

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} x + \mathbf{b} y + \mathbf{c} z \quad \{8\}$$

zu einem deutlich erhöhten Rechenaufwand [34, S. 45]. Am Beispiel der Reisfelderaufgabe aus den „Neun Kapiteln“ der Han-Dynastie wird die Rechnung im beigefügten Skript explizit vorgestellt [34, S. 46 – 50]. Der deutlich sichtbar erhöhte Rechenaufwand kann nun entweder durch Nutzung entsprechender Software (wie zum Beispiel GAALOP [30], [31]) abgemildert oder durch eine intelligente Modifikation des Sandwich-Ansatzes reduziert werden.

Eine solche Modifikation in Form eines gemischten Sandwich-Produktes wird im folgenden Abschnitt vorgestellt.

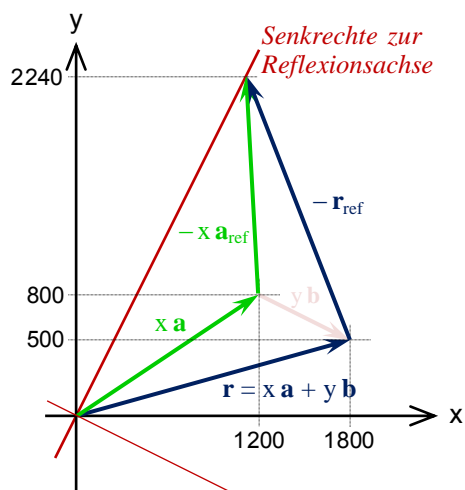


Abb.11: Graphische Veranschaulichung der Berechnung des Lösungswertes für x der Keilschriftaufgabe VAT 8389.

8. Einfache gemischte Sandwich-Produkte

Auch gemischte Sandwich-Produkte sind nicht einfach drei beliebige Faktoren, die aus Freude an der britischen Kulinaristik jetzt salopp als Sandwich bezeichnet werden.

Gemischte Sandwich-Produkte sind weiterhin mathematische Gebilde, bei denen dem mittleren Faktor ein gänzlich anderes Setting zukommt als den beiden äußeren Faktoren. Der mittlere Faktor ist ein Operand, der einer Transformation unterworfen ist (bei reinen Sandwich-Produktion wird auf den mittleren Faktor eingewirkt, da er beispielsweise reflektiert wird).

Die beiden äußeren Faktoren sind Operatoren, die die Transformation gestalten (bei reinen Sandwich-Produkten wirken sie ein, indem sie beispielsweise die Reflexionsachse oder Reflexionsebene beschreiben).

Auch bei gemischten Sandwich-Produkten wird diese Zuordnung beibehalten. Der mittlere Faktor wird als Operand aufgefasst, auf den die beiden nun unterschiedlichen äußeren Faktoren als Operatoren einwirken.

Zur Identifikation der Operation, die ein gemischtes Sandwich-Produkt durchzuführen vermag, wird zu Beginn der einfache Fall der Wirkung unterschiedlicher Basisvektoren $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ auf einen Vektor des dreidimensionalen Euklidischen Raums **r**

$$\mathbf{r} = x \sigma_x + y \sigma_y + z \sigma_z \quad \{9\}$$

untersucht. Eine linksseitige Multiplikation mit dem Basisvektor σ_x bei gleichzeitiger rechtsseitiger Multiplikation mit dem Basisvektor σ_y

$$\sigma_x \mathbf{r} \sigma_y = y \sigma_x + x \sigma_y - z \sigma_x \sigma_y \sigma_z \quad \{10\}$$

hat ebenso wie die linksseitige Multiplikation mit dem Basisvektor σ_y bei gleichzeitiger rechtsseitiger Multiplikation mit dem Basisvektor σ_x

$$\sigma_y \mathbf{r} \sigma_x = y \sigma_x + x \sigma_y + z \sigma_x \sigma_y \sigma_z \quad \{11\}$$

die Wirkung einer Achsenvertauschung. Die ursprünglich in x -Richtung weisende Koordinate des Vektors \mathbf{r} von Gl. {9} zeigt nun in y -Richtung. Und die ursprünglich in y -Richtung weisende Koordinate zeigt nun in x -Richtung.

Diese Achsenvertauschung ist jedoch mit Nebenwirkungen verbunden. Vektoren, die senkrecht zu den die Achsenvertauschung generierenden Basisvektoren stehen, ändern ihre Dimensionalität. Die z -Koordinate weist nun nicht mehr in z -Richtung, sondern in Richtung des Basis-Volumenelements $\sigma_x \sigma_y \sigma_z$, das zu -1 quadriert. Die z -Achse wurde quasi nebenbei in eine imaginäre Achse transformiert.

Beim Versuch, Lineare Gleichungssysteme mit drei Unbekannten zu lösen, stört diese Änderung der Dimensionalität jedoch nicht wirklich, da es auf das Vorzeichen der zu ermittelten Koordinate ankommt.

Bei Differenzbildung zwischen den Gleichungen {10} und {11} heben sich die x - und y -Terme gegenseitig auf, so dass nur der z -Term überlebt. Diese Strategie funktioniert auch, wenn die drei Richtungsvektoren schräg zueinander stehen und keine Einheitsvektoren darstellen. Dann tritt neben die Achsenvertauschung zusätzlich eine Streckung oder Stauchung, die in üblicher Weise zu berücksichtigen ist.

9. Gemischte Sandwich-Produkte

Das Lineare Gleichungssystem {8} kann als Darstellung des Vektors \mathbf{r} in einem Koordinatensystem gedeutet werden, in dem die Koordinaten schräg zueinander stehen und in Richtung der Koeffizientenvektoren \mathbf{a} , \mathbf{b} und \mathbf{c} weisen.

Zur Ermittlung des Lösungswertes für x werden die beiden Achsen in \mathbf{b} - und \mathbf{c} -Richtung nun durch Bildung der gemischten Sandwich-Produkte vertauscht.

$$\mathbf{brc} = \mathbf{bac}x + b^2cy + c^2bz \quad \{12\}$$

$$\mathbf{crb} = \mathbf{cab}x + b^2cy + c^2bz \quad \{13\}$$

Die Differenzbildung zwischen diesen beiden Gleichungen eliminiert die y - und z -Terme

$$\mathbf{crb} - \mathbf{brc} = (\mathbf{cab} - \mathbf{bac})x \quad \{14\}$$

so dass die Lösungsformel für x lautet:

$$x = \frac{\mathbf{crb} - \mathbf{brc}}{\mathbf{cab} - \mathbf{bac}} \quad \{15\}$$

Analog können die weiteren Lösungswerte durch zyklische Vertauschung ermittelt werden:

$$y = \frac{\mathbf{arc} - \mathbf{cra}}{\mathbf{abc} - \mathbf{cba}} \quad \{16\}$$

$$z = \frac{\mathbf{bra} - \mathbf{arb}}{\mathbf{bca} - \mathbf{acb}} \quad \{17\}$$

Ein Beispiel für die mit einer Streckung verbundene Vertauschung der y - und z -Achsen wird in Abbildung 12 gezeigt. Zu beachten ist bei dieser Darstellung, dass der ursprünglich rein reelle dreidimensionalen Raum, der durch die senkrecht zueinander ste-

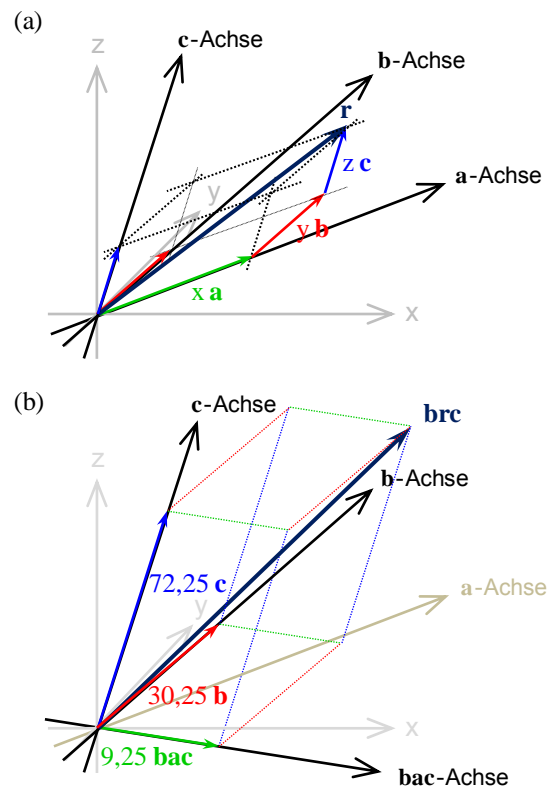


Abb.12: (a) Schematische Darstellung des Linearen Gleichungssystems $\mathbf{r} = 9,25 \mathbf{a} + 4,25 \mathbf{b} + 2,75 \mathbf{c}$ {8} der Reisfelderaufgabe. (b) Schematische Darstellung des achsenvertauschten Linearen Gleichungssystems $\mathbf{brc} = 9,25 \mathbf{bac} + 30,25 \mathbf{b} + 72,25 \mathbf{c}$ {12} der gleichen Aufgabe aus den „Neun Kapiteln“.

x -, y - und z -Achsen oder durch die schräg zueinander stehenden \mathbf{a} -, \mathbf{b} - und \mathbf{c} -Achsen vermessen wird, in einen hyperbolischen vierdimensionalen Raum überführt wird. Dieser wird durch die drei reellen Richtungen der x -, y - und z -Achsen sowie eine senkrecht dazu stehende volumenartige und damit imaginäre Achse in Richtung des Einheits-Volumenelements $\sigma_x \sigma_y \sigma_z$ aufgespannt.

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= 3 \sigma_x + 2 \sigma_y + \sigma_z \\ \mathbf{b} &= 2 \sigma_x + 3 \sigma_y + 2 \sigma_z \\ \mathbf{c} &= \sigma_x + \sigma_y + 3 \sigma_z \\ \mathbf{r} &= 39 \sigma_x + 34 \sigma_y + 26 \sigma_z \\ \mathbf{crb} &= 105 \sigma_x + 311 \sigma_y + 712 \sigma_z + 111 \sigma_x \sigma_y \sigma_z \\ \mathbf{brc} &= 105 \sigma_x + 311 \sigma_y + 712 \sigma_z - 111 \sigma_x \sigma_y \sigma_z \\ &\Rightarrow \mathbf{crb} - \mathbf{brc} = 222 \sigma_x \sigma_y \sigma_z \\ \mathbf{cab} &= -3 \sigma_x + 16 \sigma_y + 47 \sigma_z + 12 \sigma_x \sigma_y \sigma_z \\ \mathbf{bac} &= -3 \sigma_x + 16 \sigma_y + 47 \sigma_z - 12 \sigma_x \sigma_y \sigma_z \\ &\Rightarrow \mathbf{cab} - \mathbf{bac} = 24 \sigma_x \sigma_y \sigma_z \\ x &= \frac{\mathbf{crb} - \mathbf{brc}}{\mathbf{cab} - \mathbf{bac}} = \frac{222 \sigma_x \sigma_y \sigma_z}{24 \sigma_x \sigma_y \sigma_z} = 9,25 \end{aligned}$$

Abb.13: Berechnung des Lösungswertes für x der Reisfelderaufgabe mit Hilfe gemischter Sandwich-Produkte.

Oder aber dieser Raum von Abbildung 12 (b) wird durch die drei schräg zueinander stehenden rein reellen **a**-, **b**- und **c**-Achsen und die komplexe **bac**-Achse aufgespannt gedacht.

Dieser komplexe Charakter der **bac**-Richtung wird auch in der expliziten Rechnung von Abbildung 13 deutlich, da das gemischte Sandwich-Produkt **bac** als Linearkombination eines Vektors und eines Tri-vektors ausgedrückt wird.

Das ist ein erstaunliches und didaktisch gleichzeitig anspornendes Ergebnis. Die Lösung simpler Linearer Gleichungssysteme führt durch die Nutzung gemischter Sandwich-Produkte auf mathematische Strukturen, die zu einem späteren Zeitpunkt bei Diskussion der Speziellen Relativitätstheorie extrem wichtig werden.

Und es ist deshalb auch erlaubt zu sagen: Bereits in unserer klassisch nicht-relativistischen dreidimensionalen Welt verbirgt sich unter einer extrem dünnen reellen Euklidischen Decke die Mathematik der vierdimensionalen Raumzeit.

10. Erfahrungen bei der unterrichtlichen Umsetzung

Gegen Ende des Wintersemesters 2016/2017 standen im Kurs „Mathematics for Business and Economics“ an der HWR Berlin für eine Erprobung der bis zu Abschnitt 9 diskutierten Inhalte zwei Vorlesungsstunden zur Verfügung.

Dies erlaubte zwar lediglich eine relativ kurze, dennoch aber inhaltlich tiefer gehende Diskussion, da die Grundlagen der Geometrischen Algebra mit den

Studierenden bereits zuvor ausführlicher bei der Erörterung von Eigenwerten und Eigenvektoren aus geometrisch-algebraischer Perspektive (siehe den weiteren Beitrag [27] dieser DPG-Frühjahrstagung) erarbeitet wurden.

Ein zentrales Tafelbild dieser Kurz-Erprobung zeigt Abbildung 14. Weder das Vertauschungsverhalten (Vertauschung von Skalaren im Gegensatz zur Vertauschung von Vektoren mit anderen Größen) noch die Multiplikation mit Inversen oder einer der anderen Umrechnungsschritte bereitete konzeptionelle Probleme, so dass die Studierenden aktiv an der Ausarbeitung der einzelnen Umformungsschritte teilnahmen.

Dabei ergab sich für mich als Dozent der Eindruck, dass die Studierenden weit besser mit diesem Ansatz zurechtkamen als mit der einige Wochen zuvor besprochenen Umsetzung der Geometrischen Algebra im Kontext einer Eigenwert-Mathematik. Dies kann mehrere Gründe haben:

- Die Grundlagen der Geometrischen Algebra lagen bereits gefestigt vor.
- Die Eigenwert-Mathematik mit dem Diktum einer „Matrizenrechnung ohne Matrizen“ wurde als sehr abstrakt wahrgenommen. Im Gegensatz dazu wurden Sandwich-Produkte mit der Möglichkeit einer Veranschaulichung durch Reflexionen und Achsenvertauschungen als etwas deutlich Konkretes empfunden.
- Die Einbettung in den historischen Hintergrund der Mathematik Linearer Gleichungssysteme führte zu einer deutlich höheren Motivation.

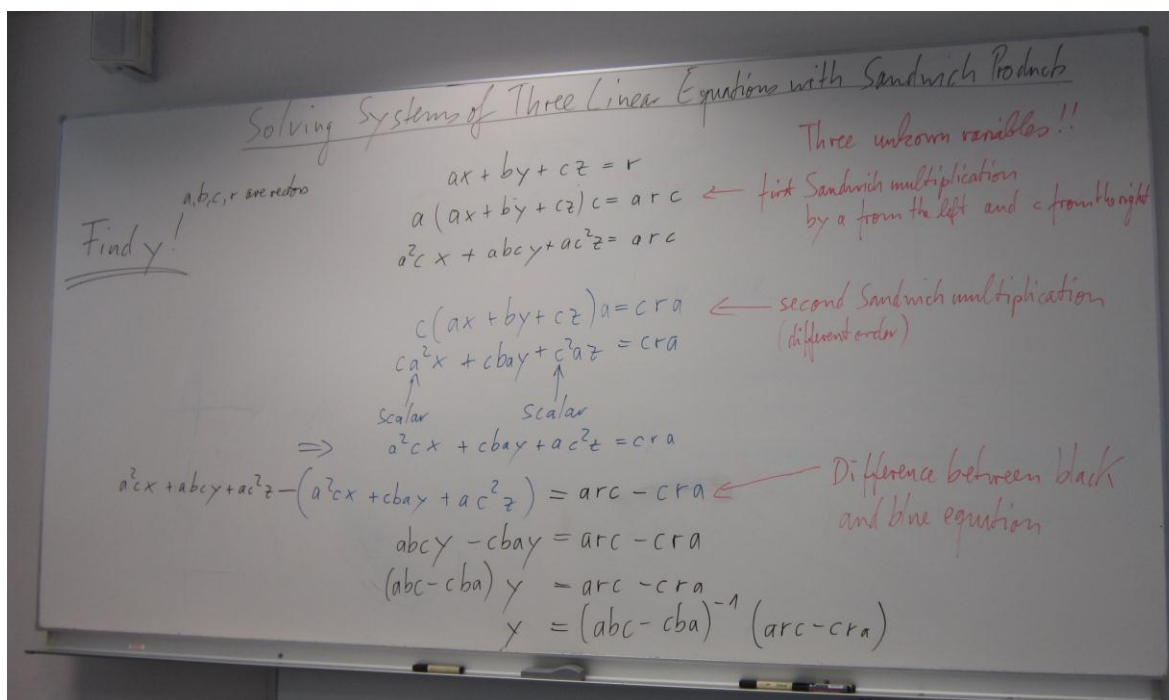


Abb.14: Tafelbild der Herleitung einer Lösungsformel für den y -Wert eines Linearen Gleichungssystems mit drei Unbekannten $\mathbf{r} = \mathbf{a}x + \mathbf{b}y + \mathbf{c}z$ {8} auf Grundlage gemischter Sandwich-Produkte (Vorlesung am 3. Jan. 2017).

Diese historische Einbettung führte auch dazu, den bereits erlernten Lösungsansatz auf Grundlage äußerer Produkte zu hinterfragen, neu zu bewerten und die Fixierung auf den bisher eingepprägten Lösungsansatz auf Grundlage äußerer Produkte zu lockern.

Auch wenn diese Kurz-Erprobung nicht durch eine ausgearbeitete Evaluation begleitet und die langfristige Wirkung dieses Unterrichtsteils nicht erhoben wurde, so kann aufgrund der in der Diskussion sichtbaren Bereitschaft, sich mit diesem Themenbereich tiefer auseinanderzusetzen, davon ausgegangen werden, dass das in Abschnitt 6 formulierte Ziel dieses Vorlesungsteils erreicht wurde.

Neben die Nutzung der äußeren Algebra wurde ein Schema zur Lösung Linearer Gleichungssysteme gesetzt, das sich auf vollständige Geometrische Produkte bezieht und das geometrisch fassbar ist.

In den Vorlesungsfolien, die für diesen Kurs erarbeitet wurden [34] und die von den Studierenden auch als Skript genutzt werden können, finden sich im hinteren Teil ab Seite 64 ergänzende Ausführungen zur Verknüpfung von Achsenvertauschungen und zur Lösung Linearer Gleichungssysteme mit mehr als drei Variablen, die aus Zeitgründen im Kurs nicht besprochen werden können.

In den folgenden Abschnitten werden diese Ergänzungen des Sandwich-Ansatzes vorgestellt, da diese nicht nur auf eine Vertiefung, sondern auch auf eine konzeptionell interessante Ausweitung der Interpretation von Sandwich-Produkten hinauslaufen.

11. Verknüpfung von Achsenvertauschungen

Umgangssprachlich ist die Sache klar: Vertauschen wir ein Objekt A mit einem zweiten Objekt B, so ist dieser Vorgang identisch mit einer Vertauschung des Objektes B mit dem Objekt A. Und darüber hinaus bleiben weitere Objekte C, D, E, etc. unberührt.

In der physikalischen Welt, die wir mit Hilfe der Geometrischen Algebra zu beschreiben (siehe Fußnote⁸) und durch die Einführung von Koordinatenachsen zu vermessen versuchen, ist die Sachlage allerdings anders: Wird die x-Achse mit der y-Achse (siehe Gl. {10}) vertauscht, dann hat das Auswirkungen auf weitere Achsen und das mathematische Ergebnis unterscheidet sich deutlich von einer Vertauschung, bei der die y-Achse mit der x-Achse (siehe Gl. {11}) vertauscht wird.

Noch interessanter wird die Lage, wenn wir nun mehrere Vertauschungen hintereinander ausführen und versuchen, die ursprüngliche Vertauschung rückgängig zu machen.

Vertauschen wir die x-Achse mit der y-Achse {10} und vertauschen wir erneut die x-Achse mit der y-Achse, so erhalten wir den ursprünglichen Zustand:

$$\sigma_x(\sigma_x \mathbf{r} \sigma_y) \sigma_y = x \sigma_x + y \sigma_y + z \sigma_z \quad \{18\}$$

Wird nach einer Vertauschung der x-Achse mit der y-Achse jedoch eine Vertauschung der y-Achse mit

der x-Achse vorgenommen, so ist das Ergebnis ein anderes:

$$\sigma_y(\sigma_x \mathbf{r} \sigma_y) \sigma_x = x \sigma_x + y \sigma_y - z \sigma_z \quad \{19\}$$

Die ursprüngliche z-Achse wurde bei diesem Vorgang in ihrer Richtung umgekehrt. Das Ergebnis entspricht hier – bei senkrecht stehenden Achsen – einer Reflexion an der Ebene in Richtung des Bivektors $\mathbf{N} = \sigma_x \sigma_y$, die nach [29, Gl. {18}] durch

$$-\sigma_x \sigma_y \mathbf{r} (\sigma_x \sigma_y)^{-1} = x \sigma_x + y \sigma_y - z \sigma_z \quad \{20\}$$

modelliert werden kann.

Interessant wird es nun bei Achsenvertauschungen von schräg zueinander stehenden Achsen {8}, wenn diese hintereinander ausgeführt werden.

Wird zuerst die **b**-Achse mit der **c**-Achse {12} und dann wieder die **b**-Achse mit der **c**-Achse vertauscht, so ergibt sich – bis auf den Streckungsfaktor $b^2 c^2$ – der ursprüngliche Vektor:

$$\mathbf{b}(\mathbf{b} \mathbf{r} \mathbf{c}) \mathbf{c} = b^2 c^2 \mathbf{a} x + b^2 c^2 \mathbf{b} y + b^2 c^2 \mathbf{c} z \quad \{21\}$$

bzw.

$$\mathbf{b}(\mathbf{b} \mathbf{r} \mathbf{c}) \mathbf{c} \frac{1}{b^2 c^2} = \mathbf{a} x + \mathbf{b} y + \mathbf{c} z = \mathbf{r} \quad \{22\}$$

Wird zuerst die **b**-Achse mit der **c**-Achse {12} und dann allerdings die **c**-Achse mit der **b**-Achse vertauscht, so ergibt sich ein anderes Resultat für die x-Komponente:

$$\mathbf{c}(\mathbf{b} \mathbf{r} \mathbf{c}) \mathbf{b} = \mathbf{c} \mathbf{b} \mathbf{a} \mathbf{c} x + b^2 c^2 \mathbf{b} y + b^2 c^2 \mathbf{c} z \quad \{23\}$$

Dieses Ergebnis können wir als eine Art verschränkter Achsenvertauschung interpretieren:

$$\mathbf{c} \mathbf{b} \mathbf{r} \mathbf{c} \mathbf{b} \frac{1}{b^2 c^2} = \mathbf{c} \mathbf{b} \mathbf{a} \mathbf{c} \mathbf{b} \frac{1}{b^2 c^2} x + \mathbf{b} y + \mathbf{c} z \quad \{24\}$$

Bei schräg zueinander stehenden Achsen entspricht dies keiner bekannten Reflexion – was uns jedoch nicht hindern muss, Gleichung {23} in Form von $\mathbf{c}(\mathbf{b} \mathbf{r} \mathbf{c}) \mathbf{b} = (\mathbf{c} \mathbf{b}) \mathbf{r} (\mathbf{c} \mathbf{b})$ als eine Reflexion an einem Objekt in Richtung des orientierten Parallelogramms $\mathbf{c} \mathbf{b}$ zu deuten. Diese konzeptionell vielleicht etwas übermutig als „Reflexion an einem Parallelogramm“ bezeichnete Transformation lautet dann:

$$-\mathbf{c} \mathbf{b} \mathbf{r} (\mathbf{c} \mathbf{b})^{-1} = -\mathbf{c} \mathbf{b} \mathbf{a} (\mathbf{c} \mathbf{b})^{-1} x - b^2 c^2 \mathbf{b} (\mathbf{c} \mathbf{b})^{-2} y - b^2 c^2 \mathbf{c} (\mathbf{c} \mathbf{b})^{-2} z \quad \{25\}$$

Zur alternativen Lösung eines Linearen Gleichungssystems ist es jedoch sinnvoll, Gleichung {22} mit der entsprechenden Deutung als verschränkte Achsenvertauschung heranzuziehen, da dann die y- und z-Terme durch Differenzbildung mit Gleichung {8} wie bisher eliminiert werden können.

Durch zyklische Vertauschung können dann die weiteren Lösungsformeln ermittelt werden. Sie lauten:

$$x = \frac{\mathbf{r} - \frac{\mathbf{c} \mathbf{b} \mathbf{r} \mathbf{c} \mathbf{b}}{c^2 b^2}}{\mathbf{a} - \frac{\mathbf{c} \mathbf{b} \mathbf{a} \mathbf{c} \mathbf{b}}{c^2 b^2}} \quad \{26\}$$

$$y = \frac{\mathbf{r} - \frac{\mathbf{a} \mathbf{c} \mathbf{r} \mathbf{a} \mathbf{c}}{c^2 b^2}}{\mathbf{a} - \frac{\mathbf{a} \mathbf{c} \mathbf{b} \mathbf{a} \mathbf{c}}{c^2 b^2}} \quad \{27\}$$

$$z = \frac{\mathbf{r} - \frac{\mathbf{b} \mathbf{a} \mathbf{r} \mathbf{b} \mathbf{a}}{c^2 b^2}}{\mathbf{a} - \frac{\mathbf{b} \mathbf{a} \mathbf{c} \mathbf{b} \mathbf{a}}{c^2 b^2}} \quad \{28\}$$

Eine Beispiellösung für den x-Wert wird in der folgenden Abbildung 15 an Hand der Reisfelderaufgabe vorgestellt.

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= 3 \sigma_x + 2 \sigma_y + \sigma_z & a^2 &= 14 \\ \mathbf{b} &= 2 \sigma_x + 3 \sigma_y + 2 \sigma_z & b^2 &= 17 \\ \mathbf{c} &= \sigma_x + \sigma_y + 3 \sigma_z & c^2 &= 11 \\ \mathbf{r} &= 39 \sigma_x + 34 \sigma_y + 26 \sigma_z \\ \mathbf{r}_{\text{vert}} &= \mathbf{c} \mathbf{b} \mathbf{r} \mathbf{c} \mathbf{b} \frac{1}{b^2 c^2} \\ &= \frac{5739}{187} \sigma_x + \frac{7246}{187} \sigma_y + \frac{5084}{187} \sigma_z - \frac{2442}{187} \sigma_x \sigma_y \sigma_z \\ \mathbf{a}_{\text{vert}} &= \mathbf{c} \mathbf{b} \mathbf{a} \mathbf{c} \mathbf{b} \frac{1}{b^2 c^2} \\ &= \frac{393}{187} \sigma_x + \frac{470}{187} \sigma_y + \frac{211}{187} \sigma_z - \frac{264}{187} \sigma_x \sigma_y \sigma_z \\ x &= \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\text{vert}}}{\mathbf{a} - \mathbf{a}_{\text{vert}}} \\ &= \frac{1554 \sigma_x - 888 \sigma_y - 222 \sigma_z + 2442 \sigma_x \sigma_y \sigma_z}{168 \sigma_x - 96 \sigma_y - 24 \sigma_z + 264 \sigma_x \sigma_y \sigma_z} \\ &= 9,25 \end{aligned}$$

Abb.15: Berechnung des Lösungswertes für x der Reisfelderaufgabe durch Hintereinanderausführung verschränkter Achsenvertauschungen der **b**- und **c**-Achse.

12. Zur Philosophie von Sandwich-Produkten

Wie zuvor bereits beschrieben lassen sich gemischte Sandwich-Produkte in der Geometrischen Algebra als Achsenvertauschung deuten, wenn ein Vektor **r** {8} oder {9} transformiert wird.

Die Tragweite des Sandwich-Ansatzes wird jedoch dann deutlich, wenn anstelle eines eindimensionalen Vektors ein Multivektor **M**

$$\mathbf{M} = k \mathbf{1} + x \sigma_x + y \sigma_y + z \sigma_z + A_{xy} \sigma_x \sigma_y + A_{yz} \sigma_y \sigma_z + A_{zx} \sigma_z \sigma_x + V \sigma_x \sigma_y \sigma_z \quad \{29\}$$

einer Sandwich-Transformation unterworfen wird. Dann wird ersichtlich, dass auch jedes einfache Produkt der Geometrischen Algebra bzw. Clifford-Algebra, das aus lediglich zwei Faktoren besteht, als Sandwich-Produkt gedeutet werden kann, indem als dritter (fehlender) Faktor ein Basis-Skalar **1** als neutrales Element der Multiplikation (siehe Gl. {30} oder {31}) gesetzt wird.

Jedes Produkt aus zwei Faktoren kann in der Geometrischen Algebra auch als Sandwich-Produkt interpretiert werden.

Abb.16: Philosophische Weitung des Sandwich-Ansatzes in der Geometrischen Algebra.

Rechtsseitige Post-Multiplikation mit **1**:

$$\begin{aligned} \sigma_x \mathbf{M} \mathbf{1} &= \sigma_x \mathbf{M} \mathbf{1} \quad \{30\} \\ &= x \mathbf{1} + k \sigma_x + A_{xy} \sigma_y - A_{zx} \sigma_z + y \sigma_x \sigma_y \\ &\quad + V \sigma_y \sigma_z - z \sigma_z \sigma_x + A_{yz} \sigma_x \sigma_y \sigma_z \end{aligned}$$

Linksseitige Prä-Multiplikation mit **1**:

$$\begin{aligned} \mathbf{1} \mathbf{M} \sigma_x &= \mathbf{1} \mathbf{M} \sigma_x \quad \{31\} \\ &= x \mathbf{1} + k \sigma_x - A_{xy} \sigma_y + A_{zx} \sigma_z - y \sigma_x \sigma_y \\ &\quad + V \sigma_y \sigma_z + z \sigma_z \sigma_x + A_{yz} \sigma_x \sigma_y \sigma_z \end{aligned}$$

Jetzt vertauschen die acht Basis-Elemente, die als Basis-Richtungen des Multivektors **M** {29} angesehen werden können, in der in Abbildung 17 dargestellten Weise miteinander. Insbesondere vertauschen in den Gleichungen {30} und {31} die dimensionslose Richtung der skalaren Achse mit der vektorialen Richtung der σ_x -Achse.

$\sigma_x \mathbf{M} \mathbf{1}$	$\mathbf{1} \mathbf{M} \sigma_x$
$\mathbf{1} \leftrightarrow \sigma_x$	$\mathbf{1} \leftrightarrow \sigma_x$
$\sigma_y \leftrightarrow \sigma_x \sigma_y$	$\sigma_y \leftrightarrow -\sigma_x \sigma_y$
$\sigma_z \leftrightarrow -\sigma_z \sigma_x$	$\sigma_z \leftrightarrow \sigma_z \sigma_x$
$\sigma_y \sigma_z \leftrightarrow \sigma_x \sigma_y \sigma_z$	$\sigma_y \sigma_z \leftrightarrow -\sigma_x \sigma_y \sigma_z$

Abb.17: Richtungsvertauschungen der zwei einfachen Produkte {29} und {30}.

In dieser Sichtweise ist eine Reflexion an der x-Achse $\sigma_x \mathbf{M} \sigma_x$ nichts anderes als eine Vertauschung der σ_x -Achse mit der skalaren Achse $\sigma_x \mathbf{M} \mathbf{1}$, die von einer Vertauschung der skalaren Achse mit der σ_x -Achse $\mathbf{1} (\sigma_x \mathbf{M} \mathbf{1}) \sigma_x$ gefolgt wird.

In ähnlicher Art und Weise können Reflexionen an dreidimensionalen Räumen, fünf- oder anderen ungeradzahligem Hyperräumen [29, Abschnitt 5] als zweifach verschränkte Vertauschung dieser Räume bzw. Hyperräume mit der skalaren Achse gedeutet werden.

Konzeptionell frappierend sind in dieser Deutung die mit den Vertauschungen verbundenen Änderungen der Dimensionalität. So wird in {30} bzw. {31} aus einer skalaren Komponente eine vektorielle, aus den vektorialen Komponenten werden entweder bivectoriell flächenartige oder skalarwertig dimensionslose Komponenten. Und aus den bivectorialen Komponenten werden vektorielle oder aber trivectoriell volumenartige Komponenten.

13. Höherdimensionale Lineare Gleichungssysteme und didaktische Brücken

Konsistente Lineare Gleichungssysteme mit mehr als drei Unbekannten, die dann auch aus mehr als drei Linearen Gleichungen bestehen, können ebenfalls mit Hilfe von Sandwich-Produkten gelöst werden.

Dabei lässt sich die Anzahl der Unbekannten schrittweise um jeweils zwei Unbekannte reduzieren, wenn die entsprechenden Koeffizienten dieser Unbekannten rechts- und linksseitig in Form gemischter Sandwich-Produkte anmultipliziert werden.

Am Beispiel von fünf Unbekannten wird dies im beigefügten Skript der Vorlesungsfolien [34, S. 68–77] gezeigt. Dabei wird allerdings auch deutlich, dass diese Lösungsstrategie bei einer höheren Anzahl an Unbekannten relativ unübersichtlich und langwierig platzraubend wird.

Es ist somit sinnvoll, diesen Ansatz zwar aus didaktischen Gründen zu thematisieren, ergänzend jedoch darauf hinzuweisen, dass bei höherdimensionalen Linearen Gleichungssystemen die Nutzung äußerer Produkte konzeptionell weit einfacher zu bewerkstelligen sein wird.

Wie also sieht der didaktisch tragfähigste Weg zu einer Mathematik höherdimensionaler Linearer Gleichungssysteme aus? Eine sichere Antwort auf diese Frage kann derzeit noch nicht gegeben werden, denn eine sichere und gefestigte Mathematik höherdimensionaler Gleichungssysteme existiert derzeit noch nicht: „I think we are still lacking a good understanding of which kind of methods we should use in relation (...) to problems depending on a medium sized number of variables. We have the machinery for a small number of variables and we have probability for a large number of variables. But we don't even know which questions to ask, much less which methods to use, when we have ten variables or twenty variables“ [32, S. 33].

Die eben zitierten Ausführungen des Abel-Preisträgers Lennart Carleson deuten darauf hin, dass die fachliche und die didaktische Brücke, die vom Lösungsverhalten Linearer Gleichungssysteme mit einer höheren Anzahl an Unbekannten zum Lösungsverhalten von Gleichungssystemen höherer Ordnung mit einer höheren Anzahl an Unbekannten heute noch nicht gebaut werden kann. Es ist schlichtweg noch nicht klar, wo diese Brücke oder diese Brücken einmal hinführen werden.

Und aus diesem Gründen ist auch noch nicht klar, wo genau und wo am besten die Ausgangspunkte zum Brückenbau gelegt werden sollten. Es ist aber sicher sinnvoll, eine Vielzahl an möglichen Startpunkten im Auge zu behalten – die Mathematik der Geometrischen Algebra und die Mathematik von Sandwich-Produkten gehören mit dazu. Sie könnten in ferner Zukunft Ausgangspunkte einer Mathematik sein, die die von Carleson gestellten Fragen löst.

14. Literatur

- [1] Burton, David M. (2011): *The History of Mathematics. An Introduction*. 7. Auflage. New York: McGraw-Hill.
- [2] Horn, Martin Erik (1994): *Das Lösen quadratischer Gleichungen nach der Methode der Babylonier*. Eine Unterrichtsreihe im Fach Mathematik in einer 9. Klasse des Gymnasiums. Schwerpunkt: Der Vergleich graphischer und algebraischer Zugänge zum Lösungsweg. Examensarbeit für die Zweite Staatsprüfung für das Amt des Studienrates, angefertigt am 6. SPS (S) Tempelhof, Berlin.
- [3] Grcar, Joseph Frank (2011): *Mathematicians of Gaussian Elimination*. In: *Notices of the American Mathematical Society*, Vol. 58, No. 6, June/July 2011, S. 782–792.
- [4] Grcar, Joseph Frank (2011): *How Ordinary Elimination Became Gaussian Elimination*. In: *Historia Mathematica*, Vol. 38, No. 2, S. 163–218.
- [5] Horn, Martin Erik (2017): *Über die Kunst, Lineare Gleichungssysteme auf eine etwas andere Art zu lösen*. Zur Veröffentlichung vorgesehen in: *BzMU – Beiträge zum Mathematikunterricht 2017*. Münster: WTM-Verlag.
- [6] Ifrah, Georges (1991): *Universalgeschichte der Zahlen*. Sonderausgabe, 2. Auflage, Frankfurt/Main, New York: Campus-Verlag.
- [7] Hodgkin, Luke (2005): *A History of Mathematics. From Mesopotamia to Modernity*. Oxford, New York: Oxford University Press.
- [8] Wußing, Hans (2008): *6000 Jahre Mathematik. Eine kulturgeschichtliche Zeitreise – 1. Von den Anfängen bis Leibniz und Newton*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag.
- [9] Kramer, Noah Samuel (1963): *The Sumerians. Their History, Culture and Character*. Chicago, London: The University of Chicago Press.
- [10] Derbyshire, John (2006): *Unknown Quantity – A Real and Imaginary History of Algebra*. Washington, DC: Joseph Henry Press.
- [11] Gericke, Helmuth (1992): *Mathematik in Antike und Orient / Mathematik im Abendland*. Sonderausgabe in einem Band. Wiesbaden: Fourier-Verlag.
- [12] Hertel, Ingolf; Großmann, Siegfried (Koord.) (2016): *Physik in der Schule – Hauptteil*. Eine Studie der Deutschen Physikalischen Gesellschaft. Bad Honnef: DPG.
- [13] Smith, David Eugene; Mikami, Yoshio (1914): *A History of Japanese Mathematics*. Chicago: The Open Court Publishing Company.
- [14] Grassmann, Hermann (1844): *Die Wissenschaft der extensiven Größe oder die Ausdehnungslehre, eine neue mathematische Disciplin*. Erster Theil, die lineale Ausdehnungslehre enthaltend. Leipzig: Verlag von Otto Wigand.
- [15] Sarton, George (1944): *Grassmann – 1844*. In: *Isis*, Vol. 35, No. 4, S. 326–330.

- [16] Cartan, Élie (1981): *The Theory of Spinors*. Unabridged republication of the complete English translation first published in 1966. New York: Dover Publications.
- [17] Gull, Stephan; Lasenby, Anthony; Doran, Chris (1993): *Imaginary Numbers are not Real – The Geometric Algebra of Spacetime*. In: *Foundations of Physics*, Vol. 23, No. 9, S. 1175–1201.
- [18] Horn, Martin Erik (2015): *Lineare Algebra in physikdidaktischer Ausprägung*. In: *PhyDid B, Didaktik der Physik, Beiträge zur DPG-Frühjahrstagung des Fachverbands Didaktik der Physik in Wuppertal 2015*, URL [17.12.2015]: www.phydid.de/index.php/phydid-b/article/view/626.
- [19] Horn, Martin Erik (2015): *Ein physikdidaktischer Blick auf die Lineare Algebra*. In: Franco Caluori, Helmut Linneweber-Lammerskitten, Christine Streit (Hrsg.): *BzMU – Beiträge zum Mathematikunterricht 2015, Band 1*, S. 408–411, Münster: WTM-Verlag.
- [20] Horn, Martin Erik (2016): *Moderne Lineare Algebra im wirtschaftsmathematischen Kontext*. In: Walther Paravicini, Jörn Schnieder (Hrsg.): *Hanse-Kolloquium zur Hochschuldidaktik der Mathematik 2015. Beiträge zum gleichnamigen Kolloquium an der Universität zu Lübeck*, S. 103–129. Münster: WTM-Verlag.
- [21] Peirce, Charles Sanders (1877): *Note on Grassmann's Calculus of Extension*. In: *Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences*, Vol. 13 (gelesen am 10. Okt. 1877), S. 115–116.
- [22] Arnold, Vladimir Igorevich (1998): *On Teaching Mathematics*. *Uspekhi Mat. Nauk*, No. 1 (319), Vol. 53, S. 229–234, siehe auch URL [25.03.2016]: <http://pauli.uni-muenster.de/~munsteg/arnold.html>.
- [23] Sobczyk, Garret (1993): *David Hestenes – The Early Years*. In: *Foundations of Physics*, Vol. 23, No. 10, S. 1291–1293.
- [24] Hestenes, David (2003): *Oersted Medal Lecture 2002: Reforming the Mathematical Language of Physics*. In: *American Journal of Physics*, Vol. 71, No. 2, S. 104–121.
- [25] Hestenes, David (1992): *Mathematical Viruses*. In: A. Micali, R. Boudet, J. Helmstetter (Hrsg.): *Clifford Algebras and their Applications in Mathematical Physics*, S. 3–16. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- [26] Horn, Martin Erik (2016): *Physikdidaktische Interpretation des Gaußschen Algorithmus*. In: *PhyDid B, Didaktik der Physik, Beiträge zur DPG-Frühjahrstagung des Fachverbands Didaktik der Physik in Hannover 2016*. URL [17.12.2016]: www.phydid.de/index.php/phydid-b/article/view/727.
- [27] Horn, Martin Erik (2017): *Eigenwerte und Eigenvektoren aus geometrisch-algebraischer Perspektive*. Zur Veröffentlichung vorgesehen in: *PhyDid B, Didaktik der Physik, Beiträge zur DPG-Frühjahrstagung des Fachverbands Didaktik der Physik in Dresden 2017*.
- [28] Dorst, Leo; Fontijne, Daniel; Mann, Stephen (2007): *Geometric Algebra for Computer Science. An Object-oriented Approach to Geometry*. Amsterdam, San Francisco: Morgan Kaufman Publishers/Elsevier.
- [29] Horn, Martin Erik (2015): *Sandwich Products and Reflections*. In: *PhyDid B, Didaktik der Physik, Beiträge zur DPG-Frühjahrstagung des Fachverbands Didaktik der Physik in Wuppertal 2015*, URL [17.12.2015]: www.phydid.de/index.php/phydid-b/article/view/642.
- [30] Hildenbrand, Dietmar (2013): *Foundations of Geometric Algebra Computing*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag.
- [31] Horn, Martin Erik (2017): *Lösung einer Aufgabe zu Linearen Gleichungssystemen aus der Han-Dynastie mit GAALOP als Taschenrechner-Ersatz*. Zur Veröffentlichung vorgesehen in: *BzMU – Beiträge zum Mathematikunterricht 2017*. Münster: WTM-Verlag.
- [32] Raussen, Martin; Skau, Christian (2006): *Interview with Abel Prize Recipient Lennart Carleson*. In: *Newsletter of the European Mathematical Society*, No. 61 (Sept. 2006), S. 31–36.

Dem Beitrag beigefügte Dateien

- [33] Horn, Martin Erik (2017): *Poster DD 02.17, „Zur Lösung Linearer Gleichungssysteme mit Hilfe gemischter Sandwich-Produkte“ vom 20. März 2017, siehe auch: Verhandl. DPG (VI) 52, 2 (2017), Url [01.03.2017]: www.dpg-verhandlungen.de/year/2017/conference/dresden/part/dd/session/2/contribution/17*.
- [34] Horn, Martin Erik (2017): *Modern Linear Algebra. A Geometric Algebra Crash Course. Part VI: Solving Systems of Linear Equations with Sandwich Products*. OHP-Folien des Kurses „Mathematics for Business and Economics“ (Stand: 21. Jan. 2017), LV-Nr. 200 691.01, Hochschule für Wirtschaft und Recht Berlin / Berlin School of Economics and Law, Wintersemester 2016/2017.

