

## Schülerinnen und Schüler entdecken Gravitationswellen mithilfe von Computereperimenten

Hans-Otto Carmesin<sup>1,2,3</sup>

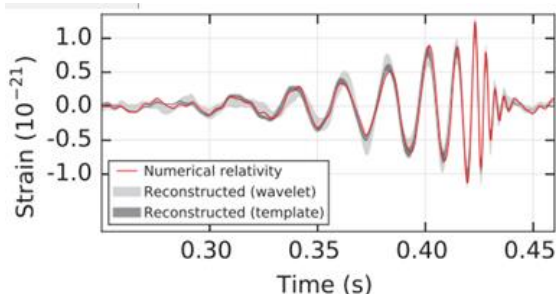
<sup>1</sup>Studienseminar Stade, Bahnhofstr. 5, 21682 Stade, <sup>2</sup>Gymnasium Athenaeum, Harsefelder Str. 40, 21680 Stade, <sup>3</sup>Universität Bremen, 28334 Bremen  
Hans-Otto.Carmesin@t-online.de

### Kurzfassung

Die aktuelle Entdeckung der Gravitationswellen ist eine für Schülerinnen und Schüler spannende Gelegenheit, etwas über Einsteins Theorie der Dehnung der Raumzeit zu erfahren. Mit Modellversuchen, Computereperimenten, kognitiven Konflikten und Modellbildungen erschließen sich die Lernenden schrittweise das Thema. Ausgehend von ihren Kenntnissen entdecken sie, warum die Raumzeit gedehnt wird, warum beschleunigte Massen Gravitationswellen aussenden, wie man die dabei wichtigen Formeln gewinnt und für Computereperimente nutzt. Mit diesen Computereperimenten bilden die Lernenden das gemessene Gravitationswellensignal nach und überprüfen so ihre durch eigenständige Aktivität entwickelte Theorie selbstkritisch.

### 1. Einleitung

Die aktuelle Entdeckung der Gravitationswellen (Abbott u. a. 2016) bietet eine gute Gelegenheit für naturwissenschaftliche Bildung (Humboldt 1792). Denn die Schülerinnen und Schüler können ihre kognitiven Fähigkeiten entwickeln, indem sie diese Entdeckung mit Computereperimenten nachbilden. Hier wird über einen Unterrichtsversuch in einer Arbeitsgemeinschaft für Astronomie der Klassenstufen fünf bis zwölf berichtet.



**Abb.1:** Gemessenes Gravitationswellensignal, GW150914 (Abbott u. a. 2016): Die Lernenden bilden dieses Signal nach und überprüfen so ihre Ergebnisse.

#### 1.1. Ziele

Es werden drei Ziele verfolgt, ein fachliches, ein fachdidaktisches und ein methodisches.

Das fachliche Ziel besteht darin, das gemessene Gravitationswellensignal mit Modellexperimenten zu erklären und mit Computereperimenten nachzubilden, wobei die dazu notwendigen Gleichungen im Rahmen der Schulphysik hergeleitet werden. Dabei leiten die Lernenden Einsteins Quadrupolformel (Einstein 1916) in einer auf die wesentliche Dimension reduzierten Form her.

Das fachdidaktische Ziel besteht darin, an die Vorkenntnisse anzuknüpfen und dadurch eine sehr hohe Lernwirksamkeit zu erreichen, die nach Hattie den

besonders hohen Betrag von 1,48 annimmt (Hattie 2009).

Um die Ziele zu erreichen, müssen die Lernenden einige Konzeptwechsel durchführen (Kircher u. a. 2001). Dabei besteht das methodische Ziel darin, dass die Schülerinnen und Schüler die Unzulänglichkeit des jeweiligen Basiskonzepts durch einen jeweils passenden kognitiven Konflikt einsehen, weil hierbei eine hohe gedankliche Aktivität verbunden ist (Cohen 2014). Daraufhin sollen sie das neue Konzept entwickeln oder das neue Modell bilden. Zudem sollen sie die neuen Konzepte durch Vergleiche mit Beobachtungen überprüfen, um die Lernwirksamkeit weiter zu steigern (Hattie 2009).



**Abb.2:** Modellversuch zur Dehnung.

#### 1.2. Aufwand und Motivation

Die Unterrichtseinheit umfasst 6 bis 12 Doppelstunden sowie zwei Referate und ist binnendifferenzierend aufgebaut. Dieser Aufwand wird dadurch motiviert, dass von der Masse und Energie im Weltall mit elektromagnetischen Wellen nur 4 %, dagegen mithilfe von Gravitation im Prinzip 100% erfasst werden können (s. z. B. Carmesin 2014).

#### 2. Entdeckung

Die Gravitationswellen wurden anhand ihrer Raumdehnung oder ihrem Strain erfasst (Abb. 1). Dieser Betrag bei der Erde ungefähr:

$$\varepsilon = \Delta L/L \approx 10^{-21} \quad \{1\}$$

Die Raumdehnung bildeten die Lernenden mithilfe eines Modellversuchs zur Dehnung nach (Abb. 2).

### 3. Basiskonzept Schwerkraft

Um die bei Gravitationswellen beobachtete Dehnung nachzubilden, gingen die Lernenden von ihrem Basiskonzept zur Schwerkraft aus. Dazu wiederholten wir die Schwerkraft am Erdboden und verdichteten unsere Kenntnisse in der Gleichung:

$$F = m \cdot g \quad \{2\}$$

Dabei ist die Gravitationsfeldstärke  $g = F/m = 9,81 \text{ N/kg}$  am Erdboden. Diesen Fall verallgemeinerten wir zum Newton'schen Gravitationsgesetz (Newton 1687) und verdichteten dies mit folgender Gleichung:

$$F = m \cdot M \cdot G/r^2 \quad \{3\}$$

Dabei ist die Gravitationskonstante  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$ . Hierzu entwickelten wir folgende Terme zur Energie  $E$  und zum Gravitationspotential  $\varphi$ :

$$E = -m \cdot M \cdot G/r \quad \{4\}$$

$$\varphi = E/m = -M \cdot G/r \quad \{5\}$$

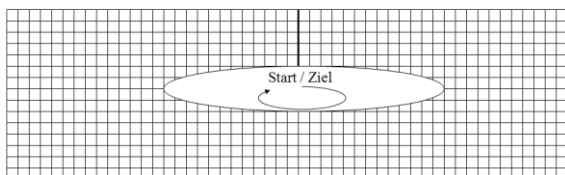


Abb.3: Formel 1- Spiel: Spielfeld.

### 4. Basiskonzept Newton'sche Axiome

Mithilfe eines Formel 1-Spiels wurde das Zustandekommen einer Bewegung durch Beschleunigung und Geschwindigkeit für die Fortgeschrittenen wiederholt und für die jüngeren spielerisch eingeführt: Die Spielregel lautet wie folgt:

Anzahl der Spieler: 2-6

Spielplan: Erlaubte Plätze sind die Kreuzungspunkte des Karopapiers (s. Abb. 3). Erreicht ein Auto in seinem Zug keinen erlaubten Platz, so scheidet es aus. Stehen mehrere Autos am Ende eines Zuges auf dem gleichen Platz, so scheidet sie aus.

Zugreihenfolge: Der jüngste Spieler beginnt, die übrigen ziehen im Uhrzeigersinn. In dieser Reihenfolge wählt jeder einen Platz auf der Startlinie und markiert sein Auto mit einem Kreuz.

Zug:

- Zeichne am Ende deines Zuges vom vorherigen Platz zum neuen Platz deinen Geschwindigkeitspfeil (s. Abb. 4).
- Ziehe vom aktuellen Platz den Geschwindigkeitspfeil weiter. Bleibe dort oder ziehe zu einem der 8 benachbarten Plätze.

Gewinner: Gewinner ist, wer als erster das Oval im Uhrzeigersinn umfahren und die Ziellinie erreicht hat.

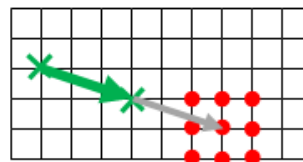


Abb.4: Formel 1- Spiel: Konstruktion eines Zuges.

Die Spielzüge werden wie folgt physikalisch gedeutet: Ein Spielzug modelliert  $\Delta t = 1 \text{ s}$ . Ein Kästchen stellt waagrecht die Strecke  $\Delta x = 10 \text{ m}$ , die Geschwindigkeit  $v_x = \Delta x/\Delta t = 10 \text{ m/s}$  und die Beschleunigung  $a_x = 10 \text{ m/s}^2$  dar. Bei jedem Zug entscheidet sich der Spieler, ob er beschleunigt, lenkt oder bremst, indem er für  $a_x$  und  $a_y$  0 oder  $10 \text{ m/s}$  oder  $-10 \text{ m/s}$  wählt, also 0 oder ein Kästchen. Nach der Grundgleichung der Mechanik ist  $\Delta v_x = a_x \cdot \Delta t = 10 \text{ m/s}$  oder ein Kästchen. Zudem ergibt sich entsprechend der Newton'schen Mechanik die Verschiebung  $\Delta x = v_x \cdot \Delta t$ . Für die senkrechte Richtung geht entsprechendes. Die Beschleunigung  $a$  einer Masse  $m$  kommt gemäß der Grundgleichung der Mechanik,  $F = m \cdot a$ , als Folge einer Kraft  $F$  zustande.

Das Spiel hat keine besonderen Lernvoraussetzungen, ist kompetenzfördernd und motivierend. Ein Durchgang dauert etwa 45 min. Die Lernenden entdeckten beim Spielen die Bedeutung der Geschwindigkeit für Bremswege und Kurvenradien. Um die nötige Progression sanft und vernetzend zu gestalten, wurde das Spiel weiter verwendet und lediglich um die Erdbeschleunigung erweitert (s. Gl. {2}).

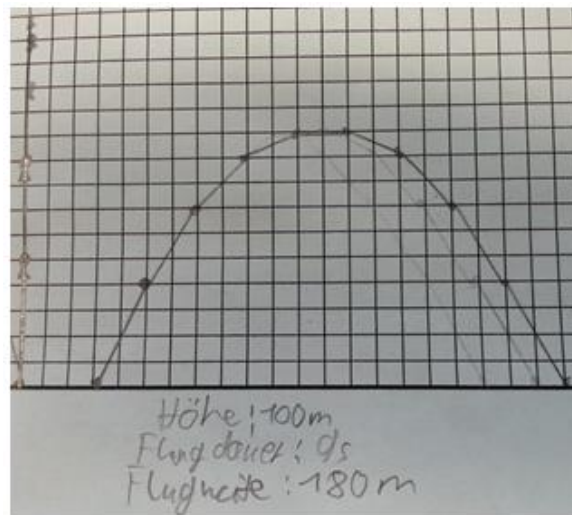


Abb.5: Wurfspiel: Spieler entdecken die Wurfparabel.

### 5. Basiskonzept Wurfparabel

Das Formel 1-Spiel wurde wie folgt zu einem Korbballspiel abgewandelt:

Spielplan: Ein waagerechte Boden und ein Start- sowie ein Zielpunkt werden festgelegt (s. Abb. 5).

Zugreihenfolge: Der jüngste Spieler beginnt, die übrigen ziehen im Uhrzeigersinn. Jeder Spieler nennt seinen anfänglichen Geschwindigkeitspfeil.

Zug:

- Zeichne am Ende deines Zuges vom vorherigen Platz zum neuen Platz deinen Geschwindigkeitspfeil (s. Abb. 4).
- Ziehe vom aktuellen Platz den Geschwindigkeitspfeil weiter und ziehe zum Platz direkt darunter.

**Gewinner:** Gewinner ist, wer mit der geringsten Entfernung zum Zielpunkt den Boden trifft.

Die Spielzüge werden wie folgt physikalisch gedeutet: Ein Spielzug modelliert zusätzlich die Erdbeschleunigung von  $a_y = -10 \text{ m/s}^2$ . Keine weitere Beschleunigung ist zulässig.

Das Wurfspiel baut auf dem Formel 1-Spiel sowie auf der Erdbeschleunigung (s. Gl. {2}) auf und hat sonst keine besonderen Lernvoraussetzungen, ist kompetenzfördernd und motivierend und dauert etwa 45 min. Die Lernenden entdeckten beim Spielen die Wurfparabel sowie die Bedeutung der Anfangsgeschwindigkeit für die Wurfhöhe und -weite. Zudem erstellten die Lernenden Tabellenkalkulationen, welche die Bahnen erzeugen können. So entwickelten schon Fünftklässler die Kompetenz zu physikalischen Computerexperimenten. Darauf aufbauend wurde die konstante Schwerkraft nach Gl. {2} durch die abstandsabhängige Schwerkraft nach Gl. {3} ersetzt.

### 6. Basiskonzept Bewegung bei Newton'scher Gravitation

Die Lernenden setzten in der Tabellenkalkulation zum Wurfspiel für die konstante Gravitationskraft nach Gl. {2} die Newton'sche Gravitationskraft nach Gl. {3} ein und erkundeten die Wurfhöhe abhängig von der Abwurfgeschwindigkeit.

#### 6.1. Entdeckung der Fluchtgeschwindigkeit

Dabei fanden sie heraus, dass der Ball ab einer Geschwindigkeit von 11,2 km/s nicht mehr zurückfällt. Diese Geschwindigkeit wurde als Fluchtgeschwindigkeit bezeichnet und von den Älteren alternativ hergeleitet: Die Fluchtgeschwindigkeit wird erreicht, wenn die Bewegungsenergie gleich der Gravitationsenergie ist (s. Gl. {4}):

$$E_{\text{Grav}} = E_{\text{kin}} \quad | \text{ einsetzen}$$

$$m \cdot M \cdot G / r = \frac{1}{2} m \cdot v^2 \quad | \text{ auflösen}$$

$$v^2 = 2 \cdot M \cdot G / r \quad \{6\}$$

#### 6.2. Basiskonzept Lichtgeschwindigkeit

Die Lernenden kannten von der Bearbeitung anderer Themen bereits die Lichtgeschwindigkeit von  $c = 300\,000 \text{ km/s}$ . Sie folgerten daraus, dass ab einer bestimmten Masse oder ab einem bestimmten Radius auch Licht den Himmelskörper nicht mehr verlassen kann. Ein solcher Himmelskörper wurde als schwarzes Loch bezeichnet und Beispiele wurden genannt. Das Konzept wurde 1784 von Mitchell entdeckt (Harrison 1990).

Der entsprechende Radius  $R_S$  wurde Schwarzschildradius genannt und eine Formel wurde herge-

leitet, indem in Gl. {6} für  $v$  die Lichtgeschwindigkeit  $c$  eingesetzt sowie aufgelöst wurde:

$$R_S = 2M \cdot G / c^2 \quad \{7\}$$



**Abb.6:** Schwarzes Loch: Aufsteigende Masse kann langsamer werden und umkehren, Licht nicht.

### 6.3. Kognitiver Konflikt

Die Lernenden wussten von der Bearbeitung eines früheren Themas, dass die Lichtgeschwindigkeit eine Naturkonstante darstellt, die für jeden Beobachter oder in jedem Bezugssystem den gleichen Betrag hat (Michelson und Morley 1883; Carmesin 2006). Sie folgerten, dass senkrecht nach oben ausgesendetes Licht sich also immer weiter mit Lichtgeschwindigkeit nach oben bewegt, aber dennoch nicht den Himmelskörper verlässt und beispielsweise ein in der Nähe fliegendes Raumschiff erreicht (s. Abb. 6). Sie folgerten somit, dass das Basiskonzept einer massenunabhängigen endlichen raumzeitlichen Entfernung vom Himmelskörper zum Raumschiff nicht stimmen kann, denn sonst müsste das Licht nach endlicher Zeit das Raumschiff erreichen.

### 6.4. Neues Konzept der Raumdehnung

Die Lernenden lösten den kognitiven Konflikt nach dem Ausschlussprinzip: Die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit ist empirisch belegt und wird zudem als Prinzip betrachtet. Schwarze Löcher sind ebenfalls empirisch belegt. Dann muss die raumzeitliche Entfernung zwischen dem Raumschiff und dem schwarzen Loch durch die Masse zu unendlicher Größe gedehnt sein.

Hiermit haben die Lernenden den ersten Konzeptwechsel auf der Basis eigener Vorkenntnisse auf dem Weg über einen kognitiven Konflikt durchgeführt. Das Konzept der Raumdehnung geht auf Einstein zurück (s. z. B. Einstein 1915).

### 6.5. Berechnung der Raumdehnung

Um die beobachtete Dehnung bei der Gravitationswelle (s. Gl. {1}) nachbilden zu können, muss ein Verfahren zur Berechnung der Raumdehnung gefunden werden. Hierzu habe ich zwei schülergerechte Lernwege vorgeschlagen. Der eine Lernweg beruht auf einer Regression und kann von Lernenden ab ungefähr Klassenstufe 7 bis 8 beschriftet werden (Carmesin 2012). Der andere Lernweg beruht auf einer Integration und kann von Lernenden der Sekundarstufe 2 beschriftet werden (Carmesin 2016). Hier stelle ich den ersten Lernweg dar.

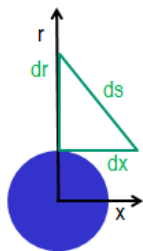


Abb.7: Raumdehnung: Zwei Raumrichtungen.

Zunächst verallgemeinern wir den Satz des Pythagoras (s. Abb. 7):  $ds^2 = dx^2 + dr^2$

Die Strecke dx verläuft in waagerechte Richtung und wird daher nicht durch die Gravitation gedehnt. Die Strecke dr dagegen verläuft in lotrechte Richtung und wird somit gedehnt. Das beschreibt man durch einen sogenannten metrischen Faktor  $g_{rr}$ :

$$ds^2 = dx^2 + g_{rr} \cdot dr^2 \quad \{8\}$$

Weil die Schwerkraft nach oben hin abnimmt, hängt dieser Faktor von der radialen Koordinate r ab. Die entsprechende Funktion  $g_{rr}(r)$  wird mithilfe einer linearen Regression bestimmt: Bei r gegen unendlich geht die Schwerkraft gegen null und somit  $g_{rr}$  gegen eins, kurz:

$$g_{rr}(\infty) = 1 \quad \{9\}$$

Weil Licht bei  $R_S$  nicht entkommt, geht  $g_{rr}$  hier gegen unendlich, kurz:

$$g_{rr}(R_S) = \infty \quad \{10\}$$

Die Lernenden wissen, dass man bei einer Regression eine passende Achsenbeschriftung oder Achsenkalibrierung wählt. Beispielsweise wird bei einer Antiproportionalität der Kehrwert der entsprechenden Variablen gewählt. In diesem Sinne wird hier für r der Kehrwert  $u = 1/r$  und für  $g_{rr}$  der Kehrwert  $q = 1/g_{rr}$  verwendet. So wird aus den beiden Gleichungen {9} und {10}:

$$q(U_S) = 0 \text{ \& } q(0) = 1 \text{ mit } U_S = 1/R_S \quad \{11\}$$

Für diese beiden Stützstellen wird eine lineare Regression durchgeführt (s. Abb. 9). So erhalten die Lernenden folgende Geradengleichung:

$$q = 1 - u/U_S \quad \{12\}$$

Hier werden für q und u die ursprünglichen Variablen entsprechend eingesetzt und man erhält:

$$g_{rr} = 1/(1 - R_S/r) \quad \{13\}$$

Diese Gleichung stellt die Schwarzschild-Lösung dar (Schwarzschild 1996). Somit haben die Lernenden zu ihrem neuen Konzept der Raumdehnung mithilfe ihrer Kompetenzen zu Regression die passende Metrik entwickelt.

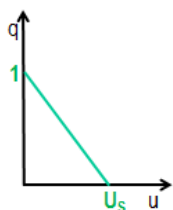


Abb.8: Lineare Regression.

Diese Darstellung wird nun in die in der Technik übliche Darstellung (s. Gl. {1}) umgewandelt: Eine Strecke L wird gemäß Gl. {8} und {13} wie folgt gedehnt:  $L + \Delta L = g_{rr}^{0,5} \cdot L$

$$\text{Also ist: } \epsilon = \Delta L/L = g_{rr}^{0,5} - 1$$

Mit der Tangentennäherung für kleine  $R_S/r$  gilt:

$$\epsilon = 1/2 \cdot R_S/r = G \cdot M/r \cdot 1/c^2 = -\phi/c^2 \quad \{14\}$$

Damit haben die Lernenden gezeigt, dass die bei Gravitationswellen gemessene Raumdehnung (s. Gl. {1}) proportional zum Gravitationspotential (s. Gl. {5}) ist (s. z. B. Straumann 2013).

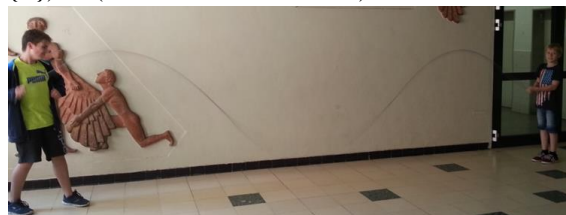


Abb.9: Modellversuch zur Welle.

### 7. Basiskonzept Welle

Die Schülerinnen und Schüler kennen aus ihrer Lebenswelt unterschiedliche Wellen. Zur Beobachtung grundlegender Eigenschaften führten sie ein Experiment mit einer langen Schraubenfeder durch (s. Abb. 9).

#### 7.1. Modellversuch

Die Lernenden führten zunächst einen Modellversuch mit einem Seil durch (s. Abb. 9). Sie erkannten eine räumlich und zeitlich periodische Ausbreitung der Welle. Auch stellten sie fest, dass die Welle von einem zeitlich periodischen Sender ausgeht. Dieser Sender ist bei der beobachteten Gravitationswelle (GW150914) ein Doppelsternsystem bestehend aus zwei schwarzen Löchern (s. Abb. 10, s. Abbott u. a. 2016).

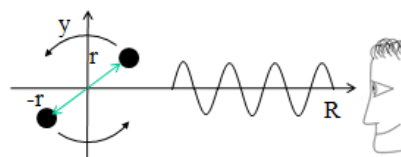


Abb.10: Doppelsternsystem sendet Gravitationswelle aus.

#### 7.2. Computereperiment

Die physikalischen Daten des Doppelsternsystems wurden zusammengefasst. Jedes der beiden schwarzen Löcher hat ungefähr einer Masse von 35 Sonnenmassen:  $Masse M = 2 \cdot m = 70 \cdot M_{Sonne}$

Der Bahnradius beträgt ungefähr  $r = 350 \text{ km}$ .

Die Umlaufdauer beträgt ungefähr  $T = 50 \text{ ms}$ .

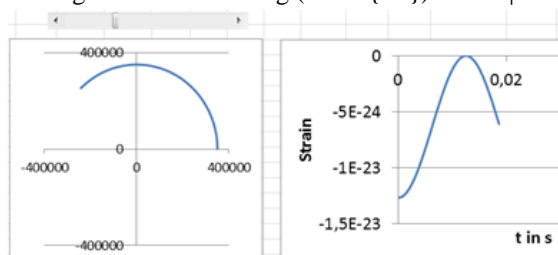
Die Entfernung des Doppelsterns zur Erde beträgt ungefähr 1300 Millionen Lichtjahre:

$$R = 1300 \text{ Mio. LJ} = 1,23 \cdot 10^{25} \text{ m}$$

Die Lernenden erkannten, dass sie die Raumdehnung beim Beobachter (s. Gl. {1}) berechnen können, indem sie das Gravitationspotential (s. Gl. {5} und {14}) der beiden schwarzen Löcher berechnen.

Dazu erstellten sie eine Tabellenkalkulation (s. Abb. 11). Hierzu berechneten sie zunächst die Gravitationspotentiale der beiden schwarzen Löcher,  $\varphi_1 = -G \cdot m / |R-r|$  und  $\varphi_2 = -G \cdot m / |R+r|$  sowie das zeitunabhängige Potential des Schwerpunkts:  $\varphi_M = -G \cdot M / R$

Für die Welle ist nur der zeitabhängige Anteil des Potentials wichtig. Dieser besteht aus der Summe der beiden einzelnen Potentiale abzüglich des Potentials des Schwerpunkts:  $\varphi_{\text{Zeit}} = \varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_M$  {15}  
Somit gilt für die Dehnung (s. Gl. {14}):  $\varepsilon = -\varphi/c^2$



**Abb.11:** Computerexperiment zur Gravitationswelle: Bahn eines der beiden schwarzen Löcher (links). Raumdehnung berechnet aus dem statischen Gravitationspotential in  $10^{13}$  m Entfernung.

Bei diesen Computerexperimenten stellten die Lernenden fest, dass die Tabellenkalkulation diese Dehnung nur bis zu Entfernungen von  $10^{13}$  m berechnen kann, weil bei der Berechnung mit Gleichung {15} sehr große Zahlen addiert und subtrahiert werden müssen. Hierbei wurde dem Computer durch eine Tangentennäherung geholfen: Zunächst wurde im Computerexperiment festgestellt, dass die y-Koordinate für das Potential in großer Entfernung R unwesentlich ist. Für die x-Koordinate gilt:

$$x(t) = r \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

$$\text{Somit ist: } \varphi_1 = -G \cdot m / (R-x) = -G \cdot m / R \cdot 1 / (1-x/R)$$

Mit der Abkürzung  $a = x/R$  ist:

$$\varphi_1 + \varphi_2 = -G \cdot m / R \cdot [1 / (1-a) + 1 / (1+a)] = -G \cdot m / R \cdot 2 / (1-a^2)$$

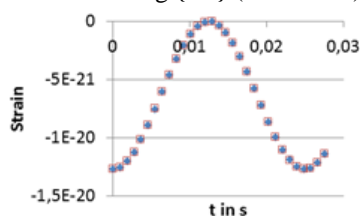
Mit der Tangentennäherung für kleine a ist:

$$\varphi_1 + \varphi_2 = -2G \cdot m / R \cdot (1+a^2)$$

Damit gilt (s. Gl. {15})

$$\varphi_{\text{Zeit}} = -2G \cdot m / R^3 \cdot x^2 \quad \{16\}$$

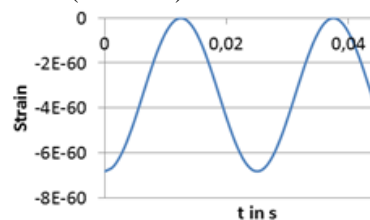
Mit weiteren Computerexperimenten bestätigten die Lernenden, dass Gl. {16} gleichwertige Ergebnisse liefert wie die Gleichung {15} (s. Abb. 12).



**Abb.12:** Computerexperiment zur Gravitationswelle: Raumdehnung berechnet ohne (Blau) und mit (Rot) Tangentennäherung für  $R = 10^{12}$  m Entfernung. Das Aufeinandertreffen der roten und blauen Punkte bestätigt die Güte der Näherung.

### 7.3. Kognitiver Konflikt

Mit weiteren Computerexperimenten stellten die Lernenden fest, dass die Raumdehnung bei der beobachteten Entfernung von  $1,23 \cdot 10^{25}$  m nur  $10^{-60}$  beträgt, wogegen eine Raumdehnung von  $10^{-21}$  beobachtet wurde (s. Abb. 13).



**Abb.13:** Computerexperiment zur Gravitationswelle: Raumdehnung für  $R = 1,23 \cdot 10^{25}$  m Entfernung.

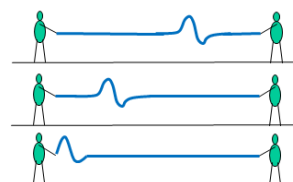
Dieser kognitive Konflikt zeigt, dass die Gravitationswelle nicht einfach durch das stationäre Gravitationspotential nach Gleichung {5} bestimmt ist. Um hier zu einem neuen Konzept zu kommen, wurden Modellversuche zur Wellendynamik durchgeführt.



**Abb.14:** Modellversuch zum langsamen veränderlichen Gravitationspotential.

### 7.4. Modellversuche zur Wellendynamik

Um die Dynamik des statischen Potentials nachzubilden, wurde die lange Schraubenfeder von zwei Lernenden gedehnt und einer bewegte die Schraubenfeder als Sender langsam auf und ab (s. Gl. 14). Am anderen Ende entstand so nur eine winzige Auslenkung. Auch wurde überhaupt keine Ausbreitung einer Welle beobachtet. Um eine schnelle Bewegung des Senders zu modellieren, zupfte einer der beiden Experimentatoren kurz an der Schraubenfeder. Daraufhin wanderte ein Wellenberg mit großer Auslenkung zum anderen Ende (s. Abb. 15). Die Lernenden erkannten, dass erst eine schnelle Bewegung des Senders die Wellendynamik auslöst.



**Abb.15:** Modellversuch zur Wellendynamik.

### 7.5. Basiskonzept Wellendynamik

Um diese Wellendynamik zu untersuchen, gingen die Lernenden von der aus vielen Bereichen bekannten Wellengleichung aus:

$$z = z_0 \cdot \cos(\omega \cdot t - k \cdot R) \quad \text{mit Abkürzung } k = 2\pi/\lambda$$

Um die Dynamik zu untersuchen, analysierten die Lernenden wie bei den Dynamiken in den Abschnitten 4 und 5 die Ableitungen und erhielten:

$$c^2 \cdot z(R)'' = z(t)'' \quad \text{mit } c = k/\omega = \lambda/T \quad \{17\}$$

## 7.6. Neues Konzept: Wellendynamik beim Gravitationspotential

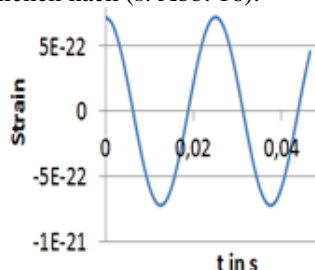
In diese Gleichung {17} setzen die Schülerinnen und Schüler für  $z$  das Potential ein (s. Gl. {16}):

$$c^2 \cdot \varphi_{\text{Zeit}}(R) = M \cdot G / R^3 \cdot r^2 \cdot \omega^2 \cdot 2 \cdot \cos(2\omega \cdot t)$$

Um die zweite Ableitung bezüglich  $R$  zu beseitigen, wurde zweimal bezüglich  $dR$  integriert. Außerdem wurde durch  $c^2$  dividiert, um nach dem Potential aufzulösen:

$$\varphi_{\text{Zeit}} = M \cdot G / R \cdot r^2 \cdot \omega^2 \cdot 4 \cdot \cos(2\omega \cdot t) / c^2 \quad \{18\}$$

Diese Gleichung entspricht der Quadrupolformel, die Einstein 1916 für die Aussendung von Gravitationswellen hergeleitet hatte (Einstein 1916). Die Lernenden nutzten diese Formel in ihrer Tabellenkalkulation. Bei diesen Computerexperimenten bildeten die Schüler die beobachtete Gravitationswelle im Wesentlichen nach (s. Abb. 16).



**Abb.16:** Computerexperiment bildet Gravitationswelle nach.

Damit haben die Lernenden die Aussendung von Gravitationswellen durch einen weit entfernten Doppelstern mit konstanter Umlaufdauer quantitativ nachgebildet und an der Beobachtung (s. Abb. 1) überprüft.

Zudem haben sie dabei erkannt, dass die Auslenkung der ausgesendeten Welle proportional zur zweiten Ableitung des Senders bezüglich der Zeit ist, also proportional zur Beschleunigung des Senders (s. Gl. {17}). Diese Erkenntnis wurde auf die Aussendung von elektromagnetischen Wellen übertragen, denn auch das elektrische Potential ist proportional zum Kehrwert der Entfernung (s. Abb. 17).



**Abb.17:** Analogie: Die Beschleunigung ist die Ursache der Aussendung von Gravitationswellen und elektromagnetischen Wellen.

## 7.7. Relativitätspostulate

Darüber hinaus erkannten die Schülerinnen und Schüler, dass ein ruhender Fahrstuhl  $K$  bei einer Gravitationsfeldstärke  $g$  von einem mit  $a = g$  beschleunigten Fahrstuhl  $K'$  im gravitationsfreien Raum lokal unterschieden werden kann. Zwar wird in beiden Fahrstühlen eine Masse  $m$  mit einer Kraft  $m \cdot g$  zum Boden gedrückt, weil die träge und schwere Masse nach dem Relativitätssprinzip von Galileo (auch schwaches Äquivalenzprinzip genannt) nicht

unterschieden werden können. Aber in  $K'$  senden Ladungen elektromagnetische Wellen und Massen Gravitationswellen aus, wogegen es im unbeschleunigten Fahrstuhl  $K$  zu keiner derartigen Wellenausendung kommt. Das sind zwei Gegenbeispiele zu dem von Einstein beispielsweise 1916 formulierten „erweiterten Relativitätssprinzip“ (Einstein 1916b), ein elektrisches und ein mechanisches. Dieses Relativitätspostulat wurde gar nicht erst thematisiert, da der Nutzen für die Lernenden fragwürdig erscheint und da es genug gibt, was die Schülerinnen und Schüler von Einsteins Theorie lernen können.

## 7.8. Veränderliche Amplitude

Das gemessene Signal zeigt deutlich eine Amplituden- und Frequenzzunahme (s. Abb. 1). Diese hatten die Lernenden zunächst nicht nachgebildet. Einige holten dies nach. Die Grundidee dabei war, dass das ausgesandte Gravitationspotential  $\varphi$  einer ausgesandten Gravitationsfeldstärke  $g = -\varphi(R)$  entspricht. Dieses hat eine Energiedichte  $E/V$ . Also wird eine Leistung  $P$  abgestrahlt. Somit verliert der Doppelstern an Energie, der Bahnradius  $r$  wird kleiner, die Kreisfrequenz  $\omega$  und die Amplitude der Welle nimmt zu (s. Gl. {18}). Das erklärt grundsätzlich die Zunahme der Amplitude im gemessenen Signal (s. Abb. 1). Diese Erklärung wurde im Rahmen eines Referats von einigen als Herleitung nachvollzogen. Die Herleitung ist etwas technisch und kann übersprungen werden.

### 7.8.1. Herleitung

Zunächst wurde die Bahnbewegung mit Formeln in verdichteter Weise nachgebildet:

$$\text{Die Gravitationskraft ist: } F_G = GM^2 / (2r)^2$$

$$\text{Die Zentripetalkraft lautet: } F_z = Mv^2 / r$$

$$\text{Gleichsetzen ergibt: } Mv^2 / r = GM^2 / (2r)^2 \quad | \cdot r$$

$$\text{So entsteht ein Term für die gesamte kinetische Energie beider Massen:}$$

$$Mv^2 = GM^2 / (4r) = E_{\text{kin}} \quad \{19\}$$

$$\text{Die potentielle Energie ist: } E_{\text{pot}} = -GM^2 / (2r)$$

$$E = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = -GM^2 / (4r) \quad \{20\}$$

Gleichung {19} wird durch  $M$  dividiert:

$$v^2 = GM / (4r) \quad | v = \omega \cdot r \quad | : r^2$$

$$\omega^2 = GM / (4r^3) \quad | \text{Wurzel}$$

$$\omega = [GM / (4r^3)]^{0,5} = 1/2 \cdot [GM / r^3]^{0,5} \quad \{21\}$$

Die Ableitung des Bahnradius  $r$  ist  $dr/dt = dr/dE \cdot dE/dt$  ergibt mit  $dE/dr = GM^2 / (4r^2)$  und der Leistung  $dE/dt = P$ :

$$dr/dt = 4r^2 \cdot M^{-2} \cdot G^{-1} \cdot P \quad \{22\}$$

Wir drücken die Leistung  $P$  durch die Leistungsdichte  $S = P/A$  aus:  $P = S \cdot 4\pi R^2$

Wir drücken  $S$  durch die Energiedichte  $E/V =$

$$E / (A \cdot L) \text{ aus: } S = P/A = L/t \cdot E / (A \cdot L) = c \cdot E/V$$

$$\text{Einsetzen ergibt: } P = c \cdot E/V \cdot 4\pi R^2$$

Wir drücken  $E/V$  durch die Gravitationsfeldstärke  $g$  aus:  $P = c \cdot g^2 / (8\pi G) \cdot 4\pi R^2$  oder

$$P = c \cdot g^2 \cdot R^2 / (2G) \quad \{23\}$$

Mit  $g = -d\varphi/dr$  und der Kettenregel erhalten wir, wobei wir den Betrag von  $g$  betrachten:

$$g = d\varphi/dt \cdot dt/dr = d\varphi/dt \cdot 1/c$$

Wir setzen für  $\varphi$  die Quadrupolformel ein, leiten ab und erhalten:  $g = 2\omega\varphi/c$  {24}

Wir setzen {24} in {23} ein:

$$P = 2 \cdot \omega^2 \cdot \varphi^2 \cdot R^2 / (Gc) \quad \{25\}$$

Wir setzen die Quadrupolformel ein und erhalten:

$$P = 2 \cdot \omega^2 \cdot R^2 / (Gc) \cdot M^2 \cdot G^2 / R^2 \cdot r^4 \cdot \omega^4 \cdot 16 \cdot \cos(2\omega \cdot t)^2 / c^4$$

Wir vereinfachen:  $P = 32 \cdot \omega^6 \cdot G \cdot M^2 \cdot r^4 \cdot \cos(2\omega \cdot t)^2 / c^5$

Wir setzen Gl. {21} ein:  $P = \frac{1}{2} G^4 \cdot M^5 \cdot r^5 \cdot \cos(2\omega \cdot t)^2 / c^5$

Im zeitlichen Mittel ist  $\cos^2 = \frac{1}{2}$ :  $\bar{P} = \frac{1}{4} G^4 \cdot M^5 \cdot r^5 \cdot c^{-5}$

Wir setzen für  $P_{\text{quer}}$  nach Gl. {23} ein und erhalten:

$$dr/dt = G^3 \cdot M^3 \cdot r^{-3} \cdot c^{-5} = \beta \cdot r^{-3} \quad \{26\}$$

Wir kürzen ab:  $\beta = G^3 \cdot M^3 \cdot c^{-5}$

Die Lösung der Differentialgleichung {26} ist:

$$r = (r_0^4 - 4 \cdot \beta \cdot t)^{0,25} \quad \{27\}$$

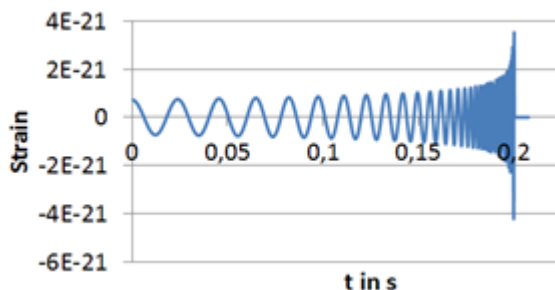
Das Minuszeichen kommt dadurch, dass P abgestrahlt wird. Wir bestimmen die Abstrahldauer  $\tau$ , nach der  $r = 0$  ist:

$$0 = r = (r_0^4 - 4 \cdot \beta \cdot \tau)^{0,25} \rightarrow \tau = 0,25 r_0^4 / \beta$$

### 7.8.2. Computerexperiment

Die Lösung {27} wurde in die Tabellenkalkulation eingesetzt. So konnten die Lernenden die Zunahme der Amplitude nachbilden (s. Abb. 18).

Damit haben die Lernenden die Zunahme der Amplitude nachgebildet. Auch zeigte sich die Grenze der Theorie. In den letzten Millisekunden verschmelzen die schwarzen Löcher und die Amplitude nimmt wieder ab (s. Abb. 1). Hier jedoch geht für  $r$  gegen null  $\omega$  gegen unendlich und somit die Amplitude gegen unendlich. Unsere Theorie beinhaltet Tangentennäherungen, durch Mitnahme nichtlinearer Terme kann das gesamte gemessene Signal im Rahmen der Messgenauigkeit erklärt werden.



**Abb.18:** Computerexperiment bildet zunehmende Amplitude der Gravitationswelle nach.

### 8. Ablauf der Unterrichtseinheit

Die Unterrichtseinheit war wie folgt aufgebaut, wobei alle Lernziele in binnendifferenzierender Weise in einer jeweils altersgerechten Form durch folgende Stundenthemen erreicht wurden:

1: Entdeckung der Gravitationswellen. Ein Schüler hielt ein Referat über 45 min. Die Lernenden konnten anschließend die Messung erläutern, die zu Abb. 1 führte.

2: Veranschaulichung von Gravitationswellen mit Modellversuchen. Dauer 45 min. Die Lernenden konnten anschließend die Raumdehnung gemäß Gl. {1} mit dem Versuch nach Abb. 2 erläutern sowie Wellen mit dem Versuch in Abb. 9 veranschaulichen.

3: Wiederholung zum Basiskonzept Schwerkraft.

Dauer 45 min. Die Lernenden konnten anschließend die Gravitationskraft, die Gravitationsenergie sowie das Gravitationspotential erläutern sowie bei einfachen Beispielen berechnen gemäß Gl. {2-5}.

4: Wiederholung zum Basiskonzept Newton's Axiome mithilfe des Formel 1 Spiels. Dauer 90 min. Die Lernenden konnten anschließend anhand des Spiels die Entstehung einer Bewegung durch Beschleunigung und Geschwindigkeit erklären sowie grob auf Karopapier simulieren.

5: Modellierung der Wurfparabel mit einem simulierten Ballspiel. Dauer 90 min. Die Lernenden konnten anschließend anhand des Spiels die Entstehung einer Wurfparabel durch die konstante Schwerkraft, die Beschleunigung und Geschwindigkeit erklären sowie grob auf Karopapier und fein mit einer Tabellenkalkulation simulieren.

6: Entdeckung der Fluchtgeschwindigkeit und des schwarzen Loches. Dauer 90 min. Die Lernenden konnten anschließend anhand einer Tabellenkalkulation, einer Energiebetrachtung (s. Gl. {6}) sowie des Schwarzschildradius (s. Gl. {7}) Fluchtgeschwindigkeiten ermitteln und das schwarze Loch erklären sowie den Schwarzschildradius berechnen.

7: Erklärung des Lichteinschlusses mit der Raumzeitdehnung. Dauer 45 min. Die Lernenden konnten anschließend die Unzulänglichkeit einer masseunabhängigen Raumzeit erklären sowie das neue Konzept der Dehnung der Raumzeit erläutern und begründen.

8: Entwicklung der Schwarzschildmetrik. Dauer 90 min. Die Lernenden konnten anschließend die Schwarzschildmetrik mithilfe einer Regression entwickeln, begründen und den metrischen Faktor  $g_{rr}$  sowie radiale Dehnungen berechnen.

9: Anwendung der Schwarzschildmetrik beim GPS. Dauer 90 min. Die Lernenden konnten anschließend die Schwarzschildmetrik auf das GPS anwenden. Diese Stunde stellt eine reine Konsolidierung dar und wird in (Carmesin 2012) dargestellt.

10: Modellierung von Gravitationswellen mit dem statischen Gravitationspotential und Entdecken der zu geringen Amplitude. Dauer 90 min. Die Lernenden konnten anschließend mit dem statischen Potential Raumdehnung am Ort des Beobachters berechnen und beurteilen.

11: Erklärung der Gravitationswellen mit der Wellendynamik. Dauer 90 min. Die Lernenden konnten anschließend die Quadrupolformel (s. Gl. {18}) erläutern sowie die große Reichweite durch den  $1/R$ -Term begründen. Auch konnten sie die Aussendung von Gravitationswellen und elektromagnetischen Wellen durch die Beschleunigung erklären. Zudem konnten sie erklären, wie man mithilfe dieser Tatsache Beschleunigung und Gravitation prinzipiell unterscheiden kann.

12: Überprüfende Modellierung der Gravitationswellen mit der Wellendynamik. Dauer 45 min. Die Lernenden konnten anschließend mithilfe der Quadrupolformel und der Tabellenkalkulation das

beobachtete Gravitationswellensignal für konstante Umlaufdauer des Doppelsterns nachbilden.

**13:** Modellierung der Amplituden- und Frequenzzunahme beim Gravitationswellensignal. Dauer 45 min. Im Rahmen eines Referats wurde die Gleichung zur Radiusänderung entwickelt. Auch wurde mit der Tabellenkalkulation das beobachtete Gravitationswellensignal weitgehend nachgebildet.

**Optional 14-17:** Zudem wurde in weiteren 8 Doppelstunden ein öffentlicher Astronomieabend vorbereitet und anschließend in der gut besuchten Aula durchgeführt.

### 9. Diskussion

Die Entdeckung der Gravitationswellen bietet eine hervorragende Gelegenheit für die Lernenden, ein aktuelles Ergebnis der physikalischen Grundlagenforschung zu behandeln. Das Thema ist für die Lernenden auch dadurch besonders spannend, dass die Gravitationswellen vor 100 Jahren vorausberechnet und nun nach jahrzehntelanger weltweiter Suche erstmals erfasst wurden. Und vor allem eröffnen diese Wellen ein völlig neues Fenster ins Weltall. Hierbei werden drei Zieleverfolgt:

Als fachliches Ziel wird das Thema relativ anspruchsvoll behandelt, indem das Gravitationswellensignal von den Lernenden mithilfe von Computerexperimenten nachgebildet wird, wobei die verwendeten Formeln von den Schülerinnen und Schülern hergeleitet oder entwickelt werden.

Als fachdidaktisches Ziel werden die Inhalte vom Wissen der Lernenden aus entwickelt, um eine hohe Lernwirksamkeit zu erzielen. Das legt ein Vorgehen im Sinne eines Spiralcurriculums nahe. Dabei kommt es systembedingt zu mehreren Konzeptwechseln.

Als methodisches Ziel werden diese Konzeptwechsel mit kognitiven Konflikten behandelt, da dies das Bewusstsein für den Wechsel vertieft, gedanklich besonders aktiviert und auch aus neurowissenschaftlicher Sicht objektiv aktivierend ist.

Die Erfahrung zeigt, dass diese drei Ziele bei der heterogenen Lerngruppe von den älteren Lernenden voll erreicht wurden, wobei die Jüngeren durch Modellversuche und Computerexperimente an allen Teilthemen in gehaltvoller Weise teilhaben konnten. Beim öffentlichen Astronomieabend stellten sie ihre verschiedenen Ergebnisse vor, die somit zu einem sinnvollen Ganzen zusammenfließen konnten. Bei dieser Unterrichtseinheit konnten die Lernenden in aktiver Weise anspruchsvolle Kompetenzen zur allgemeinen Relativitätstheorie, zur Modellbildung sowie zu Computerexperimenten entwickeln und diese durch das Nachbilden des Gravitationswellensignals selbstkritisch überprüfen (s. Abb. 1 und 18). Daher empfehle ich das Thema zur Behandlung in weiteren Lerngruppen und hoffe auf zukünftige Entdeckungen durch Gravitationswellendetektoren, sodass entsprechende spannende Unterrichtseinheiten entwickelt werden können.

### 10. Literatur

- [1] Abbott, Benjamin P. et al. (2016): Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger. In: *Phys. Rev. Lett.* 116, 6, 1-16.
- [2] Carmesin, Hans-Otto (2006): Entdeckungen im Physikunterricht durch Beobachtungen des Himmels. In: *Didaktik der Physik, Beiträge zur DPG-Frühjahrstagung (2006)* ISSN 798-386541-190-7.
- [3] Carmesin, Hans-Otto (2012): Schüler entdecken die Einstein-Geometrie mit dem Beschleunigungssensor. In: *PhysDid B* (2012), ISSN 2191-379, DD15p06.
- [4] Carmesin, Hans-Otto und Carmesin, Ellen (2014): How Old is the Universe? In: *PhysDid B* (2014), ISSN 2191-379.
- [5] Carmesin, Hans-Otto (2016): Mit dem Zwillingenparadoxon zur speziellen und allgemeinen Relativitätstheorie. In: *PhysDid B* (2014), ISSN 2191-379.
- [6] Cohen, Michael (2014): A neural microcircuit for cognitive conflict detection and signalling. *Trends in Neurosciences*, 37, 9, p. 480-490.
- [7] Einstein, Albert (1915): Die Feldgleichungen der Gravitation. In: *Sitzungsberichte der preussischen Akademie der Wissenschaften*, 25. November, 844-847.
- [8] Einstein, A. (1916): Näherungsweise Integration der Feldgleichungen der Gravitation. Berlin: *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften*. 688-696.
- [9] Einstein, A. (1916b): Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie. *Annalen der Physik*, 49, S. 769-822, hier S. 772-773.
- [10] Harrison, Edward (1990): *Kosmologie*. 3. Aufl. Darmstadt: Verlag Darmstädter Blätter.
- [11] Humboldt, W. (1792): In: Brockhaus GmbH (1996): *Brockhaus – Die Enzyklopädie*. 20. Aufl. Bd. 3, S. 330.
- [12] Kircher, Ernst; Girwidz, Raimund; Häußler, Peter (2001): *Physikdidaktik*, 2. Aufl., Berlin: Springer Verlag.
- [13] Michelson, Albert Abraham; Morley, Edward (1883): On the Relative Motion of the Earth and the Luminiferous Ether. In: *American Journal of Science*, 34, 303, 203-345.
- [14] Newton, Isaac (1687): *Principia Naturalis Principia Mathematica*. London: Jussu Societatis Regiæ ac Typis Joseph Streater.
- [15] Schwarzschild, K. (1916): Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie. *Sitzungsberichte der Deutschen Akademie der Wissenschaften*, 189-196.
- [16] Straumann, Norbert (2013). *General Relativity*. 2. Auflage, Heidelberg - New York – London: Springer Dordrecht.