Posterbeitrag zur DPG-Frühjahrstagung 2017 an der Universität Dresden, DD 02.01, Mo, 20. März 2017, 14:00 h – 16:00 h, Postersitzung P3, Foyer Chemiegebäude

Eigenwerte und Eigenvektoren aus geometrisch-algebraischer Perspektive

Martin Erik Horn, HWR Berlin, FB 1, FE Quantitative Methoden

Hochschule für Wirtschaft und Recht Berlin
Berlin School of Economics and Law

Email: *e_hornm@doz.hwr-berlin.de*

Einordnung: Moderne Lineare Algebra

Mit Hilfe der Geometrischen Algebra lässt sich eine an physikalischen und physikdidaktischen Setzungen orientierte moderne Lineare Algebra konstruieren, die auf einem konzeptuellen Gleichklang algebraischer und geometrischer Deutungen beruht.

Dabei wird die Koeffizientenmatrix Linearer Gleichungssysteme durch die Koeffizientenvektoren ersetzt. Die Lösung Linearer Gleichungssysteme ergibt sich dann durch Volumenvergleich der durch die Koeffizientenvektoren aufgespannten (Hyper)-Parallelepipede bzw. Parallelotope.

Dieser physikdidaktisch motivierte Ansatz wird hier bei der Nutzung von Eigenwerten und Eigenvektoren zur Lösung Linearer Gleichungssysteme eingesetzt.

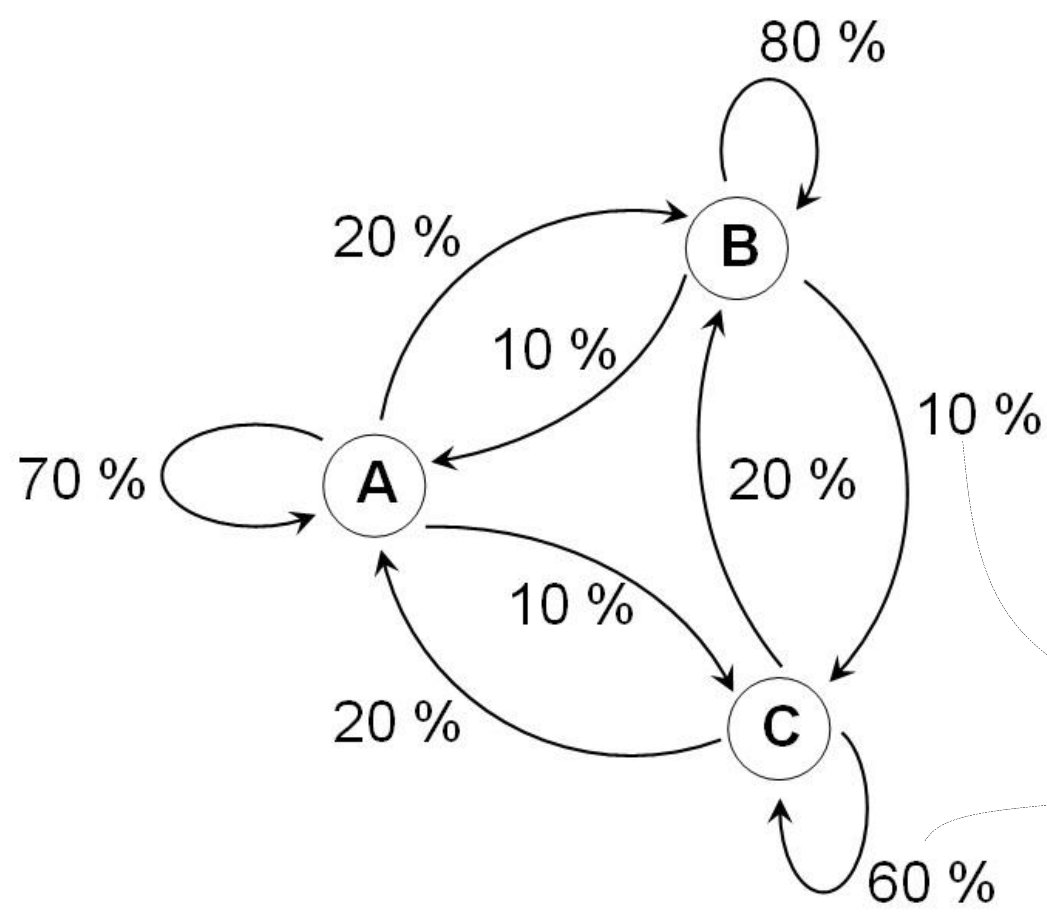
Überblick: Erprobungen an der HWR/BSEL (WiMa)

Teil 1: Grundlagen
Teil 2: LGS mit zwei bzw. drei Unbekannten
Teil 3: Direktes Produkt & LGS mit vier bzw. fünf Unbekannten
} **WS 2014/2015** → DPG Wuppertal 2015

Teil 4: Gauß-Algorithmus als Koordinatentransformation
} **WS 2015/2016** → DPG Hannover 2016

Teil 5: Eigenwerte und Eigenvektoren
Teil 6: Sandwich-Produkte
} **WS 2016/2017** → DPG Dresden 2017

Teil 7: GAALOP-Einsatz (geplant)
} **WS 2017/2018**



Wirtschaftsmathematisches Beispiel: **Das Tankstellenproblem**

Die Marktanteile der drei Tankstellen **A**, **B**, **C** einer kleinen Stadt entwickeln sich gemäß der links angegebenen monatlichen Änderungsraten.

Vier Monate nach einer Anzeigenkampagne von Tankstelle A haben die Tankstellen die folgenden Marktanteile:

Marktanteile:	Tankstelle **A**:	37,73 %
	Tankstelle **B**:	43,52 %
	Tankstelle **C**:	18,75 %

Berechnen Sie mit Hilfe von zuvor ermittelten Eigenwerten und Eigenvektoren die Marktanteile der drei Tankstellen, die diese einen Monat nach der Werbekampagne hatten.

Lesebeispiele:
10 % der Kunden, die im vergangenen Monat bei Tankstelle B tankten, tanken jetzt bei Tankstelle C.
60 % der Kunden, die im vergangenen Monat bei Tankstelle C tankten, tanken weiterhin bei Tankstelle C.

Matrix der Änderungsraten (stochastische Matrix):

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 70\,\% & 10\,\% & 20\,\% \\ 20\,\% & 80\,\% & 20\,\% \\ 10\,\% & 10\,\% & 60\,\% \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}70 & 0{,}10 & 0{,}20 \\ 0{,}20 & 0{,}80 & 0{,}20 \\ 0{,}10 & 0{,}10 & 0{,}60 \end{pmatrix}$$

Koeffizientenvektoren:

$$\mathbf{c} = 0{,}20\,\sigma_x + 0{,}20\,\sigma_y + 0{,}60\,\sigma_z$$
$$\mathbf{b} = 0{,}10\,\sigma_x + 0{,}80\,\sigma_y + 0{,}10\,\sigma_z$$
$$\mathbf{a} = 0{,}70\,\sigma_x + 0{,}20\,\sigma_y + 0{,}10\,\sigma_z$$

Charakteristische Vektoren:

$$\mathbf{a} - \lambda\,\sigma_x = (0{,}70 - \lambda)\,\sigma_x + 0{,}20\,\sigma_y + 0{,}10\,\sigma_z$$
$$\mathbf{b} - \lambda\,\sigma_y = 0{,}10\,\sigma_x + (0{,}80 - \lambda)\,\sigma_y + 0{,}10\,\sigma_z$$
$$\mathbf{c} - \lambda\,\sigma_z = 0{,}20\,\sigma_x + 0{,}20\,\sigma_y + (0{,}60 - \lambda)\,\sigma_z$$

Charakteristisches Volumen:

$$(\mathbf{a} - \lambda\,\sigma_x) \wedge (\mathbf{b} - \lambda\,\sigma_y) \wedge (\mathbf{c} - \lambda\,\sigma_z) = (-\lambda^3 + 2{,}10\,\lambda^2 - 1{,}40\,\lambda + 0{,}30)\,\sigma_x\sigma_y\sigma_z$$

Charakteristisches Polynom:

$$(\mathbf{a} - \lambda\,\sigma_x) \wedge (\mathbf{b} - \lambda\,\sigma_y) \wedge (\mathbf{c} - \lambda\,\sigma_z)\,\sigma_z\sigma_y\sigma_x = -\lambda^3 + 2{,}10\,\lambda^2 - 1{,}40\,\lambda + 0{,}30$$

Charakteristische Gleichung:

$$0 = -\lambda^3 + 2{,}10\,\lambda^2 - 1{,}40\,\lambda + 0{,}30$$

$\Rightarrow$ **Eigenwerte:**

$$\lambda_1 = 1$$
$$\lambda_2 = 0{,}60$$
$$\lambda_3 = 0{,}50$$

Bestimmung der Eigenvektoren: $\mathbf{T}\,\mathbf{v} = \lambda\,\mathbf{v}$

$$\mathbf{a}\,v_x + \mathbf{b}\,v_y + \mathbf{c}\,v_z = \lambda\,(v_x\,\sigma_x + v_y\,\sigma_y + v_z\,\sigma_z)$$
$$(\mathbf{a} - \lambda\,\sigma_x)\,v_x + (\mathbf{b} - \lambda\,\sigma_y)\,v_y + (\mathbf{c} - \lambda\,\sigma_z)\,v_z = 0$$

$\Rightarrow$ **Eigenvektoren:**

$$\mathbf{v}_1 = 3\,\sigma_x + 5\,\sigma_y + 2\,\sigma_z$$
$$\mathbf{v}_2 = \sigma_x - \sigma_y$$
$$\mathbf{v}_3 = \sigma_x - \sigma_z$$

$\Rightarrow$ **Normierte Eigenvektoren:**

$$\overline{\mathbf{v}}_1 = \frac{1}{\sqrt{38}}\,(3\,\sigma_x + 5\,\sigma_y + 2\,\sigma_z)$$
$$\overline{\mathbf{v}}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(\sigma_x - \sigma_y)$$
$$\overline{\mathbf{v}}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(\sigma_x - \sigma_z)$$

Geometrische Interpretation algebraischer Zusammenhänge als zentraler didaktischer Vorteil; allerdings kaum Unterschiede im rechnerischen Aufwand bei Ermittlung von Eigenwerten und Eigenvektoren.

Vektor der Marktanteile (nach vier Monaten):

$$\mathbf{x}_4 = 0{,}3773\,\sigma_x + 0{,}4352\,\sigma_y + 0{,}1875\,\sigma_z$$

Eigenvektorkoeffizienten des Vektors der Marktanteile (nach vier Monaten):

$$c_1 = (\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 \wedge \mathbf{v}_3)^{-1}\,(\mathbf{x}_4 \wedge \mathbf{v}_2 \wedge \mathbf{v}_3) = 0{,}1000$$
$$c_2 = (\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 \wedge \mathbf{v}_3)^{-1}\,(\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{x}_4 \wedge \mathbf{v}_3) = 0{,}0648$$
$$c_3 = (\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 \wedge \mathbf{v}_3)^{-1}\,(\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 \wedge \mathbf{x}_4) = 0{,}0125$$

Darstellung des Vektors der Marktanteile als Linearkombination der Eigenvektoren:

$$\mathbf{x}_4 = 0{,}1000\,\mathbf{v}_1 + 0{,}0648\,\mathbf{v}_2 + 0{,}0125\,\mathbf{v}_3$$

Gesuchte Eigenvektorkoeffizienten des Vektors der Marktanteile (nach einem Monat):

$$c_{1^*} = \frac{c_1}{\lambda_1^{\,3}} = 0{,}1$$
$$c_{2^*} = \frac{c_2}{\lambda_2^{\,3}} = 0{,}3$$
$$c_{3^*} = \frac{c_3}{\lambda_3^{\,3}} = 0{,}1$$

Gesuchter Vektor der Marktanteile (nach einem Monat):

$$\mathbf{x}_4 = 0{,}1\,\mathbf{v}_1 + 0{,}3\,\mathbf{v}_2 + 0{,}1\,\mathbf{v}_3 = 0{,}7\,\sigma_x + 0{,}2\,\sigma_y + 0{,}1\,\sigma_z$$

Ergebnis: Einen Monat nach der Anzeigenkampagne haben die Tankstellen Marktanteile von:

Tankstelle **A**:	70 %
Tankstelle **B**:	20 %
Tankstelle **C**:	10 %

Ein wesentlicher didaktischer Vorteil der Geometrischen Algebra zeigt sich, wenn Vektoren mit Hilfe der äußeren Algebra in die Eigenvektorkomponenten aufgespalten werden.

Ein Schlussfazit:

Mit Hilfe von Eigenwerten und Eigenvektoren kann eine „Matrizenrechnung ohne Matrizen" praktiziert werden. Alles, was mit Hilfe von Matrizengleichungen rechnerisch zugänglich ist, ist auch ohne eine direkte Nutzung von Matrizen mathematisch fassbar, wenn Eigenwerte und Eigenvektoren bekannt sind. Physikalische und nicht-physikalische Problemstellungen können somit aus unterschiedlichsten konzeptuellen Perspektiven diskutiert und analysiert werden.
Die Geometrische Algebra ist somit ein mathematisches Werkzeug, das einen solchen Perspektivwechsel ermöglicht und didaktisch erfolgreich trägt.