Eigenwerte und Eigenvektoren aus geometrisch-algebraischer Perspektive

Martin Erik Horn

HWR – Hochschule für Wirtschaft und Recht Berlin / Berlin School of Economics and Law
Badensche Str. 52, 10825 Berlin
Email: e_hornm@doz.hwr-berlin.de

Kurzfassung

Mit Hilfe der Geometrischen Algebra lässt sich eine an physikalischen und physikdidaktischen Setzungen orientierte moderne Lineare Algebra konstruieren, die auf vorangegangenen Frühjahrstagungen in Wuppertal und Hannover vorgestellt wurde. Diese modere Lineare Algebra beruht auf einem konzeptuellen Gleichklang algebraischer und geometrischer Deutungen, wobei die Koeffizientenmatrix Linearer Gleichungssysteme durch Koeffizientenvektoren ersetzt wird. Die Lösung eines Linearen Gleichungssystems ergibt sich dann durch Volumenvergleich der durch die Koeffizientenvektoren aufgespannten (Hyper-)Parallelepipede bzw. Parallelotope.

Dieser physikdidaktisch motivierte Ansatz wird nun in einer weiteren Ausarbeitung auf Eigenwerte und Eigenvektoren übertragen. Dieser Zugang wird unter Einbezug von Beispielen aus der Unterrichtspraxis im fachhochschulischen Rahmen vorgestellt und diskutiert.

1. Einleitung: Einordnung des Beitrags

Mit Hilfe der Geometrischen Algebra lässt sich eine an physikalischen und physikdidaktischen Setzungen orientierte moderne Lineare Algebra konstruieren, die auf einem konzeptuellen Gleichklang algebraischer und geometrischer Deutungen beruht.

Dabei wird die Koeffizientenmatrix Linearer Gleichungssysteme durch Koeffizientenvektoren ersetzt. Die Lösung Linearer Gleichungssysteme ergibt sich dann durch Volumenvergleich der durch die Koeffizientenvektoren aufgespannten (Hyper-) Parallelepipede bzw. Parallelotope.

Dieser Ansatz wurde bzw. wird derzeit in den Wintersemestern an der HWR Berlin in den englischsprachigen Kursen der Poolveranstaltungen zur Wirtschaftsmathematik (LV-Nr. 200 691.01) sukzessive erprobt.

Im Wintersemester 2014/2015 erfolgte die Erprobung des entwickelten Kursmaterials zu den Grundlagen der Geometrischen Algebra [1], [2], zur Lösung einfacher Linearer Gleichungssysteme mit zwei oder drei Unbekannten [3], zum Direkten Produkt und zur Lösung höher-dimensionaler Linearer Gleichungssysteme mit mehr als drei Unbekannten [4].

Im Wintersemester 2015/2016 erfolgte die Erörterung des Gauß-Verfahrens im Kontext von Koordinatentransformationen [5], [6], wobei aus Zeitgründen die Darstellung der Grundlagen zur Geometrischen Algebra didaktisch und vor allem auch zeitlich reduziert in Anlehnung an eine zwischenzeitlich erfolgte Erprobung mit relativ leistungsschwachen Studierenden an der MSB [7], [8], [9] erfolgte.

Im Wintersemester 2016/2017 erfolgte nun die Erprobung des in diesem Beitrag vorgestellten Ansatzes zur Darstellung von Eigenvektoren und Eigenwerten im Rahmen der Geometrischen Algebra [24], sowie die Nutzung von Sandwich-Produkten zur Lösung Linearer Gleichungssysteme.

Für zukünftige Semester geplant ist die Erprobung der Nutzung des Programm-Tools „Geometric Algebra Algorithms Optimizer“ (GAALOP) zur Lösung Linearer Gleichungssysteme [10].

2. Kernpunkte der Geometrischen Algebra

Das mathematische Grundgerüst der Geometrischen Algebra ist ein ambivalentes Konstrukt. Zum einen ist es ein zutiefst in der Mathematik verorteter Ansatz, der von Graßmann [11] zu Beginn mathematisch-algebraisch erdacht und eingeführt wurde, so dass „die Algebra eine wesentlich veränderte Gestalt gewinnen“ werde [11, § 45, S. 71].

Doch zum anderen war Graßmann als ein physikalisch denkender Mathematiker immer darauf ausgerichtet, die von ihm erdachten algebraischen Zusammenhänge geometrisch zu unterlegen und so konzeptuell zu festigen.

In einer frühen Deutung der Graßmannschen Ideen betont Peirce diesen Aspekt: „In truth, Grassmann has got hold (though he did not say so) of an eightfold algebra, which may be written in my system as follows: – Three Rectangular Vectors – – Three Rectangular Planes – – One Solid – – Unity“ [12].

Oder mit anderen, moderneren Worten: „We have now reached the point which is liable to cause the greatest intellectual shock. We have played an apparently harmless game with the algebra of 3-dimensional vectors and found (…) exactly the algebra of the Pauli spin matrices“ [13, S. 1184].

Das ist der zentrale Kernpunkt der Geometrischen Algebra: Graßmann beschrieb mit seinem Ansatz eine (verallgemeinerte) Pauli-Algebra, deren Grundgrößen räumlich interpretiert werden.

Die drei Pauli-Matrizen σ_x, σ_y, σ_z bzw. m verallgemeinerten Pauli-Matrizen σ_i mit $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ repräsentieren dabei Basisvektoren eines drei- bzw. m-dimensionalen Euklidischen Raums. Ein Vektor **r** kann somit immer als Linearkombination von Pauli-Matrizen

$$\mathbf{r} = \sum_{i=1}^{m} r_i \sigma_i \qquad \{1\}$$

dargestellt werden.

3. Lineare Gleichungssysteme

Jedes Lineare Gleichungssystem

$$\mathbf{A}\,\vec{x} = \vec{r} \qquad \text{mit } \mathbf{A} = (a_{ij}) \qquad \{2\}$$

bzw. zeilenweise

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = r_i \qquad i \in \{1, 2, \ldots, m\} \qquad \{3\}$$

kann durch Geometrisierung mit Hilfe von n Koeffizientenvektoren

$$\mathbf{a}_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \sigma_i \qquad j \in \{1, 2, \ldots, n\} \qquad \{4\}$$

somit in eine Linearkombination dieser Koeffizientenvektoren

$$\sum_{j=1}^{n} \mathbf{a}_j x_j = \mathbf{r} \qquad \{5\}$$

überführt werden, indem jede der m Zeilen {3} gemäß Gl. {1} mit einem entsprechenden Basisvektor σ_i multipliziert wird und sodann alle Terme aufaddiert werden.

Diese Geometrisierung bewirkt gleichzeitig eine algebraische Verdichtung, indem die m unterschiedlichen Linearen Gleichungen {3} in einer einzigen Gleichung {5} zusammengefasst werden. Oder umgangssprachlich: Anstelle von m verschiedenen Zeilen {3} wird das Lineare Gleichungssystem {2} nun in nur noch einer einzigen Zeile {5} geschrieben:

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{\mathbf{i=1}}^{m} a_{ij} \sigma_i x_j = \mathbf{r} \qquad \{6\}$$

Da die Mathematik der Eigenwerte und Eigenvektoren in der Regel nur anhand quadratischer Matrizen diskutiert wird (siehe beispielsweise die Darstellungen in [14], [15], [16], [17], [18], [19], [20], [21]) wird sich die Diskussion im Folgenden auf n Lineare Gleichungen mit n Unbekannten beziehen, so dass $m = n$ gesetzt wird. Es werden also lediglich quadratische Matrizen **A** in Gl. {2} betrachtet. Es gilt dann:

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{\mathbf{i=1}}^{n} a_{ij} \sigma_i x_j = \mathbf{r} \qquad \{7\}$$

4. Grundlagen der Eigen-Mathematik

Die mathematische Perspektive, die bei der Diskussion von Eigenwerten und Eigenvektoren eingenommen wird, ist die einer reinen Streckungswirkung. Es werden diejenigen Vektoren $\vec{v}$ betrachtet, die bei Einwirkung der Matrix **A** in Gl. {2} keine Richtungsänderung, sondern lediglich eine Längenänderung erfahren:

$$\mathbf{A}\,\vec{v} = \lambda\,\vec{v} \qquad \{8\}$$

Die Streckungsfaktoren λ werden dann Eigenwerte, die richtungskonstanten Vektoren $\vec{v}$ Eigenvektoren der Matrix **A** genannt.

Dies ist äquivalent zur Darstellung

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\,\vec{v} = \mathbf{0} \qquad \{9\}$$

mit Hilfe einer charakteristischen Matrix $(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{E})$, wobei **E** die n-dimensionale Einheitsmatrix bezeichnet. Im Fall nicht-trivialer Lösungen ist diese charakteristische Matrix singulär.

Die Übersetzung dieser simplen Darstellung in die Sprache der Geometrischen Algebra erfolgt analog zur Geometrisierung beim Schritt von Gl. {3} zu Gl. {4}. Die charakteristische Matrix kann spaltenweise betrachtet und somit zwanglos als Komposition von n charakteristischen Koeffizientenvektoren

$$\mathbf{a}_j - \lambda\sigma_j = \sum_{i=1}^{n} (a_{ij} - \lambda\delta_{ij})\sigma_i \quad \text{mit } \delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ für } i = j \\ 0 \text{ für } i \neq j \end{cases} \qquad \{10\}$$

geschrieben werden.

Da die charakteristische Matrix singulär sein muss, sind die charakteristischen Koeffizientenvektoren nicht linear unabhängig. Dies hat die geometrisch-algebraische Konsequenz, dass das äußere Produkt aller charakteristischen Koeffizientenvektoren Null ergeben muss. Somit erhält man das charakteristische äußere Produkt

$$(\mathbf{a}_1 - \lambda\sigma_1) \wedge (\mathbf{a}_2 - \lambda\sigma_2) \wedge \ldots \wedge (\mathbf{a}_n - \lambda\sigma_n) = 0 \qquad \{11\}$$

in Analogie zur Determinante der charakteristischen Matrix von

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{E}) = 0 \qquad \{12\}$$

Durch Multiplikation von Gl. {11} mit der Inversen $\mathbf{I}^{-1}$ (oder Reversen $\mathbf{I}^{\sim}$) des Pseudoskalars

$$\mathbf{I} = \sigma_1\sigma_2\sigma_3\ldots\sigma_n = \prod_{i=1}^{n} \sigma_i \qquad \{13\}$$

ergibt sich linksseitig das charakteristische Polynom

$$\big((\mathbf{a}_1 - \lambda\sigma_1) \wedge (\mathbf{a}_2 - \lambda\sigma_2) \wedge \ldots \wedge (\mathbf{a}_n - \lambda\sigma_n)\big)\,\mathbf{I}^{-1} \qquad \{14\}$$

dessen Nullstellen in Form einer charakteristischen Gleichung (Eigenwert-Gleichung)

$$\big((\mathbf{a}_1 - \lambda\sigma_1) \wedge (\mathbf{a}_2 - \lambda\sigma_2) \wedge \ldots \wedge (\mathbf{a}_n - \lambda\sigma_n)\big)\,\mathbf{I}^{-1} = 0 \qquad \{15\}$$

die Eigenwerte λ_k bezeichnen. Gelingt die nicht immer einfache Lösung dieser Gleichung n-ter Ordnung, sind die Eigenwerte bekannt.

Durch eine Lösung der maximal n Linearen Gleichungssysteme $\mathbf{A}\,\vec{v}_k = \lambda_k\,\vec{v}_k$ {8} auf Grundlage des Grassmannschen Ansatzes [11, § 45]

$$(\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 \wedge \ldots \wedge \mathbf{a}_n)\, v_{ki} = \mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 \wedge \ldots \wedge \mathbf{a}_{k-1} \wedge \lambda \mathbf{v_k} \wedge \mathbf{a}_{k+1} \wedge \ldots \wedge \mathbf{a}_n \quad \{16\}$$

können sodann die Eigenvektoren $\mathbf{v_k}$ in geometrisch-algebraischer Schreibweise

$$\mathbf{v_k} = \sum_{i=1}^{n} v_{ki}\sigma_i \qquad \text{mit } k \le n \quad \{17\}$$

berechnet werden. Die Eigenvektoren können gegebenenfalls auch normiert zu

$$\mathbf{n_k} = \frac{\mathbf{v_k}}{\mathbf{v_k}^2} = \frac{1}{\mathbf{v_k}^2} \sum_{i=1}^{n} v_{ki}\sigma_i \quad \{18\}$$

angegeben werden.

5. Beispiel: Das Tankstellenproblem (Teil I)

Anhand eines Beispiels aus dem wirtschaftsmathematischen Bereich (siehe Abb. 1) können die Vor- und Nachteile der Nutzung der Geometrischen Algebra bei der Ermittlung von Eigenwerten und Eigenvektoren aufgezeigt werden.

Ähnlich wie in der Physik kommen diese insbesondere in abgeschlossenen Systemen (beispielsweise bei Berechnung von Eigenschwingungen ohne äußere Krafteinwirkung) klar zum Tragen.

größter Eigenwert $\lambda_1 = 1$ beträgt. Die spaltenorientiert ermittelten Koeffizientenvektoren

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= 0{,}70\,\sigma_x + 0{,}20\,\sigma_y + 0{,}10\,\sigma_z \\ \mathbf{b} &= 0{,}10\,\sigma_x + 0{,}80\,\sigma_y + 0{,}10\,\sigma_z \quad \{20\} \\ \mathbf{c} &= 0{,}20\,\sigma_x + 0{,}20\,\sigma_y + 0{,}60\,\sigma_z \end{aligned}$$

führen sofort auf die charakteristischen Koeffizientenvektoren

$$\begin{aligned} \mathbf{a} - \lambda\,\sigma_x &= (0{,}70 - \lambda)\,\sigma_x + 0{,}20\,\sigma_y + 0{,}10\,\sigma_z \\ \mathbf{b} - \lambda\,\sigma_y &= 0{,}10\,\sigma_x + (0{,}80 - \lambda)\,\sigma_y + 0{,}10\,\sigma_z \quad \{21\} \\ \mathbf{c} - \lambda\,\sigma_z &= 0{,}20\,\sigma_x + 0{,}20\,\sigma_y + (0{,}60 - \lambda)\,\sigma_z \end{aligned}$$

Das charakteristische äußere Produkt

$$\begin{aligned} &(\mathbf{a} - \lambda\,\sigma_x) \wedge (\mathbf{b} - \lambda\,\sigma_y) \wedge (\mathbf{c} - \lambda\,\sigma_z) \quad \{22\} \\ &\quad = (-\,\lambda^3 + 2{,}10\,\lambda^2 - 1{,}40\,\lambda_y + 0{,}30)\,\sigma_x\sigma_y\sigma_z \end{aligned}$$

kann dann als charakteristisches Volumen des durch die drei charakteristischen Koeffizientenvektoren aufgespannten Parallelepipeds interpretiert werden. Im nächsten Schritt wird das charakteristische Polynom

$$\begin{aligned} &(\mathbf{a} - \lambda\,\sigma_x) \wedge (\mathbf{b} - \lambda\,\sigma_y) \wedge (\mathbf{c} - \lambda\,\sigma_z)\,\sigma_z\sigma_y\sigma_x \\ &\quad = (-\,\lambda^3 + 2{,}10\,\lambda^2 - 1{,}40\,\lambda_y + 0{,}30) \quad \{23\} \end{aligned}$$

Null gesetzt, so dass aus der charakteristischen Gleichung

$$\begin{aligned} 0 &= -\,\lambda^3 + 2{,}10\,\lambda^2 - 1{,}40\,\lambda_y + 0{,}30 \\ &= -\,(\lambda - 1)\,(\lambda - 0{,}60)\,(\lambda - 0{,}50) \quad \{24\} \end{aligned}$$

Die Marktanteile der drei Tankstellen A, B, C einer kleinen Stadt entwickeln sich gemäß der rechts angegebenen monatlichen Änderungsraten.

Vier Monate nach einer Anzeigenkampagne von Tankstelle A haben die Tankstellen die folgenden Marktanteile:

Tankstelle A: 37,73 %
Tankstelle B: 43,52 %
Tankstelle C: 18,75 %

Berechnen Sie mit Hilfe von zuvor ermittelten Eigenwerten und Eigenvektoren die Marktanteile der drei Tankstellen, die diese einen Monat nach der Werbekampagne hatten.

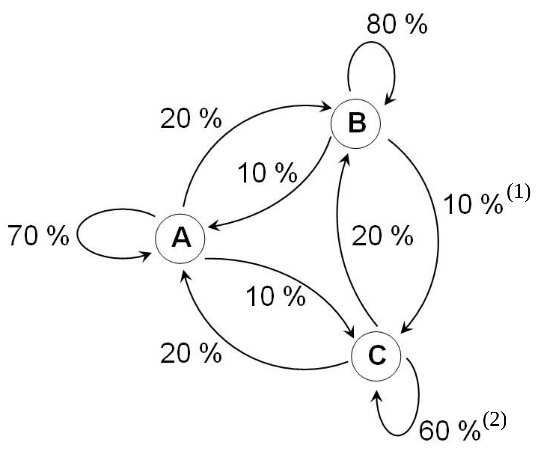

Abb.1: Das Tankstellenproblem aus [24].
Lesebeispiele: (1) 10 % der Kunden, die im vergangenen Monat bei Tankstelle B tankten, tanken jetzt bei Tankstelle C.
(2) 60 % der Kunden, die im vergangenen Monat bei Tankstelle C tankten, tanken weiterhin bei Tankstelle C.

Die in Abb. 1 angegebenen Werte können in der Matrix der Änderungsraten $\mathbf{T}$

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0{,}70 & 0{,}10 & 0{,}20 \\ 0{,}20 & 0{,}80 & 0{,}20 \\ 0{,}10 & 0{,}10 & 0{,}60 \end{pmatrix} \quad \{19\}$$

zusammengefasst werden. Da die Elemente dieser Matrix spaltenweise zu 1 = 100 % aufaddieren, handelt es sich um eine stochastische Matrix, deren

die gesuchten Eigenwerte bestimmt werden können.

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1 \\ \lambda_2 &= 0{,}60 \quad \{25\} \\ \lambda_3 &= 0{,}50 \end{aligned}$$

Wesentlicher didaktischer Vorteil dieser Herangehensweise ist die Einbeziehung der geometrischen Deutung der charakteristischen Determinante als äußeres Produkt und somit geometrisch als Volumen eines charakteristischen Parallelepipeds.

Im nächsten Schritt werden die drei Eigenvektoren $\mathbf{v_k}$ auf Grundlage der Streckungsgleichung {8}

$$\mathbf{a}\, v_{kx} + \mathbf{b}\, v_{ky} + \mathbf{c}\, v_{kz} = \lambda\, (v_{kx}\, \sigma_x + v_{ky}\, \sigma_y + v_{kz}\, \sigma_z) \qquad \{26\}$$

bzw.

$$(\mathbf{a} - \lambda\, \sigma_x)\, v_{kx} + (\mathbf{b} - \lambda\, \sigma_y)\, v_{ky} + (\mathbf{c} - \lambda\, \sigma_z)\, v_{kz} = 0 \qquad \{27\}$$

oder aber auf Grundlage des Grassmannschen Ansatzes {16}

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c})\, v_{kx} &= \lambda\, \mathbf{v_k} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} \\ (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c})\, v_{ky} &= \lambda\, \mathbf{a} \wedge \mathbf{v_k} \wedge \mathbf{c} \qquad \{28\} \\ (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c})\, v_{kz} &= \lambda\, \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{v_k} \end{aligned}$$

beispielsweise zu

$$\begin{aligned} \mathbf{v_1} &= 3\, \sigma_x + 5\, \sigma_y + 2\, \sigma_z \\ \mathbf{v_2} &= \sigma_x - \sigma_y \qquad \{29\} \\ \mathbf{v_3} &= \sigma_x - \sigma_z \end{aligned}$$

oder aber normiert zu

$$\begin{aligned} \mathbf{n_1} &= \frac{1}{\sqrt{38}}\, (3\, \sigma_x + 5\, \sigma_y + 2\, \sigma_z) \\ \mathbf{n_2} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\, (\sigma_x - \sigma_y) \qquad \{30\} \\ \mathbf{n_3} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\, (\sigma_x - \sigma_z) \end{aligned}$$

bestimmt.

Konzeptuell und mathematisch-ästhetisch ist der Grassmannsche Ansatz {16} hier sicherlich tragfähiger. Wieder werden geometrische Größen (Volumina von Parallelepipeden, siehe Gl. {28}) algebraisch gedeutet und in sehr konkreter, nachvollziehbarer Weise in Relation zueinander gesetzt.

Handfest unterrichtspraktisch mag jedoch die Streckungsgleichung {26} ebenso gut für eine didaktische Umsetzung geeignet sein, da diese mit Hilfe des Falkschen Schemas für die Lernenden unter Umständen leichter zugänglich ist, weil hier zielgerichtet auf Bekanntes zurückgegriffen werden kann.

Insbesondere, wenn der rechnerische Aufwand beider Lösungsstrategien {26} und {28} verglichen wird, ergeben sich keine wesentlichen Unterschiede. Beide Ansätze sind mit einem gewissen Rechenaufwand verbunden, der in Abhängigkeit davon, welche Rechenstrategien zuvor von den Lernenden vertieft eingeübt wurden, schneller oder weniger schnell zu bewältigen sein wird.

Aus diesem Grund sind in den auch als Skript nutzbaren OHP-Folien beide Vorgehensweisen aufgeführt (siehe [24, S. 38 und S. 39] zur Ermittlung des Wertes für λ_1, [24, S. 41 und S. 42] für λ_2 sowie [24, S. 44 und S. 45] für λ_3).

Aber gerade dies auch ein Ziel mathematischen Lehrens und Lernens: Eine Methodenvielfalt zu vermitteln, die die Lernenden befähigt, Problemstellungen unter Nutzung auch sehr verschiedener Ansätze auf verschiedene Weisen zu bewältigen und zu lösen.

6. Interpretation der Zwischenergebnisse

Da es sich bei der Matrix der Änderungsraten {19} um eine stochastische Matrix handelt, kann der mit dem höchsten Eigenwert $\lambda_1 = 1$ verknüpfte Eigenvektor $\mathbf{v_1}$ leicht interpretiert werden.

Zum einen zeigt Gl. {8}, dass dieser Eigenvektor ein Vielfaches des Vektor konstanter Marktanteile $\mathbf{x_1}$

$$\mathbf{x_1} = \frac{1}{10}\, \mathbf{v_1} = 0{,}30\, \sigma_x + 0{,}50\, \sigma_y + 0{,}20\, \sigma_z \qquad \{31\}$$

mit

$$\mathbf{A}\, \vec{x}_1 = \vec{x}_1 \qquad \{32\}$$

sein wird. Der Eigenvektor $\mathbf{v_1}$ bzw $\mathbf{x_1}$ beschreibt als Zustandsvektor somit den Gleichgewichtszustand des Marktes.

Zum anderen wird in diesem einfachen Modell das Marktverhalten durch Markov-Ketten [16, Kap. 9] modelliert. Ein beliebiger Marktzustand $\mathbf{x_{bel}}$ strebt für hohe n

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{A}^n \vec{x}_{bel} = \vec{x}_1 \qquad \{33\}$$

und damit für große Zeitdauern gegen diesen Gleichgewichtszustand $\mathbf{x_1}$ konstanter Marktanteile. Der mit $\lambda_1 = 1$ verknüpfte Eigenvektor $\mathbf{v_1}$ bzw. $\mathbf{x_1}$ beschreibt somit das Langzeitverhalten.

Dies kann gezeigt werden [24, S. 67], indem der beliebige Zustandsvektor $\mathbf{x_{bel}}$ in die Eigenvektorkomponenten (siehe z.B. [24, S. 63]) zerlegt wird und die Potenzen der anderen Eigenwerte λ_2^n bzw. λ_3^n, die für hohe n gegen Null streben, analysiert werden.

Die so motivierte Zerlegung von Zustandsvektoren spielt auch eine entscheidende Rolle, wenn alternative Zugänge zur Matrizenmultiplikation und zur Lösung Linearer Gleichungssysteme in den folgenden Abschnitten diskutiert werden.

7. Matrizenmultiplikation ohne Matrizen

Konzeptioneller Kern der mathematischen Analyse von Problemstellungen aller Art und aller Sachgebiete ist die Beschreibung, die Erklärung und – bei Hypothesenprüfung – auch die Vorhersage von Zustandsänderungen. Ein Zustand wird unter Einwirkung von Prozessen aller Art in einen weiteren Zustand überführt.

In der Linearen Algebra werden rein lineare Änderungen betrachtet, die üblicherweise mathematisch durch die Wirkung – also die linksseitige Prä-Multiplikation – einer Änderungsmatrix $\mathbf{A} = (a_{ij})$ auf einen Zustandsvektor $\vec{x}$ nach Gl. {2} mit $\mathbf{A}\, \vec{x} = \vec{r}$ beschrieben werden, so dass ein neuer Zustand entsteht, der durch den resultierenden Zustandsvektor $\vec{r}$ dargestellt wird.

Diese Art der mathematischen Darstellung linearer Änderungen wird in einführenden Kursen meist sehr, sehr ausführlich behandelt. Die Matrizenmultiplikation mit Matrizen ist wesentlicher Bestandteil der hochschulischen mathematischen Grundbildung.

Das gleiche Ziel – die mathematisch tragfähige Beschreibung linearer Änderungen und deren Wirkung auf Zustandsvektoren – kann jedoch auch in einer vollkommen matrizenfreien Mathematik erreicht werden, wenn die Eigenwertinformation zur Modifikation von Zustandsvektoren herangezogen wird.

Bei der Eigenwert-Mathematik handelt es sich somit im Kern um eine Mathematik, die ...

... Matrizenmultiplikationen
ohne Matrizen ...

Abb.2: Zentrale mathematische Motivation der Nutzung von Eigenwerten und Eigenvektoren.

... beschreibt. Es wäre also möglich, in einer alternativen Strukturierung der Mathematik vollkommen auf Matrizen zu verzichten und sich bei der Darstellung linearer Änderung alleine auf Eigenwerte und Eigenvektoren zu stützen.

Darüber hinaus sind die mathematische Eleganz und die strukturelle Schönheit von Eigenwertrechnungen überzeugend: Zahlreiche Rechnungen sind weniger kompliziert, wenn diese unter Zuhilfenahme der Eigenwertinformation durchgeführt werden.

Wie sieht die Matrizenmultiplikation ohne Matrizen nun aus? Wie im vergangenen Abschnitt bereits angedeutet, wird die Wirkung der Matrix **A** auf den Vektor $\vec{x}$ durch eine Zerlegung von $\vec{x}$ in die Eigenvektor-Komponenten modelliert.

In der Sprache der Geometrischen Algebra kann die Zerlegung der Vektoren **x** und **r** (siehe Gl. {1})

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \sigma_i \qquad \mathbf{r} = \sum_{i=1}^{n} r_i \sigma_i \qquad \{34\}$$

in die Eigenvektorkomponenten mit den Eigenvektorkoeffizienten c_i und d_i

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{v_i} \qquad \mathbf{r} = \sum_{i=1}^{n} d_i \mathbf{v_i} \qquad \{35\}$$

auf Grundlage des Grassmannschen Ansatzes [11, § 45] sehr einfach vorgenommen werden, wenn die Eigenvektoren $\mathbf{v_i}$ bekannt sind.

$$(\mathbf{v_1} \wedge \mathbf{v_2} \wedge \ldots \wedge \mathbf{v_n})\, c_i = \mathbf{v_1} \wedge \mathbf{v_2} \wedge \ldots \wedge \mathbf{v_{i-1}} \wedge \mathbf{x} \wedge \mathbf{v_{i+1}} \wedge \ldots \wedge \mathbf{v_n} \qquad \{36\}$$

$$\Rightarrow \quad c_i = (\mathbf{v_1} \wedge \mathbf{v_2} \wedge \ldots \wedge \mathbf{v_n})^{-1} (\mathbf{v_1} \wedge \mathbf{v_2} \wedge \ldots \wedge \mathbf{v_{i-1}} \wedge \mathbf{x} \wedge \mathbf{v_{i+1}} \wedge \ldots \wedge \mathbf{v_n}) \qquad \{37\}$$

und

$$(\mathbf{v_1} \wedge \mathbf{v_2} \wedge \ldots \wedge \mathbf{v_n})\, d_i = \mathbf{v_1} \wedge \mathbf{v_2} \wedge \ldots \wedge \mathbf{v_{i-1}} \wedge \mathbf{r} \wedge \mathbf{v_{i+1}} \wedge \ldots \wedge \mathbf{v_n} \qquad \{38\}$$

$$\Rightarrow \quad d_i = (\mathbf{v_1} \wedge \mathbf{v_2} \wedge \ldots \wedge \mathbf{v_n})^{-1} (\mathbf{v_1} \wedge \mathbf{v_2} \wedge \ldots \wedge \mathbf{v_{i-1}} \wedge \mathbf{r} \wedge \mathbf{v_{i+1}} \wedge \ldots \wedge \mathbf{v_n}) \qquad \{39\}$$

Die Matrizenmultiplikation {2}

$$\mathbf{A}\,\vec{x} = \mathbf{A} \sum_{i=1}^{n} c_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^{n} c_i \lambda_i \vec{v}_i = \vec{r} \qquad \{40\}$$

wird in der Geometrischen Algebra dann durch eine einfache Modifikation der Koeffizienten

$$d_i = c_i\, \lambda_i \qquad \{41\}$$

errechnet, so dass der resultierende Vektor **r** als

$$\mathbf{r} = \sum_{i=1}^{n} c_i \lambda_{\mathbf{i}} \mathbf{v_i} \qquad \{42\}$$

geschrieben wird.

8. Lösung Linearer Gleichungssysteme

Wesentliches Lernziel der einführenden Kurse in den Pool-Veranstaltungen zur Wirtschaftsmathematik an der HWR Berlin ist nicht, die Mathematik von Eigenwertproblemen zu vermitteln, sondern die bereits angesprochene Methodenvielfalt im Bereich der Lösung Linearer Gleichungssysteme umzusetzen.

Primäres Ziel des hier vorgestellten Unterrichtsansatzes muss deshalb sein, neben den zuvor mit den Studierenden behandelten Lösungsstrategien auf Grundlage von Cramer, Grassmann und Gauß Lineare Gleichungssystem mit Hilfe von Eigenwerten und Eigenvektoren zu lösen. Wenn Eigenwerte und Eigenvektoren bekannt sind, wird diese Lösung zu einer starken konzeptuellen Alternative.

Diese Situation ist gerade auch für den physikalischen Bereich interessant, wenn in Experimenten die einzelnen Änderungsraten (damit die konstituierenden Elemente der Matrix **A** von Gl. {2}) nur schwer oder nur mit großen Fehlern behaftet bestimmt werden können, die Eigenwertinformation jedoch sehr genau und experimentell leicht zugänglich ermittelt werden kann.

Ist der resultierende Vektor **r** gegeben und wird der Vektor **x** gesucht, kann die Lösung dieses Linearen Gleichungssystems {40} in Analogie zu den Gleichungen {41} und {42} durch Division der Koeffizienten d_i durch die Eigenwerte λ_i

$$c_i = \frac{d_i}{\lambda_i} \qquad \{43\}$$

sehr leicht errechnet werden. Der gesuchte Vektor **x** ergibt sich dann zu

$$\mathbf{r} = \sum_{i=1}^{n} \frac{d_i}{\lambda_i} \mathbf{v_i} \qquad \{44\}$$

Sollten Eigenwerte und Eigenvektoren also nicht erst ermittelt werden müssen, sondern bereits bekannt sein, ist diese Art der Lösung Linearer Gleichungssysteme die bei Weitem einfachste.

9. Beispiel: Das Tankstellenproblem (Teil II)

Diese Situation ist nun im zweiten Teil des Tankstellenproblems gegeben. Eigenwerte {25} und Eigenvektoren {29} liegen vor (siehe Abschnitt 5) und können zur Lösung der zweiten Teilaufgabe herangezogen werden.

Der gegebene Vektor **y** der Marktanteile vier Monate nach der Werbekampagne lautet in der Geometrischen Algebra:

$$\mathbf{y} = 0{,}3773\ \sigma_x + 0{,}4352\ \sigma_y + 0{,}1875\ \sigma_z \qquad \{45\}$$

Mit Hilfe von Gl. {37} können die entsprechenden Eigenvektorkoeffizienten

$$d_1 = (\mathbf{v_1} \wedge \mathbf{v_2} \wedge \mathbf{v_3})^{-1} (\mathbf{y} \wedge \mathbf{v_2} \wedge \mathbf{v_3}) = 0{,}1000 \qquad \{46\}$$

$$d_2 = (\mathbf{v_1} \wedge \mathbf{v_2} \wedge \mathbf{v_3})^{-1} (\mathbf{v_1} \wedge \mathbf{y} \wedge \mathbf{v_3}) = 0{,}0648 \qquad \{47\}$$

$$d_3 = (\mathbf{v_1} \wedge \mathbf{v_2} \wedge \mathbf{v_3})^{-1} (\mathbf{v_1} \wedge \mathbf{v_2} \wedge \mathbf{y}) = 0{,}0125 \qquad \{48\}$$

ermittelt werden. Der Vektor der Marktanteile vier Monate nach der Werbekampagne kann somit als folgende Linearkombination der Eigenvektoren geschrieben werden:

$$\mathbf{y} = 0{,}1000\ \mathbf{v_1} + 0{,}0648\ \mathbf{v_2} + 0{,}0125\ \mathbf{v_3} \qquad \{49\}$$

Gemäß Gl. {43} kann nun mittels einfacher Division der Eigenvektorkoeffizienten durch die 3. Potenz der Eigenwerte

$$c_1 = \frac{d_1}{\lambda_1{}^3} = \frac{0{,}1000}{1^3} = 0{,}1 \qquad \{50\}$$

$$c_2 = \frac{d_2}{\lambda_2{}^3} = \frac{0{,}0648}{0{,}6^3} = 0{,}3 \qquad \{51\}$$

$$c_3 = \frac{d_3}{\lambda_3{}^3} = \frac{0{,}0125}{0{,}5^3} = 0{,}1 \qquad \{52\}$$

das Lineare Gleichungssystem $\mathbf{A}^3\ \vec{x} = \vec{y}$ gelöst werden. Der Vektor **x** der Marktanteile einen Monat nach der Werbekampagne lautet somit:

$$\mathbf{x} = 0{,}1\ \mathbf{v_1} + 0{,}3\ \mathbf{v_2} + 0{,}1\ \mathbf{v_3}$$

$$= 0{,}7\ \sigma_x + 0{,}2\ \sigma_y + 0{,}1\ \sigma_z \qquad \{53\}$$

Einen Monat nach der Anzeigenkampagne von Tankstelle A hatte Tankstelle A einen Marktanteil von 70 %, Tankstelle B einen Marktanteil von 20 % und Tankstelle C einen Marktanteil von 10 %.

10. Umsetzung im Rahmen der HWR-Kursdurchführung

Da in den Wintersemestern an der HWR Berlin traditionell mehr Zeit für die Kursdurchführung zur Verfügung steht als in den Sommersemestern (es werden Lehraufträge über 76 Semesterstunden vergeben, während in Sommersemestern nur maximal 68 Stunden à 45 Min. vorgesehen sind), kann der Unterrichtsstoff in den zusätzlichen zwei Kursterminen zu je vier Semesterstunden um weitere Themengebiete ergänzt werden.

Wie bereits in der Einleitung dargelegt, wurde diese zusätzliche Vorlesungszeit im WS 2016/2017 genutzt, um im englischsprachigen Wirtschaftsmathematik-Kurs (Mathematics for Business and Economics, Modulbeschreibung siehe [22]) den hier vorgestellten Ansatz zur Eigenwert-Mathematik auf Grundlage der Geometrischen Algebra mit den Studierenden zu erarbeiten.

Dabei wurden die Grundlagen der Geometrischen Algebra zuvor mit den Studierenden in jeweils ca. 20-minütigen Sequenzen zu Beginn der vorangegangenen Kurstermine in Form einer „Aufwärmphase mit moderner Mathematik" erarbeitet. Diese knappen Einführungsphasen umfassten inhaltlich in etwa die didaktisch reduzierte „Geometrische Algebra im Schnelldurchgang" des MSB-Kurses [7], [8] vom Sommersemester 2015.

Für die Erarbeitung der Eigenwert-Mathematik stand dann ein Kurstermin von vier Vorlesungsstunden zur Verfügung. Die Erarbeitung der Inhalte folgte in ihrer Struktur den beigefügten OHP-Folien [24].

Aus zeitlichen Gründen erfolgte dabei eine Konzentration auf die Eigenwert-Mathematik von (2 x2)- und (3 x 3)-Matrizen. Im Kurstermin konnte so nur das Problem der Materialverflechtung an Halloween („Halloween Product Engineering Problem") [24, S. 9 – 27, S. 83 – 86, S. 97 – 99] und das eben beschriebene Tankstellenproblem [24, S. 30 – 49, S. 52 – 60, S. 87 – 91, S. 100 – 105] ausführlicher mit den Studierenden durchgearbeitet werden, während die Eigenwert-Problematik der (4 x 4)-Dreiecksmatrix [24, S. 70 – 75, S. 92 – 95, S. 106 – 108] den Studierenden für eine vertiefende häuslichen Erarbeitung zur Verfügung gestellt wurde.

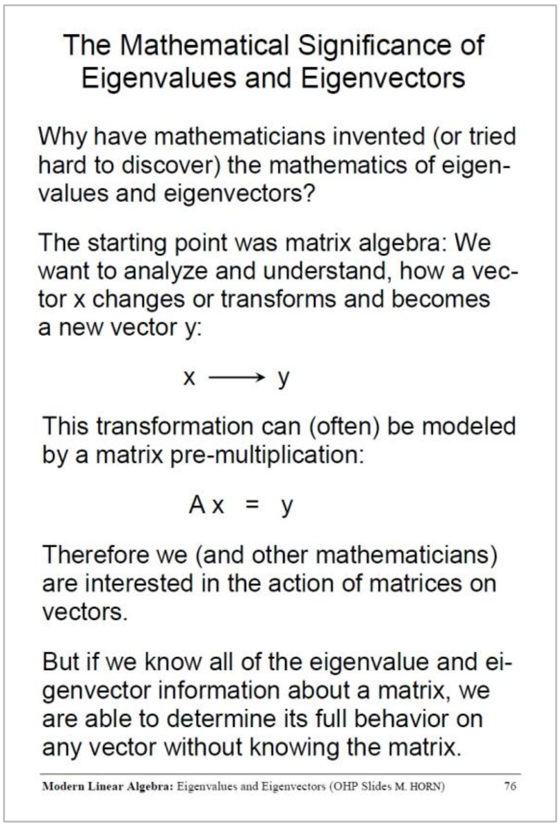

Abb.3: Seite 76 der OHP-Folien [24] zu Eigenwerten und Eigenvektoren im Rahmen der Geometrischen Algebra.

Das wesentliche Ergebnis dieser Erarbeitung lautet, dass eine solche Kursdurchführung problemlos möglich ist. Mit Fachhochschulstudierenden kann auch in Anfangssemestern eine anwendungsbezogene Mathematik der Eigenwerte und Eigenvektoren auf Grundlage der Geometrischen Algebra vertieft diskutiert werden. Voraussetzung dafür allerdings ist, dass

- bei den Studierenden Grundkenntnisse zur Linearen Algebra und insbesondere zur Matrizenrechnung vorhanden sind,
- die Geometrische Algebra zuvor mit den Studierenden behandelt und eingeübt wurde,
- entsprechende zeitliche Ressourcen zur Verfügung stehen.

Neben der Implementation geometrisch-algebraischer Denk- und Argumentationsmuster wurde dabei mit den Studierenden auch die konzeptuelle Positionierung und das innere logisch-strukturelle Zusammenspiel der Eigenwertproblematik im Gesamtgefüge der Mathematik hinterfragt, wie dies die eingesetzten Folien (Abb. 3 & 4) zeigen.

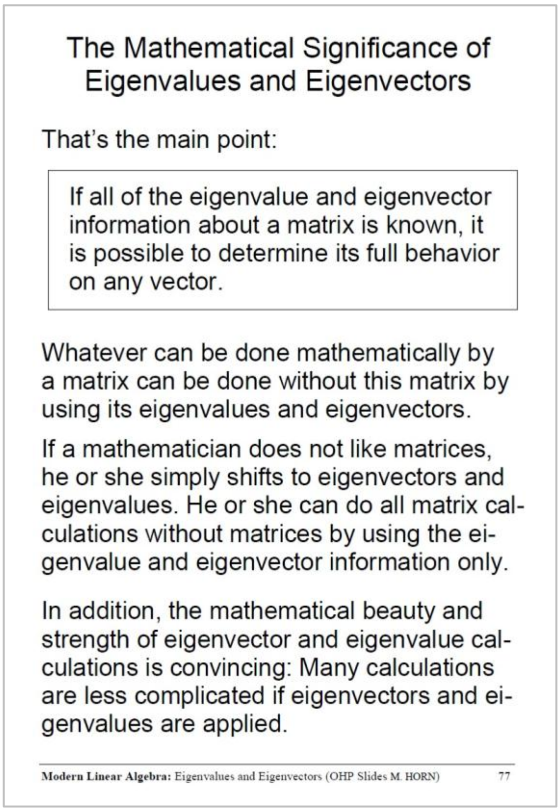

Abb.4: Seite 77 der OHP-Folien [24] zu Eigenwerten und Eigenvektoren im Rahmen der Geometrischen Algebra.

Obgleich die dabei erreichte Argumentationstiefe nicht sonderlich herausfordernd scheint, ist doch zu erwähnen, dass nicht alle Studierenden dieses Fachhochschulkurses den Schritt von einer interessierten Kenntnisnahme zu einem tatsächlich selbständigen und aktiven mathematischen Umgang mit der Eigenwert-Problematik gegangen sind.

Ein Teil der Studierenden, die sich in den Anfangssemestern auch immer mit dem Problem der eigenen akademischen Selbst- und Zielfindung konfrontiert sehen, scheint es ausreichend, im Kontext der Linearen Algebra die Mindestanforderungen einer möglichen Klausur zu erfüllen. Mathematische Ansätze, die über diese Mindestanforderungen herausgegen, bedingen eine gewisse akademische Neugier.

Und so ist es auch ein Ziel dieses Ansatzes zur geometrisch-algebraischen Fassung der Eigenwert-Problematik, diese akademische Neugier und eine kreative Offenheit für eine methodische Vielfalt zu wecken.

11. Literatur

[1] Horn, Martin Erik (2015): Lineare Algebra in physikdidaktischer Ausprägung. In: PhyDid B, Didaktik der Physik, Beiträge zur DPG-Frühjahrstagung des Fachverbands Didaktik der Physik in Wuppertal 2015, Url [17.12.2015]: http://www.phydid.de/index.php/phydid-b/article/view/626.

[2] Horn, Martin Erik (2014): Modern Linear Algebra. A Geometric Algebra Crash Course. Part I: Basics & Introduction. OHP-Folien des Kurses „Mathematics for Business and Economics" (Stand: 31. Dez. 2014), LV-Nr. 200 691.01, Hochschule für Wirtschaft und Recht Berlin / Berlin School of Economics and Law, Wintersemester 2014/2015. Veröffentlicht als Anhang des Beitrags [1], Url [17.12.2015]: http://www.phydid.de/index.php/phydid-b/article/view/626/794.

[3] Horn, Martin Erik (2014): Modern Linear Algebra. A Geometric Algebra Crash Course. Part II: Solving Systems of Linear Equations. OHP-Folien des Kurses „Mathematics for Business and Economics" (Stand: 31. Dez. 2014), LV-Nr. 200 691.01, Hochschule für Wirtschaft und Recht Berlin / Berlin School of Economics and Law, Wintersemester 2014/2015. Veröffentlicht als Anhang des Beitrags [1], Url [17.12.2015]: http://www.phydid.de/index.php/phydid-b/article/view/626/795.

[4] Horn, Martin Erik (2015): Modern Linear Algebra. A Geometric Algebra Crash Course. Part III: The Direct Product & Solving Higher-Dimensional Systems of Linear Equations. OHP-Folien des Kurses „Mathematics for Business and Economics" (Stand: 28. Jan. 2015), LV-Nr. 200 691.01, Hochschule für Wirtschaft und Recht Berlin / Berlin School of Economics and Law, Wintersemester 2014/2015. Veröffentlicht als Anhang des Beitrags [1], Url [17.12.2015]: http://www.phydid.de/index.php/phydid-b/article/view/626/796.

[5] Horn, Martin Erik (2016): Physikdidaktische Interpretation des Gaußschen Algorithmus. Phy Did B, Didaktik der Physik, Beiträge zur DPG-Frühjahrstagung in Hannover 2016. Url [17.12.

2016]: www.phydid.de/index.php/phydid-b/article/view/727.

[6] Horn, Martin Erik (2016): Modern Linear Algebra. A Geometric Algebra Crash Course. Part IV: Transformation of Coordinates & Gaussian Method of Solving a System of Linear Equations. OHP-Folien des Kurses „Mathematics for Business and Economics“ (Stand: 28. Jan. 2016), LV-Nr. 200 691.01, Hochschule für Wirtschaft und Recht Berlin / Berlin School of Economics and Law, Wintersemester 2015/ 2016. Veröffentlicht als Anhang des Beitrags [5], Url [17.12.2016]: http://www.phydid.de/index.php/phydid-b/article/view/727/892.

[7] Horn, Martin Erik (2016): Die Geometrische Algebra im Schnelldurchgang. Phy Did B, Didaktik der Physik, Beiträge zur DPG-Frühjahrstagung in Hannover 2016. Url [17.12. 2016]: http://www.phydid.de/index.php/phydid-b/article/view/723.

[8] Horn, Martin Erik (2015): Moderne Lineare Algebra – Ein Überblick (Stand: 28. Juni 2015). OHP-Folien des Kurses „Mathematik und Statistik“, Modul M 22 des Studiengangs Medical Controlling and Management, Medical School Berlin – Hochschule für Gesundheit und Medizin, Sommersemester 2015. Veröffentlicht als Anhang des Beitrags [7], Url [17.12.2016]: http://www.phydid.de/index.php/phydid-b/article/view/723/866.

[9] Horn, Martin Erik (2016): Moderne Lineare Algebra im wirtschaftsmathematischen Kontext. In: Walther Paravicini, Jörn Schnieder (Hrsg.): Hanse-Kolloquium zur Hochschuldidaktik der Mathematik 2015. Beiträge zum gleichnamigen Kolloquium an der Universität zu Lübeck, S. 103-129. Münster: WTM-Verlag.

[10] Horn, Martin Erik (2017): Lösung einer Aufgabe zu Linearen Gleichungssystemen aus der Han-Dynastie mit GAALOP als Taschenrechner-Ersatz. Zur Veröffentlichung vorgesehen in: BzMU – Beiträge zum Mathematikunterricht 2017. Münster: WTM-Verlag.

[11] Grassmann, Hermann (1844): Die Wissenschaft der extensiven Grösse oder die Ausdehnungslehre, eine neue mathematische Disciplin. Erster Theil, die lineale Ausdehnungslehre enthaltend. Leipzig: Verlag von Otto Wigand.

[12] Peirce, Charles Sanders (1877): Note on Grassmann's Calculus of Extension. In: Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences, Vol. 13 (gelesen am 10. Okt. 1877), S. 115-116.

[13] Gull, Stephan; Lasenby, Anthony; Doran, Chris (1993): Imaginary Numbers are not Real – The Geometric Algebra of Spacetime. In: Foundations of Physics, Vol. 23, No. 9, S. 1175-1201.

[14] Schmidt, Karsten; Trenkler, Götz (2015): Einführung in die Moderne Matrix-Algebra. Mit Anwendungen in der Statistik. 3. Auflage, Berlin, Heidelberg: Springer/Gabler.

[15] Vince, John (2012): Matrix Transforms for Computer Games and Animation. London: Springer-Verlag.

[16] Stöppler, Siegmar (1972): Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler: Lineare Algebra und ökonomische Anwendung. Uni-Taschenbücher/UTB 186, Opladen: Westdeutscher Verlag.

[17] Aleskerov, Fuad; Ersel, Hasan; Piontkovski, Dimitri (2011): Linear Algebra for Economists. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag.

[18] Lipschutz, Seymour; Lipson, Marc Lars (2009): Linear Algebra. Schaum's Outline Series, 4. Auflage, New York, Chicago: McGraw-Hill.

[19] Dowling, Edward Thomas (2001): Introduction to Mathematical Economics. Schaum's Outline Series, 3. Auflage. Chap. 12: Special Determinants and Matrices and Their Use in Economics. 3. New York, San Francisco: McGraw-Hill.

[20] Sterling; Mary Jane (2009):Linear Algebra for Dummies. Indianapolis, Indiana: Wiley.

[21] Anton, Howard; Rorres, Chris (2010): Elementary Linear Algebra. 10. Auflage. Hoboken, New Jersey: Wiley.

[22] HWR Berlin (2016): Elektronisches Vorlesungsverzeichnis der Hochschule für Wirtschaft und Recht Berlin, Wintersemester 2016/2017. Url [30. Okt. 2016]: https://campus4u.hwr-berlin.de.

Dem Beitrag beigefügte Dateien

[23] Horn, Martin Erik (2017): Poster DD 02.01, ‚Eigenwerte und Eigenvektoren aus geometrisch-algebraischer Perspektive‘ vom 20. März 2017, siehe auch: Verhandl. DPG (VI) 52, 2 (2017), Url [01. März 2017]: www.dpg-verhandlungen.de/year/2017/conference/dresden/part/dd/session/2/contribution/1.

[24] Horn, Martin Erik (2016): Modern Linear Algebra. A Geometric Algebra Crash Course. Part V: Eigenvalues and Eigenvectors. OHP-Folien des Kurses „Mathematics for Business and Economics“ (Stand: 28. Nov. 2016), LV-Nr. 200 691.01, Hochschule für Wirtschaft und Recht Berlin / Berlin School of Economics and Law, Wintersemester 2016/2017.