

## Eine Masse-Radius-Beziehung Weißer und Brauner Zwerge

- Ein einfaches Modell -

Sascha Hohmann\*

\*Didaktik der Physik, Adolf-Reichwein-Straße 2, Universität Siegen  
hohmann@physik.uni-siegen.de

### Kurzfassung

Diverse Studien zeigen, dass die Behandlung astrophysikalischer Themen das Interesse an der Physik steigern kann. Dementsprechend sollten derartige Themen in der Schule in allen Stufen behandelt werden, speziell wenn sie die Möglichkeit bieten, verschiedene Bereiche der Physik zu verbinden.

In der Astrophysik ist die Masse-Radius-Beziehung für Hauptreihensterne im Allgemeinen bekannt. Weniger verbreitet ist jedoch, dass sich für die meisten Himmelskörper im hydrostatischen Gleichgewicht eine Masse-Radius-Beziehung herleiten lässt und dass sich die Proportionalitäten dabei deutlich unterscheiden können.

Es wird gezeigt, wie man mit Oberstufenphysik und elementarer Mathematik eine Masse-Radius-Beziehung für Weiße und Braune Zwerge herleiten und dabei Mechanik, Quantenphysik und Thermodynamik verbinden kann. Gleichzeitig können die Lernenden erkennen, dass Weiße und Braune Zwerge – entgegen der Intuition – mit zunehmender Masse kleiner werden.

Mithilfe ähnlicher Überlegungen kann man auch für andere Himmelskörper eine Masse-Radius-Beziehung herleiten.

### 1. Motivation

In diesem Artikel soll ein Modell für Weiße und Braune Zwerge vorgestellt werden, mit dem sowohl die oberen Grenzmassen als auch die Masse-Radius-Beziehung beider Körper mit mathematisch elementaren Operationen (Grundrechenarten, Bruchrechnung, Potenzrechnung) bestimmt werden können. Es ergibt sich ein quantitativer Einblick in diese beiden exotischen Objekte und damit eine vereinfachte Erklärung, warum diese beiden Körper so existieren können. Trotzdem handelt es sich um quantenmechanische Körper, die sich nicht ohne weiteres beliebig weit elementarisieren lassen, ohne eine rein qualitative Beschreibung zu verwenden. Gleichzeitig bietet sich die Möglichkeit, das Interesse der Lernenden mithilfe astronomischer Themen zu fördern (vgl. [1]). Zusätzlich kann, sofern man eine fortgeschrittene Lerngruppe hat, mithilfe des Modells das freie Modellieren durch qualifizierte Annahmen nachvollzogen und geübt werden – eine große Schwierigkeit für Lernende (vgl. [2]) und es wird ein Bezug zu aktuellen Themen der Astrophysik gegeben. Das Modell kann auch für andere Himmelskörper erweitert werden (vgl. [3] und [4]).

### 2. Grundidee

Sowohl Weiße als auch Braune Zwerge befinden sich im hydrostatischen Gleichgewicht. Um dieses aufrecht zu erhalten, muss sich ein Gleichgewicht zwischen dem zum Zentrum wirkenden Gravitationsdruck auf der einen und einem dagegen wirkenden Gegendruck auf der anderen Seite einstellen. Würde der Gravitationsdruck überwiegen, so würde der Körper schrumpfen, überwiegt der Gegendruck,

so expandiert er. Den Gravitationsdruck kann man beispielsweise mithilfe eines Säulenmodells abschätzen, bei dem eine Materiesäule konstanter Dichte in (infinitesimal dünne) Schichten zerlegt wird. Für jede dieser Schichten gilt  $\Delta P = \rho g(h)\Delta h$ , mit der (konstanten) Dichte  $\rho$ , der Gravitationsbeschleunigung  $g$  im Abstand  $h$  zum Zentrum und der Schichtdicke  $\Delta h$ . Betrachtet man den Druck bis zum Zentrum des Körpers, so erhält man:

$$P_{\text{Gravitation}} = P_{\text{Gegendruck}} = \frac{3GM^2}{8\pi R^4} \quad \{1\}$$

Die maximal mögliche Masse  $M$  und der zugehörige Radius  $R$  hängen also von der Art des Gegendrucks ab.  $G$  ist wie üblich die Gravitationskonstante. Im Folgenden wird zur Vereinfachung angenommen, dass es sich um reine Wasserstoffkugeln handelt.

Der Gesamtradius  $R$  hängt von der Teilchenzahl  $N$  und dem Raum, den jedes Teilchen benötigt (proportional zu  $r^3$ ), ab. Falls der Gegendruck durch entartete Elektronen verursacht wird, ist die Anzahl der Elektronen relevant. Diese entspricht für reine Wasserstoffkugeln der Protonenzahl, daher ist die Rechnung in beiden Fällen identisch:

$$R = N^{\frac{1}{3}} \cdot r = \left(\frac{M}{m_p}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot r \quad \{2\}$$

Nun kann man die Gleichungen {1} und {2} kombinieren, so dass sich ein Term für die maximale Masse eines Körpers im hydrostatischen Gleichgewicht ergibt:

$$M_{\text{Max}} = \left(\frac{8\pi P_{\text{Gegendruck}} r^4}{3G m_p^{\frac{4}{3}}}\right)^{\frac{3}{2}} \quad \{3\}$$

### 3. Modellierbare Himmelskörper

Diese Grundidee erlaubt die Modellierung unterschiedlichster Himmelskörper im hydrostatischen Gleichgewicht. Der Typ des Körpers hängt von dem Gegendruck ab, der ihn stabilisiert – angefangen bei Gasplaneten, die durch die elektrostatische Abstoßung zwischen den Wasserstoffatomen stabilisiert werden, über die hier beschriebenen Objekte bis hin zu den Hauptreihensternen maximaler Masse und Größe, die primär durch den Strahlungsdruck stabilisiert werden. Ist die Masse so groß, dass jeder Gegendruck überwunden wird, so ergibt sich ein Schwarzes Loch (vgl Abb. 1 und 2).

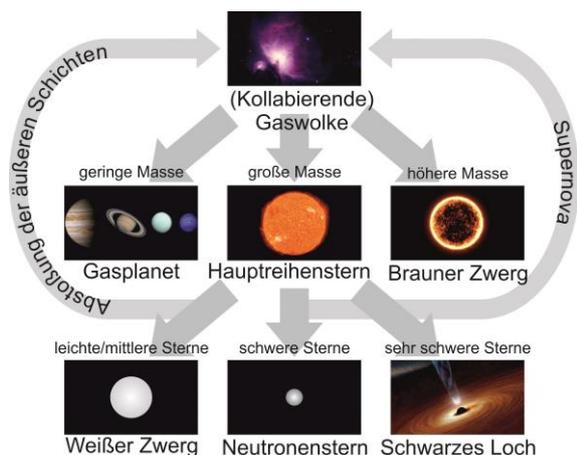


Abb.1: Überblick über die verschiedenen Himmelskörper, die mit diesem Modell modelliert werden können, sowie ein Schwarzes Loch.

Himmelskörper	Gegendruck
Gasplanet	Elektrostatische Abstoßung
Brauner Zwerg	Therm. entartete Elektronen
Hauptreihenstern	Gas- und Strahlungsdruck
Weißer Zwerg	Rel. entartete Elektronen
Neutronenstern	Rel. entartete Neutronen
Schwarzes Loch	-

Abb.2: Überblick über die zu den Himmelskörpern gehörenden Gegendrucke.

### 4. Weiße Zwerge

Weiße Zwerge sind die Überreste leichter Sterne wie beispielsweise der Sonne, die nach dem Ende der Kernfusion übrig bleiben. Stabilisiert werden sie durch relativistisch entartete Elektronen, die sich maximal mit Lichtgeschwindigkeit bewegen können und dabei der Heisenberg'schen Unschärferelation unterliegen. In erster Näherung gilt daher für die Elektronen:

$$r = \frac{\hbar}{m_e c} \quad \{4\}$$

Den zugehörigen Druck kann man als Energiedichte betrachten, eine einfache Einheitenanalyse zeigt die Äquivalenz. Die Energie ist wieder in erster Näherung betrachtet:

$$P = \frac{E}{V} = \frac{m_e c^2}{2 \cdot \frac{4}{3} \pi r^3} = \frac{3m_e^4 c^5}{8\pi \hbar^3} \quad \{5\}$$

Setzt man diesen Druck in Gleichung {3} ein, so ergibt sich die maximale Masse eines Weißen Zwerges und darüber auch der zugehörige Radius:

$$M_{WZ} = \left( \frac{c \hbar}{4 m_p^3 G} \right)^{\frac{3}{2}} \approx 1,8 M_{Sonne}$$

$$R_{WZ} \approx 5000 \text{ km}$$

Eine ähnliche Abschätzung mit einem anderen Ansatz gibt es von dem russischen Physiker Lew Landau [5].

Um eine Masse-Radius-Beziehung zu erhalten, müssen niedrigere Geschwindigkeiten  $v$  betrachtet werden:

$$M(v) = \left( \frac{v \hbar}{4 m_p^3 G} \right)^{\frac{4}{3}} \quad \{6\}$$

Auflösen nach der Geschwindigkeit, die Kombination mit Gleichung {2} und Umformen ergibt die Masse-Radius-Beziehung Weißer Zwerge:

$$R \propto M^{-\frac{1}{3}} \quad \{7\}$$

Weißer Zwerge schrumpfen also mit zunehmender Masse. Dieses nicht intuitive Verhalten lässt sich damit erklären, dass die Elektronen mit steigendem Gravitationsdruck enger zusammengepresst werden. Somit wird der pro Elektron benötigte Raum kleiner und der Gesamtradius reduziert sich.

### 5. Braune Zwerge

Braune Zwerge sind Körper, deren Masse nicht für eine dauerhafte Kernfusion im Zentrum ausreicht. Anders als bei Hauptreihensternen ist hier nicht der Gas- oder Strahlungsdruck der stabilisierende Faktor, sondern der Entartungsdruck durch thermische Elektronen – als Grenzwert mit der Minimaltemperatur zur Kernfusion  $T$ :

$$E = \frac{3}{2} kT = \frac{\hbar^2}{2m_e r^2} \quad \{8\}$$

Für den Radius, den jedes Elektron benötigt, gilt damit folgendes:

$$r = \sqrt{\frac{\hbar^2}{3m_e kT}} \quad \{9\}$$

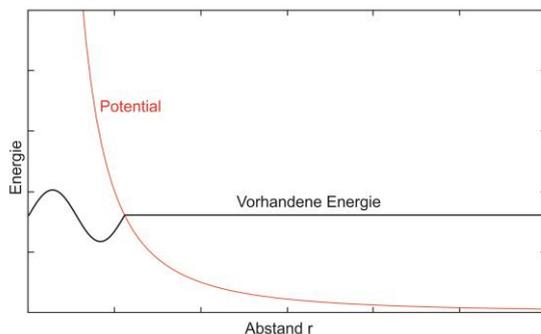
Somit ergibt sich für den Druck als Energiedichte:

$$P = \frac{E}{V} = \frac{\frac{3}{2}kT}{\frac{4}{3}\pi\left(\frac{h^2}{3m_e kT}\right)^{\frac{3}{2}}} \quad \{10\}$$

Mithilfe von Gleichung {3} erhält man somit:

$$M = \left( \frac{\sqrt{3kT} \cdot \hbar}{Gm_p^{\frac{4}{3}} m_e^{\frac{1}{2}}} \right)^{\frac{3}{2}} \quad \{11\}$$

Der Term beinhaltet jedoch nicht nur Naturkonstanten, sondern auch die Temperatur  $T$ . Für eine Kernfusion muss das Coulomb-Potential zwischen zwei Protonen überbrückt werden (Idee nach [6]). Dies ist klassisch nicht erklärbar, sondern muss quantenmechanisch über den Tunneleffekt beschrieben werden. Dies kann angenähert werden, indem der minimale Abstand, den die Protonen durch ihre Energie erreichen können, durch eine Welle mit der de-Broglie-Wellenlänge überbrückt wird (vgl. Abb. 3).



**Abb.3:** Der Tunneleffekt zur Kernfusion. Mit ihrer vorhandenen Energie können sich zwei Protonen nicht nah genug kommen, um zu fusionieren – die restliche Strecke muss durchtunnelt werden.

Es ergibt sich eine minimale Fusionstemperatur von etwa 20 Millionen Kelvin. Dies liegt deutlich über der minimalen Fusionstemperatur im Inneren von Sternen, entspricht aber näherungsweise der benötigten Temperatur unter Laborbedingungen [6]. Insgesamt gleichen sich hier die Ungenauigkeiten des Modells etwas aus, was insgesamt der Einfachheit des Modells geschuldet ist. Mithilfe von Gleichung {9} ergibt sich für Masse und Radius folgendes:

$$M_{BZ} \approx 60 M_{Jupiter}$$

$$R_{BZ} \approx 50000 \text{ km}$$

Um die Masse-Radius-Beziehung Brauner Zwerge zu erhalten, müssen niedrigere thermische Geschwindigkeiten der Elektronen betrachtet werden:

$$T = \frac{m_p}{3k} v^2$$

$$M(v) = \left( \frac{\frac{1}{2} m_p v \hbar}{Gm_p^{\frac{4}{3}} m_e^{\frac{1}{2}}} \right)^{\frac{3}{2}} \quad \{12\}$$

Analog zu den Weißen Zwergen kann hier die Masse-Radius-Beziehung hergeleitet werden. Wieder ergibt sich:

$$R \propto M^{-\frac{1}{3}} \quad \{13\}$$

Die Erklärung für dieses Verhalten ist ebenfalls genau wie bei Weißen Zwergen und lässt sich auf alle anderen durch entartete Teilchen stabilisierten Körper – beispielsweise Neutronensterne - übertragen.

## 6. Vergleich mit Literaturwerten

Auch wenn man mit einem derartig stark vereinfachten Modell von Abweichungen von den aktuellen Messwerten und Modellrechnungen ausgehen muss, soll hier ein kurzer Vergleich mit Literaturwerten stattfinden.

Die in der Literatur im Allgemeinen angegebene Obergrenze für Weiße Zwerge – die Chandrasekhar Grenze – beträgt etwa 1,44 Sonnenmassen [7], im Vergleich zu 1,8 Sonnenmassen, die dieses Modell ergeben. Die Größenordnung passt in guter Näherung zu den aufwändigeren Modellrechnungen. Der Radius eines Weißen Zwerges wird mit etwa 5.000 bis 10.000 km angegeben, also genau in der bestimmten Größenordnung.

Für Braune Zwerge wird in der Literatur zumeist eine Untergrenze der Masse von etwa 75 Jupitermassen angegeben [7]. Somit ist die Abweichung zu den hier bestimmten 60 Jupitermassen gering. Der Radius Brauner Zwerge bewegt sich meistens in der Größenordnung von etwa 60.000 bis 90.000 km, wobei genaue Beobachtungen meistens schwierig sind, da Braune Zwerge sehr leuchtschwach sind und sich keines dieser Objekte in direkter astronomischer Umgebung befindet. Der hier ermittelte Wert als Untergrenze des Radius passt aber gut zu den bisherigen Beobachtungen.

## 7. Fazit

Das hier vorgestellte Modell bietet eine einfache, quantitative Abschätzung, mit der Masse und Ausdehnung der meisten Körper im hydrostatischen Gleichgewicht beschrieben werden können. Fortgeschrittene Lerngruppen können anhand dieses Modells Grundprinzipien nachvollziehen, Lehrende erhalten quantitative Argumente, ohne dass sie sich intensiv mit den speziellen Feldern der Physik beschäftigen müssen, die zum Verständnis der modernen Theorien nötig sind.

Zusätzlich bietet sich hier die Möglichkeit, verschiedene Teilgebiete der Physik zu verknüpfen. Im Fall des Weißen Zwerges ist dies die Mechanik und die Quantenmechanik, beim Braunen Zwerg die Thermodynamik. Es fällt Lernenden oftmals schwer, die verschiedenen „Physikwelten“ zu verknüpfen (vgl. auch Subjektive Erfahrungsbereiche in der Mathematik in [8] und [9]).

Weiterhin kann mithilfe astrophysikalischer Themen das Interesse und die Motivation von Lernenden gefördert werden (vgl. [1]). Dies ist auch bei fortgeschrittenen Lerngruppen ein wichtiger Faktor, wie ein Blick auf die hohen Abbrecherquoten im Physikstudium zeigt (vgl. [10]).

## 8. Literatur

- [1] Sjøberg, Svein; Schreiner, Camilla (2010): The ROSE project - An overview and key findings. URL: <http://roseproject.no/network/countries/norway/eng/nor-Sjoberg-Schreiner-overview-2010.pdf>
- [2] Hestenes, David (1987): Toward a modeling theory of physics instruction. In: American Journal of Physics 55, S. 440-454. URL: [https://www.researchgate.net/profile/David\\_Hestenes/publication/216743200\\_Toward\\_a\\_modeling\\_theory\\_of\\_physics\\_instruction/links/551ec7010cf2f9c1304da164.pdf](https://www.researchgate.net/profile/David_Hestenes/publication/216743200_Toward_a_modeling_theory_of_physics_instruction/links/551ec7010cf2f9c1304da164.pdf)
- [3] Hohmann, Sascha (2016): Celestial Bodies dominated by Gravity. Vortrag auf der Tagung der Astronomischen Gesellschaft 2016 in Bochum
- [4] Hohmann, Sascha (2016): Abschätzungen zu schwerkraftdominierten Himmelskörpern. Ein einfaches Modell zu Weißen Zwergen, Gasriesen und Co. Vortrag auf der bundesweiten WE-Hereaus-Lehrerfortbildung zur Astronomie in Heidelberg
- [5] Camenzind, Max (2016): Gravitation und Physik kompakter Objekte
- [6] Lotze, Karl-Heinz (2016): Why are the stars as they are? A qualitative study in physics and astronomy à la Victor Weisskopf. Vortrag auf der Hereaus Summer School "Astronomy from 4 perspectives" in Florenz
- [7] Unsöld, Albrecht; Baschek, Bodo (2005): Der neue Kosmos
- [8] Bauersfeld, Heinrich et. al. (1983): Lernen und Lehren von Mathematik. In: Untersuchungen zum Mathematikunterricht, Band 6. Köln: Aulis Verlag Deubner, S. 1-56
- [9] Krause, Eduard (2015): Fächerverbindende Didaktik am Beispiel von subjektiven Lernvoraussetzungen im Mathematik- und Physikunterricht. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2015, 49. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik vom 09.02. bis 13.02.2015 in Basel. URL: [https://eldorado.tu-dortmund.de/bitstream/2003/34636/1/BzMU15\\_KRAUSE\\_Faecherverbinden.pdf](https://eldorado.tu-dortmund.de/bitstream/2003/34636/1/BzMU15_KRAUSE_Faecherverbinden.pdf)
- [10] Haase, Axel (2005) Trendwende(n) im Physikstudium? Statistiken zum Physikstudium an den Universitäten in Deutschland 2005. In: Physik Journal, 4 (8/9), S. 25-30. URL: [http://www.kfp-physik.de/statistik/physikstudium\\_2005.pdf](http://www.kfp-physik.de/statistik/physikstudium_2005.pdf)