

## Physikdidaktische Interpretation des Gaußschen Algorithmus

Martin Erik Horn

Hochschule für Wirtschaft und Recht Berlin / Berlin School of Economics and Law  
FB 1 – Wirtschaftswissenschaften, Facheinheit Quantitative Methoden  
Badensche Str. 52, Fach Nr. 63, D – 10825 Berlin, Germany  
Email: e\_hornm@doz.hwr-berlin.de & mail@martinerikhorn.de

### Kurzfassung

Mit Hilfe der Geometrischen Algebra lässt sich eine an physikalischen und physikdidaktischen Setzungen orientierte moderne Lineare Algebra konstruieren, die im vergangenen Jahr auf der Frühjahrstagung der DPG in Wuppertal vorgestellt wurde [5]. Diese moderne Lineare Algebra beruht auf einem konzeptuellen Gleichklang algebraischer und geometrischer Deutungen, wobei die Koeffizientenmatrix Linearer Gleichungssysteme durch Koeffizientenvektoren ersetzt wird. Die Lösung eines Linearen Gleichungssystems ergibt sich dann durch (Hyper-)Volumenvergleich der durch die Koeffizientenvektoren aufgespannten (Hyper-)Parallelepipede.

Dieser physikdidaktisch motivierte Ansatz wird auf den Gaußschen Algorithmus zur Lösung Linearer Gleichungssysteme übertragen. Dabei wird den standardmäßig durchgeführten und oft nur rein algebraisch begründeten Zeilenmanipulationen des Gaußschen Algorithmus eine geometrische Deutung zur Seite gestellt, die den Zugang zum Gaußschen Algorithmus erleichtert und auf ein typisches Werkzeug physikalischer Modellierungen verweist: Der Gaußsche Algorithmus wird als Koordinatentransformation gedeutet.

Im Beitrag wird dieser Zugang zum Gaußschen Algorithmus vorgestellt und mit Bezug auf Beispiele aus der Lehr- und Unterrichtspraxis im fachhochschulischen Rahmen diskutiert.

### 1. Prolog: Lineare Algebra an der Wall Street

Selbst im Wall Street Journal macht man sich mittlerweile Gedanken über das Versagen mathematikdidaktischer Ansätze zur Linearen Algebra.

So beschreibt Frank Wilczek, Physik-Nobelpreisträger 2004, voller Enthusiasmus die Idee, mathematische Problemstellungen durch eine logisch herausfordernde und gleichzeitig die Anschaulichkeit fördernde Verpackung in Form von Rätseln und Spielen zu hochgradig faszinierenden und die Aufmerksamkeit von Lernenden fesselnden Aufgaben umzugestalten [1].

Mit zahlreichen Beispielen untermauert Wilczek seinen Ansatz – nur um dann ganz zum Schluss in einem herausgehobenen mathematischen Teilbereich resignierend sein Scheitern einzuräumen: „Linear algebra (...) is the language of quantum physics. Learning it is an essential part of understanding how the physical world works. Yet the early parts of linear algebra are quite dull and abstract“ [1].

Man müsse in der Linearen Algebra erst reichlich Geduld haben, später dann werde es schöner, wenn „more advanced, and spectacularly beautiful, parts of the subject open to view“ [1].

Die Analyse von Wilczek spricht zwei Punkte an, die auch für die Themenstellung dieses Beitrags wesentlich sind:

- Analog zur engen Verschränkung von Mathematik und Physik sind auch Mathematikdidaktik und Physikdidaktik inhaltlich und konzeptuell sehr eng verknüpft. Scheitern wir in der Aufarbeitung der für die Physik wichtigen mathematischen Grundlagen, so werden wir auch zwangsläufig beim Versuch, ein Verständnis dafür, wie die physikalische Welt funktioniert („how the physical world works“ [1]) zu erlangen, scheitern.
- Und derzeit scheitern wir tatsächlich beim Versuch, die elementaren Grundlagen der Linearen Algebra in einer ansprechenden und nicht ziemlich langweiligen und abstrakten („quite dull and abstract“ [1]) Art und Weise aufzuarbeiten und mit Lernenden zu diskutieren.

Die didaktische Problemstellung ist somit klar: Einführungen in die Lineare Algebra werden in Schule und Hochschule gegenwärtig oft in Form einer rein algebraischen Zahlenakrobatik präsentiert – mit der Gefahr, diese dann einfallslos langweilig und abgehoben weltfremd abzuhandeln.

Um diesen Missstand zu beheben, kann mit Hilfe der Geometrischen Algebra versucht werden, eine an physikalischen und physikdidaktischen Setzungen orientierte moderne Lineare Algebra zu konstruieren, die auf einem konzeptuellen Gleichklang algebraischer und geometrischer Deutungen beruht.

## 2. Fachliche Einordnung

Eine mathematische Sprache, die diesen konzeptuellen Gleichklang algebraischer und geometrischer Deutungen stützt und trägt, stellt die Geometrische Algebra dar. Sie basiert auf den Ausarbeitungen von Graßmann, Hamilton, Clifford, Cartan und anderen physikaffinen Mathematikern und wurde in den letzten Jahrzehnten von David Hestenes [2], [3] und anderen Didaktikern [4] mit Blick auf physikalische Modellierungsprozesse entwickelt und unter Rückgriff auf physikalische Ansätze didaktisch aufbereitet. Historisch ist die Geometrische Algebra somit im Wesentlichen ein physikdidaktisch motiviertes Konstrukt.

Es zeigt sich jedoch, dass diese physikalisch motivierte Mathematik einen von der Physik abgehobenen Wert besitzen muss, da sie auch in physikfernen Gebieten immer stärker erfolgreich angewendet wird. Eines dieser physikfernen Gebiete sind die Wirtschaftswissenschaften.

Unter anderem werden bei der Beschreibung von Lieferbeziehungen, der Materialverflechtung und weiterer Problemstellungen der Logistik in der Regel Matrizen als mathematisches Werkzeug zur Modellierung von oft sehr hochdimensionalen Zusammenhängen genutzt. Somit werden diese wirtschaftswissenschaftlichen Modelle im Kontext der Linearen Algebra analysiert. Solche Beziehungen lassen sich deshalb leicht in die Sprache der Geometrischen Algebra übertragen.

Dies wurde in den vergangenen Semestern beispielhaft im Kontext der Materialverflechtung aufgearbeitet und mit Anfangssemestern als alternative Zugangsform zur Linearen Algebra diskutiert. Im folgenden Abschnitt werden diese bereits erfolgten Aufarbeitungen einer physikdidaktisch strukturierten Linearen Algebra kurz vorgestellt.

## 3. Bisherige Arbeiten zu einer physikdidaktisch strukturierten Linearen Algebra

Mit relativ leistungsstarken Studierenden eines englischsprachigen Wirtschaftsmathematik-Kurses wurde im Wintersemester 2014/2015 an der Hochschule für Wirtschaft und Recht Berlin (HWR) die Lösung Linearer Gleichungssysteme auf Grundlage der Geometrischen Algebra erfolgreich diskutiert [5].

Das der Lerneinheit zugrunde liegende Konzept orientiert sich dabei stark an physikalisch motivierten Prägnanzen, wobei zu Beginn insbesondere Symmetriebetrachtungen bei Reflexionen und Rotationen eingehend erörtert werden [6]. Ziel dieses Einstiegs ist, eine solide Fundierung für die mathematische Struktur der Geometrischen Algebra zu schaffen, bevor diese anwendungsorientiert auf wirtschaftsmathematische Fragestellungen bezogen wird.

Deshalb erfolgt die Diskussion des Lösungsverhaltens von wirtschaftsmathematisch motivierten einfachen Linearen Gleichungssystemen erst im zweiten Schritt, wenn Lineare Gleichungssysteme aus zwei

oder drei Linearen Gleichungen erörtert und im Kontext der Geometrischen Algebra mit Hilfe äußerer Produkte gelöst werden [7]. Mathematisch kommt hier das geometrisch-algebraische Analogon der Cramerschen Regel zu Einsatz, wobei auf einfache Beispiele aus der Materialverflechtung zurückgegriffen wird, die zum einen direkt sowie ergänzend unter Bildung der Inversen gelöst werden.

Abschließend erfolgt eine Verallgemeinerung der im zweiten Teil diskutierten Lösungsstrategien, wobei mit Hilfe des direkten Produkts Basisvektoren höherdimensionaler Räume geschaffen und so der mathematische Umgang mit Vektoren in Euklidischen Räumen höherer Dimension ermöglicht wird. Dies wird genutzt, um Lineare Gleichungssysteme aus vier oder fünf Linearen Gleichungen zu lösen und am Beispiel der Input-Output-Analyse wirtschaftsmathematisch zu vertiefen [8].

Die eben beschriebene ausführliche Behandlung der Geometrischen Algebra im fachhochschulischen Kontext kann nur gelingen, wenn entsprechende zeitliche Ressourcen zur Verfügung stehen und die Studierenden die erforderliche mathematische Grundbildung mitbringen. Diese Rahmenbedingungen sind an der HWR Berlin üblicherweise in Wintersemestern im englischsprachigen Kurs „Mathematics for Business and Economics“ (LV.-Nr. 200 691.01) gegeben [5], wenn mindestens 12 Lehrveranstaltungsstunden à 45 Min. für diesen Ansatz aufgebracht werden können.

In den zeitlich deutlich kürzeren Sommersemestern zeigt sich allerdings, dass eine allzu ausgedehnte Diskussion der Geometrischen Algebra auf Kosten der anderen Kursinhalte inhaltlich problematisch wird. Deshalb ist es sinnvoll, die Geometrische Algebra dann nur in Ihren wesentlichen Kernpunkten einzuführen und nur eingeschränkt zu erörtern.

Um eine solche knappe Darstellung der Geometrischen Algebra didaktisch so zu gestalten, dass auch Studierende mit Defiziten in der mathematischen Grundbildung dem folgen können, wurde die Lerneinheit didaktisch erheblich reduziert und mit dem Ziel einer effizienten, äußerst kompakten Darstellung rekonstruiert.

Mit relativ leistungsschwachen Studierenden eines deutschsprachigen Kurses zur Mathematik und Statistik wurde dieser didaktisch reduzierte und rekonstruierte Ansatz im Sommersemester 2015 an der Medical School Berlin (MSB) erprobt [9], [10], [11].

Dieser didaktisch reduzierte Ansatz wurde nun genutzt, um im Wintersemester 2015/2016 an der Hochschule für Wirtschaft und Recht Berlin (HWR) die Lösung Linearer Gleichungssysteme auf Grundlage der Geometrischen Algebra zeitlich knapp zu erörtern, um sodann auf dieser Grundlage einen weiteren Ansatz zu erproben – die im folgenden vorgestellte physikdidaktisch motivierte Interpretation des Gaußschen Algorithmus als Koordinatentransformation.

#### 4. Lineare Gleichungssysteme in geometrischer Perspektive

Lineare Gleichungssysteme setzen sich aus üblicherweise zeilenartig geschriebenen Linearen Gleichungen zusammen. Diese zeilenartige Komposition ist erst einmal nichts anderes als eine Zusammenstellung mehrerer algebraischer Beziehungen.

Beispielsweise beschreiben die beiden einfachen Linearen Gleichungen

$$4x + 2y = 14 \quad \{1a\}$$

$$x + 4y = 14 \quad \{1b\}$$

ein zweidimensionales Lineares Gleichungssystem mit den beiden Lösungswerten

$$x = 2 \quad \text{und} \quad y = 3 \quad \{2\}$$

die mit Hilfe unterschiedlicher algebraischer Lösungsverfahren ermittelt werden können.

Die Übertragung dieser algebraischen Lösungsverfahren in geometrisch-graphische Deutungen kann nun auf zwei verschiedene Arten erfolgen. Zum einen können – und das ist auch der im schulischen Bereich derzeit präferierte Weg – die einzelnen Gleichungen zeilenweise interpretiert und in einem Koordinatensystem als Geraden eingezeichnet werden. Die Koordinaten des Schnittpunkts dieser Geraden determiniert sodann die Lösungswerte  $\{2\}$  des Linearen Gleichungssystems  $\{1\}$ .

Bei diesem Vorgehen wird die zeilenartige Perspektive auf das Lineare Gleichungssystem  $\{1\}$  nicht durchbrochen: Die Genese in Form einer zeilenartigen Komposition zweier Gleichungen spiegelt sich in der Analyse durch eine zeilenartige Interpretation wider. Die algebraische Genese wird zwar durch eine geometrische Sichtweise ergänzt, jedoch konzeptuell nicht wirklich erweitert.

Eine tatsächliche Erweiterung kann jedoch unter Bezug auf die modernen Modellbildungen der Physik gelingen, wenn die zuerst rein algebraisch vorliegenden Gleichungen  $\{1\}$  mit Richtungsbeziehungen in Relation gesetzt werden. Nichts anderes betreibt die moderne Physik, wenn beispielsweise räumliche und zeitliche Parameter in der Speziellen Relativitätstheorie als geometrisch senkrecht zueinander stehend modelliert und dabei geometrisiert werden.

Dadurch wird den algebraisch generierten Gleichungen ein Richtungssinn zugewiesen. Beispielsweise kann die erste Lineare Gleichung  $\{1a\}$  mit einem Basisvektor in x-Richtung und die zweite Lineare Gleichung  $\{1b\}$  mit einem Basisvektor in y-Richtung verknüpft werden:

$$(4x + 2y) \sigma_x = 14 \sigma_x \quad \{3a\}$$

$$(x + 4y) \sigma_y = 14 \sigma_y \quad \{3b\}$$

Diese Geometrisierung führt nun dazu, dass das Gleichungssystem  $\{1\}$  nicht mehr allein zeilenweise, sondern auch spaltenweise interpretiert werden kann. Der didaktische Mehrwert, der durch diesen Perspektivwechsel geschaffen wird, ist nicht nur ein

mathematischer Mehrwert, sondern auch ein physikalischer, denn der Gaußsche Algorithmus kann dann von einer algebraischen Ebene (in Form der zielgerichteten Manipulation der erweiterten Koeffizientenmatrizen) auf eine geometrische Ebene, die für die Physik zentral ist, gehoben werden: Die Koeffizientenvektoren  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$

$$\mathbf{a} = 4 \sigma_x + \sigma_y \quad \text{und} \quad \mathbf{b} = 2 \sigma_x + 4 \sigma_y \quad \{4\}$$

des Linearen Gleichungssystems  $\{1\}$  bzw.  $\{3\}$

$$\mathbf{a} x + \mathbf{b} y = \mathbf{d} \quad \{5a\}$$

bzw. ausführlich  $\{5b\}$

$$(4 \sigma_x + \sigma_y) x + (2 \sigma_x + 4 \sigma_y) y = 14 \sigma_x + 14 \sigma_y$$

werden als neue Richtungsvektoren eines Koordinatensystems mit schräg zueinander stehenden Koordinatenachsen in Richtung von  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  interpretiert und beschreiben somit eine Koordinatentransformation. Die Darstellung des Ergebnisvektors  $\mathbf{d}$

$$\mathbf{d} = 14 \sigma_x + 14 \sigma_y \quad \{6\}$$

in diesem neuen Koordinatensystem ergibt direkt die Lösungswerte  $x, y$  als neue Koordinaten von  $\mathbf{d}$ .

#### 5. Geometrische und algebraische Darstellung der Koordinatentransformationen

Am Beispiel des zweidimensionalen Linearen Gleichungssystems  $\{1\}$ ,  $\{3\}$ ,  $\{5\}$  können die Koordinatentransformationen mit den Studierenden sowohl aus algebraischer wie auch aus geometrischer Perspektive (siehe Abbildung 1) erarbeitet werden.

Die erste Koordinatentransformation überführt die in Richtung des Einheitsvektors  $\sigma_x$  zeigende x-Achse in eine neue Achse, die nun in Richtung des Koeffizientenvektors  $\mathbf{a}$  weist (siehe Abbildung 2). Algebraisch entspricht dies der Ersetzung des Einheitsvektors  $\sigma_x$

$$\mathbf{a} = 4 \sigma_x + \sigma_y \Rightarrow \sigma_x = \frac{1}{4} \mathbf{a} - \frac{1}{4} \sigma_y \quad \{7a\}$$

durch eine Linearkombination aus ursprünglichem Einheitsvektor  $\sigma_y$  der alten y-Richtung und neuem Einheitsvektor  $e_x$

$$e_x = \mathbf{a} \Rightarrow \sigma_x = \frac{1}{4} e_x - \frac{1}{4} \sigma_y \quad \{7b\}$$

der neuen x-Richtung.

Die Substitution  $\{7\}$  überführt die ursprüngliche Pauli-Vektorgleichung  $\{5\}$  in die neue Pauli-Vektorgleichung

$$e_x x + \left( \frac{1}{2} e_x + \frac{7}{2} \sigma_y \right) y = \frac{7}{2} e_x + \frac{21}{2} \sigma_y \quad \{8\}$$

Diese Vektorgleichung kann im Gespräch mit den Studierenden präziser als „Gaußsche Pauli-Vektorgleichung“ benannt werden, da die Koeffizienten der Einheitsvektoren die Elemente der erweiterten Gaußschen Koeffizientenmatrix (siehe Abbildung 4) darstellen.

Die dann folgende zweite Koordinatentransformation überführt die in Richtung des Einheitsvektors  $\sigma_y$  zeigende y-Achse in eine neue Achse, die nun in

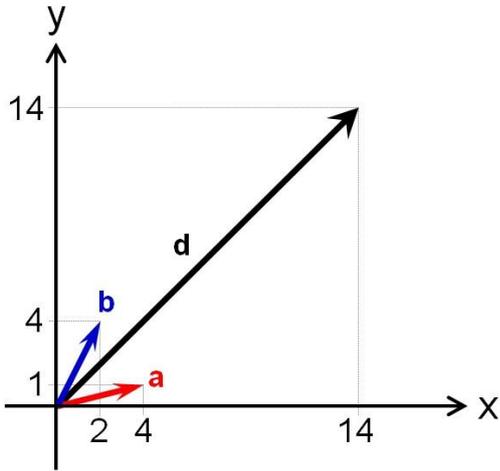


Abb.1: Graphische Darstellung des Linearen Gleichungssystems {1}, {3}, {5}.

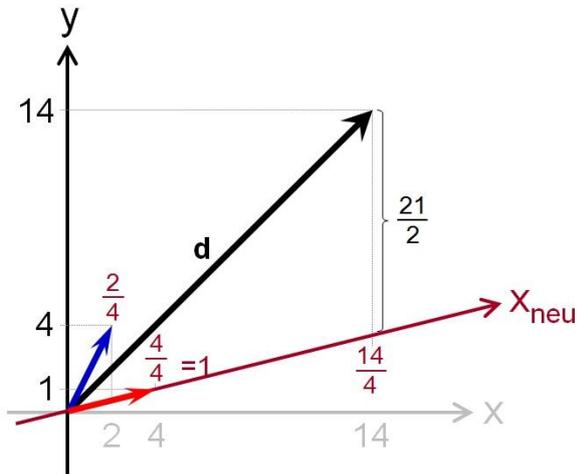


Abb.2: Koordinatentransformation der x-Achse.

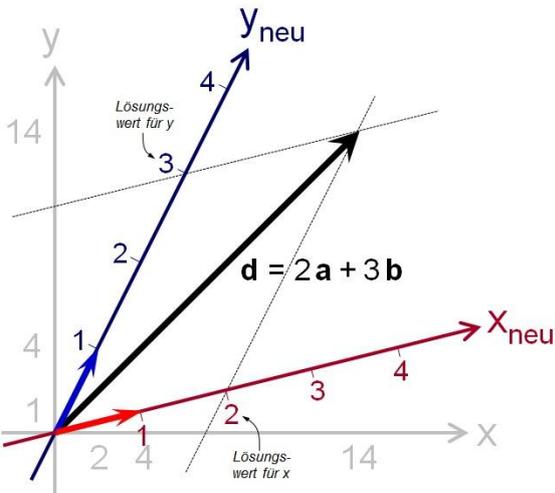


Abb.3: Koordinatentransformation der y-Achse.

Richtung des Koeffizientenvektors **b**

$$e_y = \mathbf{b} = 2 \sigma_x + 4 \sigma_y = \frac{1}{2} e_x + \frac{7}{2} \sigma_y \quad \{9\}$$

weist (siehe Abbildung 3). Der Koeffizientenvektor **b** repräsentiert – wie bereits erwähnt – den Einheitsvektor  $e_y$  in die neue  $y$ -Richtung.

Algebraisch entspricht dies der Ersetzung des Einheitsvektors  $\sigma_y$

$$\sigma_y = -\frac{1}{7} e_x + \frac{2}{7} e_y \quad \{10\}$$

durch eine Linearkombination aus neuem Einheitsvektor  $e_x$  der neuen  $x$ -Richtung und neuem Einheitsvektor  $e_y$  der neuen  $y$ -Richtung.

Die Substitution {10} überführt die Gaußsche Pauli-Vektorgleichung des Zwischenschritts {8} in die endgültige Pauli-Vektorgleichung

$$e_x x + e_y y = 2 e_x + 3 e_y \quad \{11\}$$

Die Koeffizienten dieser Gleichung {11} entsprechen den Einträgen in der erweiterten Koeffizientenmatrix von Gauß (siehe Abbildung 4) und stellen die gesuchten Lösungswerte dar.

x	y	d
4	2	14
1	4	14
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{2}$
0	$\frac{7}{2}$	$\frac{21}{2}$
1	0	2 $\Rightarrow$ x = 2
0	1	3 $\Rightarrow$ y = 3

Abb.4: Erweiterte Koeffizientenmatrizen von Gauß.

6. Alternative Koordinatentransformationen

Das Durchlaufen der einzelnen Lösungsschritte des Gaußschen Algorithmus kann in beliebiger Reihenfolge erfolgen.

Wird zuerst die  $y$ -Achse und erst im zweiten Schritt die  $x$ -Achse transformiert, führen die dann modifizierten Gaußschen Pauli-Vektorgleichungen des Zwischenschritts auf eine alternative Erweiterte Koeffizientenmatrix von Gauß. Diese zweite Lösungsstrategie wird in den kursbegleitenden OHP-Folien in [14, S. 23 – 26] gezeigt.

Konzeptuell interessanter ist eine weitere Klasse an Lösungsstrategien. Im klassischen Gaußschen Algorithmus wird zielgerichtet auf die Schaffung einer Einheitsmatrix hingearbeitet, so dass alle Werte im zugeordneten Lösungsvektor in geordneter Reihenfolge  $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z, x_4, x_5, \dots$  vorliegen.

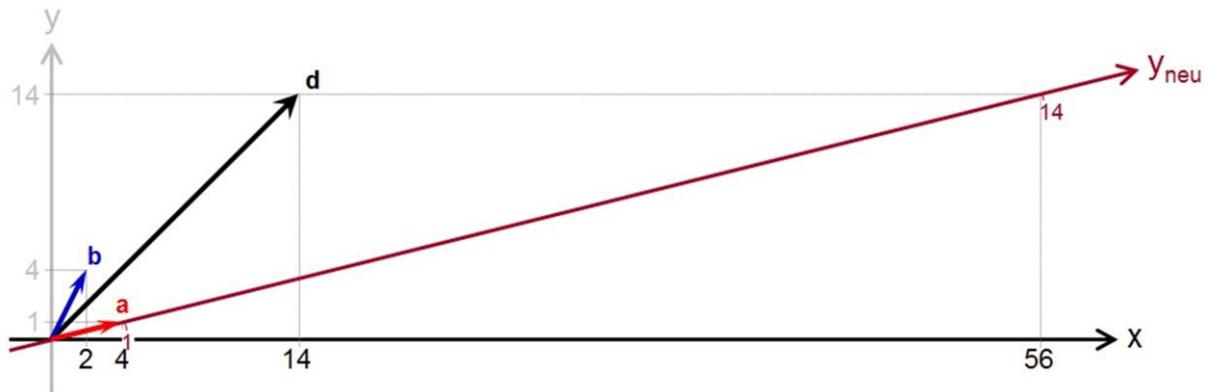


Abb.5: Alternative Koordinatentransformation der y-Achse in Richtung des Koeffizientenvektors **a**.

Alternativ können die Lösungswerte eines konsistenten Linearen Gleichungssystems jedoch auch einer Erweiterten Koeffizientenmatrix entnommen werden, wenn keine Einheitsmatrix, sondern eine Permutationsmatrix geschaffen wurde.

Im Fall des zweidimensionalen Linearen Gleichungssystems {5} bedeutet dies, dass sich die Händigkeit des Koordinatensystems ändert. Das ursprünglich rechtshändige Koordinatensystem wird in ein linkshändiges Koordinatensystem transformiert. Eine solche dritte Lösungsstrategie wird in den kursbegleitenden OHP-Folien in [14, S. 27 – 31] gezeigt.

Dabei überführt die erste Koordinatentransformation die in Richtung des Einheitsvektors  $\sigma_y$  zeigende y-Achse in eine neue Achse, die nun in Richtung des Koeffizientenvektors **a** weist (siehe Abbildung 5).

Algebraisch entspricht dies der Ersetzung des Einheitsvektors  $\sigma_y$  durch eine Linearkombination aus ursprünglichem Einheitsvektor  $\sigma_x$  der alten x-Richtung und neuem Einheitsvektor  $e_y$  in Form von

$$e_y = \mathbf{a} = 4\sigma_x + \sigma_y \Rightarrow \sigma_y = -4\sigma_x + e_y \quad \{12\}$$

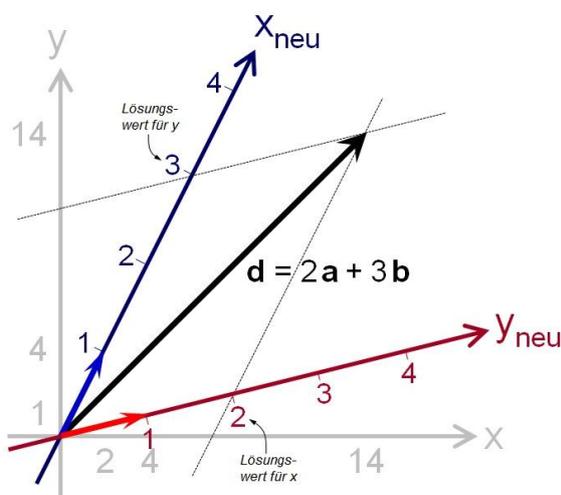


Abb.6: Alternative Koordinatentransformationen zur Lösung des Linearen Gleichungssystems {1}, {3}, {5}.

Die Substitution {12} überführt die ursprüngliche Gaußsche Pauli-Vektorgleichung {5} in die neue Pauli-Vektorgleichung

$$e_y x + (-14\sigma_x + 4e_y) y = -42\sigma_x + 14e_y \quad \{13\}$$

Diese ist graphisch in Abbildung 5 dargestellt. Die zweite Koordinatentransformation überführt sodann die in Richtung des Einheitsvektors  $\sigma_x$  zeigende x-Achse in eine Achse, die nun in Richtung des Koeffizientenvektors **b**

$$e_x = \mathbf{b} = 2\sigma_x + 4\sigma_y = -14\sigma_x + 4e_y \quad \{14\}$$

weist (siehe Abbildung 6). Algebraisch entspricht dies der Ersetzung des Einheitsvektors  $\sigma_x$  durch

$$\sigma_x = -\frac{1}{14}e_x + \frac{2}{7}e_y \quad \{15\}$$

Mit Hilfe der Substitution {15} ergibt sich die endgültige Pauli-Vektorgleichung

$$e_y x + e_x y = 3e_x + 2e_y \quad \{16\}$$

die verglichen mit {11} die Lösungswerte von x und y permutativ vertauscht angibt. Die Koeffizienten der Gleichungen {5}, {13} und {16} entsprechen wieder den Einträgen der erweiterten Koeffizientenmatrizen von Gauß (siehe Abbildung 7).

Auf das gleiche Endresultat {16} führt auch die vierte, in den kursbegleitenden OHP-Folien in [14, S. 32 – 35] vorgestellte Lösungsstrategie.

x	y	d	
4	2	14	
1	4	14	
0	-14	-42	
1	4	14	
0	1	3	Lösungswerte: $\Rightarrow y = 3$
1	0	2	$\Rightarrow x = 2$

Abb.7: Alternative Fassung der erweiterten Koeffizientenmatrizen von Gauß.

## 7. Zur Bedeutung Inverser Matrizen

Der Übergang von einer direkten Lösung Linearer Gleichungssysteme zu einer indirekten Lösung unter Rückgriff auf inverse Matrizen kann abstrakt und auf rein mathematischer Ebene erfolgen.

In wirtschaftsmathematischen Veranstaltungen bietet es sich jedoch auch an, diesen Übergang in wirtschaftswissenschaftliche Beispiele einzubetten und konkret anwendungsorientiert zu gestalten.

Dazu kann beispielsweise das Lineare Gleichungssystem  $\{1\}$  im Kontext der Materialverflechtung (siehe Abbildung 8) diskutiert und interpretiert werden.

Zur Herstellung einer einzigen Mengeneinheit (1 ME) des Endproduktes  $E_1$  werden 4 ME des Rohstoffes  $R_1$  und 1 ME des Rohstoffes  $R_2$  benötigt.

Zur Herstellung einer einzigen Mengeneinheit des Endproduktes  $E_2$  werden 2 ME des Rohstoffes  $R_1$  und 4 ME des Rohstoffes  $R_2$  benötigt.

Berechnen Sie, welche Mengen der Endprodukte  $E_1$  und  $E_2$  hergestellt werden, wenn im Herstellungsprozess insgesamt genau 14 ME des Rohstoffes  $R_1$  und 14 ME des Rohstoffes  $R_2$  verbraucht werden.

**Abb.8:** Einbettung des Linearen Gleichungssystems  $\{1\}$  in einen Kontext der Materialverflechtung.

Naturgemäß werden in realen Produktionsprozessen immer eine positive Anzahl an Rohstoffen eingesetzt und verbraucht, um eine positive Anzahl an Endprodukten herzustellen. Die Lösungswerte (hier  $x = 2$  und  $y = 3$ , siehe auch linke Teilabbildung 9) werden bei Konstruktion von Aufgaben zur Materialverflechtung deshalb üblicherweise positiv gewählt.

Um eine didaktische Brücke zur Bedeutung inverser Matrizen zu schaffen, kann jedoch gefragt werden, was passiert, wenn bei einem Lieferengpass der erste Rohstoff  $R_1$  nicht mehr zur Verfügung steht, jedoch im Lager die bereits produzierten Endprodukte  $E_1$  vorrätig sind, die verlustfrei wieder in die ursprünglichen Rohstoffe zerlegt werden könnten. Wie viele Mengeneinheiten des zweiten Endproduktes könnten dann hergestellt werden?

In der Beispielaufgabe von Abbildung 8 ist die Antwort leicht ersichtlich: Da jedes Endprodukt  $E_1$  vier ME des Rohstoffes  $E_1$  enthält, könnten zwei ME des Endproduktes  $E_2$  hergestellt werden, wenn genau eine ME des Endproduktes  $E_1$  wieder verlustfrei in die Rohstoffe  $R_1$  und  $R_2$  zerlegt werden würde.

Mit Hilfe des Falkschen Schemas ist diese Lösung einfach nachvollziehbar, wobei das Endprodukt  $E_1$  nicht produziert, sondern zerlegt und deshalb mit der Herstellungsanzahl  $-1$  berücksichtigt wird.

	2			-1	
	3			2	
4	2	14	4	2	0
1	4	14	1	4	7

**Abb.9:** Es werden 2 ME von  $E_1$  und 3 ME von  $E_2$  hergestellt (links) bzw. 1 ME von  $E_1$  in die Rohstoffe zerlegt und 2 ME von  $E_2$  hergestellt (rechts).

Eine genau solche Frage nach verlustfreier Rückzerlegung beantworten die in einer inversen Matrix enthaltenen Werte (Abbildung 10). Es ist entweder nur eine Mengeneinheit des ersten Rohstoffes  $R_1$  im Produktionsprozess einsetzbar (erste Spalte der inversen Matrix). Oder es ist nur eine Mengeneinheit des zweiten Rohstoffes  $R_2$  im Produktionsprozess einsetzbar (zweite Spalte der inversen Matrix).

Zur Herstellung einer einzigen Mengeneinheit (1 ME) des Endproduktes  $E_1$  werden 4 ME des Rohstoffes  $R_1$  und 1 ME des Rohstoffes  $R_2$  benötigt.

Zur Herstellung einer einzigen Mengeneinheit des Endproduktes  $E_2$  werden 2 ME des Rohstoffes  $R_1$  und 4 ME des Rohstoffes  $R_2$  benötigt.

Berechnen Sie, welche Mengen der Endprodukte  $E_1$  und  $E_2$  hergestellt oder verlustfrei zerlegt werden, wenn im Herstellungsprozess genau 1 ME des ersten Rohstoffes  $R_1$  verbraucht wird.

Und berechnen Sie, welche Mengen der Endprodukte  $E_1$  und  $E_2$  hergestellt oder verlustfrei zerlegt werden, wenn im Herstellungsprozess genau 1 ME des zweiten Rohstoffes  $R_2$  verbraucht wird.

**Abb.10:** Diskussionsansatz zur Bedeutung inverser Matrizen im Kontext der Materialverflechtung.

Zur Bestimmung der Inversen einer zweidimensionalen Matrix müssen somit zwei verschiedene Lineare Gleichungssysteme aus je zwei Linearen Gleichungen gelöst werden (siehe Abbildung 11).

	4/14			-1/7	
	-1/14			2/7	
4	2	1	4	2	0
1	4	0	1	4	1

**Abb.11:** Im Produktionsprozess werden genau 1 ME von  $R_1$  (links) bzw. 1 ME von  $R_2$  (rechts) verbraucht.

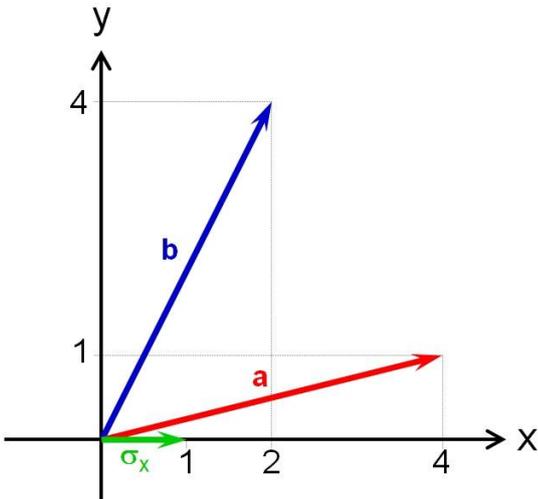


Abb.12: Graphische Darstellung des Linearen Gleichungssystems zur Berechnung der ersten Spalte der Inversen.

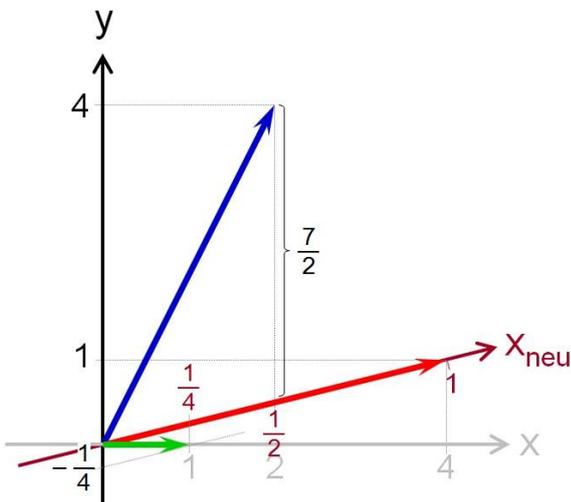


Abb.13: Koordinatentransformation der x-Achse.

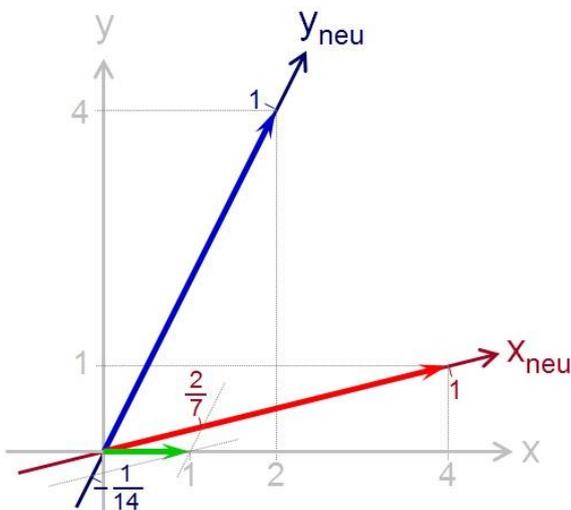


Abb.14: Koordinatentransformation der y-Achse.

### 8. Berechnung Inverser Matrizen

Die Übersetzung der in der Aufgabe von Abbildung 10 beschriebenen materialverflechtenden Situation in einen mathematisch tragfähigen Formalismus gelingt durch Identifikation des Verbrauchs von 1 ME des Rohstoffes  $R_1$  mit dem Ergebnisvektor  $d_1$

$$d_1 = \sigma_x \quad \{17\}$$

zur Bestimmung der ersten Spalte der gesuchten inversen Matrix. Die Gaußsche Pauli-Vektorgleichung des ersten Linearen Gleichungssystems lautet somit:

$$(4\sigma_x + \sigma_y) x + (2\sigma_x + 4\sigma_y) y = \sigma_x \quad \{18\}$$

Diese Pauli-Vektorgleichung ist in Abbildung 12 graphisch dargestellt.

Die erste Koordinatentransformation zur Transformation der x-Achse (siehe Abbildung 13) erfolgt wieder mit Hilfe der bereits in {7} gegebenen Beziehungen für die alten und neuen Einheitsvektoren

$$e_x = a = 4\sigma_x + \sigma_y \Rightarrow \sigma_x = \frac{1}{4} e_x - \frac{1}{4} \sigma_y \quad \{19\}$$

in die jeweiligen x-Richtungen. Diese Substitution {7}, {19} überführt die ursprüngliche Gaußsche Pauli-Vektorgleichung {18} in die neue Pauli-Vektorgleichung (siehe Abbildung 13)

$$e_x x + \left(\frac{1}{2} e_x + \frac{7}{2} \sigma_y\right) y = \frac{1}{4} e_x - \frac{1}{4} \sigma_y \quad \{20\}$$

Die zweite Koordinatentransformation zur Transformation der y-Achse (siehe Abbildung 14) erfolgt wieder mit Hilfe der bereits in {9} und {10} gegebenen Beziehungen für die alten und neuen Einheitsvektoren

$$e_y = b \Rightarrow \sigma_y = -\frac{1}{7} e_x + \frac{2}{7} e_y \quad \{21\}$$

in die jeweiligen y-Richtungen. Diese Substitution {10}, {21} überführt die Gaußsche Pauli-Vektorgleichung des Zwischenschritts {20} in die endgültige Pauli-Vektorgleichung (siehe Abbildung 14)

$$e_x x + e_y y = \frac{2}{7} e_x - \frac{1}{14} e_y \quad \{22\}$$

Die Koeffizienten dieser Gleichungen {18}, {20}, {22} entsprechen den Einträgen der erweiterten Koeffizientenmatrizen von Gauß (siehe Abbildung 15).

x	y	$d_1$	
4	2	1	
1	4	0	
1	1/2	1/4	
0	7/2	-1/4	Erste Spalte der inversen Matrix:
1	0	2/7	
0	1	-1/14	$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2/7 & x_2 \\ -1/14 & y_2 \end{pmatrix}$

Abb.15: Erweiterte Koeffizientenmatrizen von Gauß.

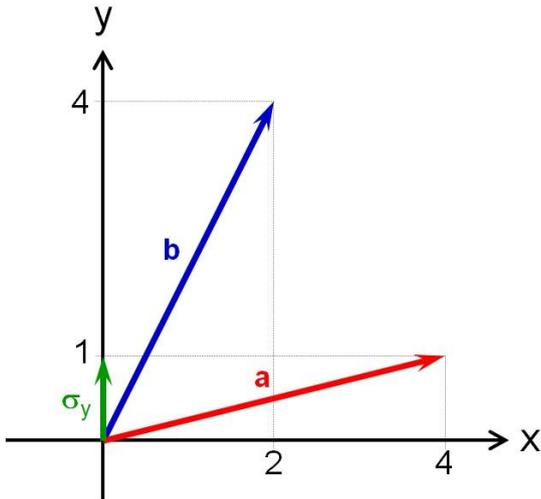


Abb.16: Graphische Darstellung des Linearen Gleichungssystems zur Berechnung der zweiten Spalte der Inversen.

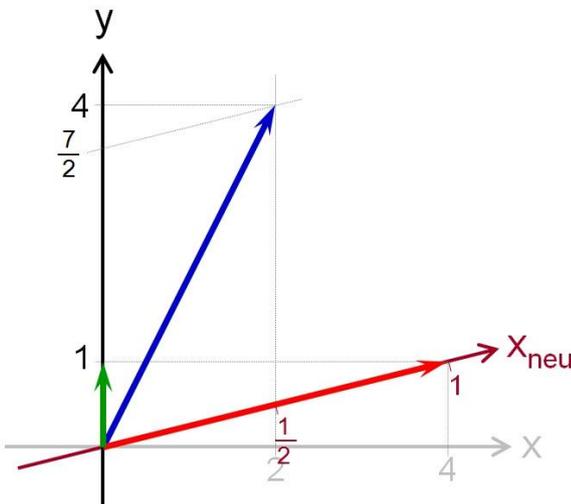


Abb.17: Koordinatentransformation der x-Achse.

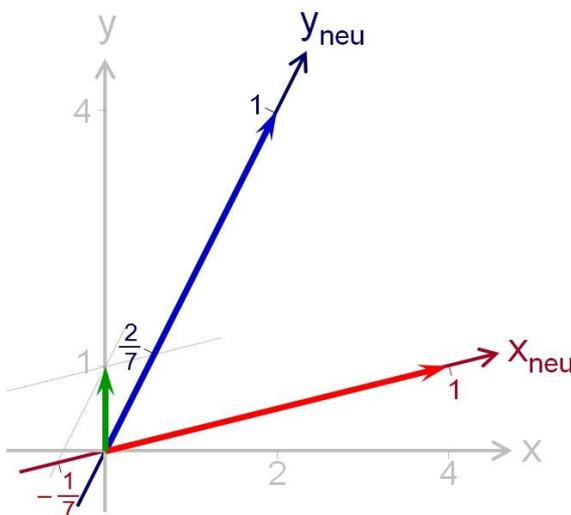


Abb.18: Koordinatentransformation der y-Achse.

Um die zweite Spalte der inversen Matrix zu bestimmen, muss der in der Beispielaufgabe von Abbildung 10 gegebene Verbrauch von 1 ME des Rohstoffes  $R_2$  mit dem Ergebnisvektor  $d_2$

$$d_2 = \sigma_y \quad \{23\}$$

identifiziert werden. Die Gaußsche Pauli-Vektorgleichung des zweiten Linearen Gleichungssystems lautet somit:

$$(4\sigma_x + \sigma_y)x + (2\sigma_x + 4\sigma_y)y = \sigma_y \quad \{24\}$$

Diese Pauli-Vektorgleichung ist in Abbildung 16 graphisch dargestellt.

Die erste Koordinatentransformation zur Transformation der x-Achse (siehe Abbildung 17) erfolgt wieder mit Hilfe der bereits in {7}, {19} gegebenen Beziehungen für die alten und neuen Einheitsvektoren in die jeweiligen x-Richtungen.

Diese Substitution überführt die ursprüngliche Gaußsche Pauli-Vektorgleichung {24} in die neue Pauli-Vektorgleichung von Abbildung 17, wobei sich die Darstellung des Basisvektors  $\sigma_y$  (siehe rechts Seite von Gl. {25}) nicht ändert, da er keine Komponente in x-Richtung besitzt:

$$e_x x + \left(\frac{1}{2}e_x + \frac{7}{2}\sigma_y\right)y = \sigma_y \quad \{25\}$$

Die zweite Koordinatentransformation zur Transformation der y-Achse (siehe Abbildung 18) erfolgt wieder mit Hilfe der bereits in {9} & {10} bzw. {21} gegebenen Beziehungen für die alten und neuen Einheitsvektoren in die jeweiligen y-Richtungen.

Diese Substitution überführt die Gaußsche Pauli-Vektorgleichung des Zwischenschritts {25} in die endgültige Pauli-Vektorgleichung von Abbildung 18.

$$e_x x + e_y y = -\frac{1}{7}e_x + \frac{2}{7}e_y \quad \{26\}$$

Die Koeffizienten dieser Gleichungen {24}, {25}, {26} entsprechen den Einträgen der erweiterten Koeffizientenmatrizen von Gauß (siehe Abbildung 19).

x	y	$d_1$
4	2	0
1	4	1
1	1/2	0
0	7/2	1
1	0	-1/7
0	1	2/7

Zweite Spalte der inversen Matrix:

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2/7 & -1/7 \\ -1/14 & 2/7 \end{pmatrix}$$

Abb.19: Erweiterte Koeffizientenmatrizen von Gauß.

### 9. Umsetzung und Kursdurchführung

Die Kursdurchführung im Wintersemester 2015/2016 in der Lehrveranstaltung „Mathematics for Business and Economics“ orientierte sich in Struktur

und Diskussionstiefe an den in den Abschnitten 4 – 8 dargestellten Inhalten. Aus historischen und auch aus schreibökonomischen Gründen wurde die mathematische Darstellung jedoch den derzeit üblichen Vorgaben angepasst.

So erfolgt die Darstellung der erweiterten Koeffizientenmatrizen von Gauß bei Ermittlung inverser Matrizen in heute auf dem Markt befindlichen Lehrbüchern nicht getrennt (siehe Abbildungen 15 & 19), sondern meist in einer einzigen Tabelle (siehe Abbildung 20) komprimiert.

x	y	d <sub>1</sub>	d <sub>2</sub>	
4	2	1	0	
1	4	0	1	
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	
0	$\frac{7}{2}$	$-\frac{1}{4}$	1	
1	0	$\frac{2}{7}$	$-\frac{1}{7}$	<i>Inverse Matrix:</i> $\Rightarrow \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$
0	1	$-\frac{1}{14}$	$\frac{2}{7}$	

**Abb.20:** Übliche Darstellung der erweiterten Koeffizientenmatrizen von Gauß zur Ermittlung der inversen Matrix.

Diese komprimierte Schreibweise spiegelt ein mathematisch komprimiertes Vorgehen wider: Es werden die beiden unterschiedlichen Linearen Gleichungssysteme {18} und {24} gleichzeitig gelöst.

Dieses mathematisch komprimierte Vorgehen kann auch in den Gaußschen Pauli-Vektorgleichungen umgesetzt werden. Ebenso wie die beiden Tabellen der Abbildungen 15 und 19 in einer einzigen Tabelle 20 zusammengefasst werden können, können auch die jeweiligen Pauli-Vektorgleichungen formal in einer einzigen Zeile zusammengefasst werden [14, S. 40].

Die beiden Gleichungen {18} und {24} für den Startpunkt, die beiden Gleichungen {20} und {25} des Zwischenschritts sowie die beiden Gleichungen {22} und {26} für die Lösungswerte werden dann mit der Bedeutung „beziehungsweise gleich“  $\overline{\overline{\quad}}$  bzw. verknüpft.

Diese Schreibweise soll ausdrücken, dass der linksseitig stehende Term jeweils als den einzelnen rechts stehenden Termen gleich gedacht werden sollte. Die beiden rechts stehenden Terme sind jedoch selbstverständlich nicht gleich.

Es handelt sich also weiterhin um mehrere verschiedene Gleichungen, die lediglich symbolisch komprimiert dargestellt werden.

Für die Beispielaufgabe lauten sie:

$$(4\sigma_x + \sigma_y)x + (2\sigma_x + 4\sigma_y)y = \sigma_x \overline{\overline{\quad}} \sigma_y \quad \{27\}$$

$$e_x x + \left(\frac{1}{2}e_x + \frac{7}{2}\sigma_y\right)y = \frac{1}{4}e_x - \frac{1}{4}\sigma_y \overline{\overline{\quad}} \sigma_y \quad \{28\}$$

$$e_x x + e_y y = \frac{2}{7}e_x - \frac{1}{14}e_y \overline{\overline{\quad}} - \frac{1}{7}e_x + \frac{2}{7}e_y \quad \{29\}$$

Diese Schreibung kann auch für höher-dimensionale Situationen genutzt werden. So setzt sich die vorgeschlagene Kurseinheit fort, indem Matrizen höherer Ordnung als Faktoren einfacher Matrizenprodukte

$$\mathbf{A} \mathbf{B} = \mathbf{D} \quad \{30\}$$

ermittelt werden sollen. Beispielhaft werden im kursbegleitenden Material die Ermittlung einer (2 x 3)-Matrix **B** als zweiter Faktor in {30} (siehe [14, S. 59 – 67]) bzw. unter Nutzung der Transposition die Ermittlung der Matrix **A** als erstem Faktor der Gleichung {30} (siehe [14, S. 67 – 81]) gezeigt und im Rahmen von Koordinatentransformationen erörtert.

Da dabei Rechteckmatrizen eingesetzt und diskutiert werden, folgt im Rahmen der Kurseinheit die Diskussion der Bedeutung überdeterminierter Linearer Gleichungssysteme in [14, S. 82], die mehr Lineare Gleichungen als Variablen besitzen.

Diese überdeterminierten Linearen Gleichungssysteme können konsistent oder inkonsistent [14, S. 27 – 31] sein. Sind sie konsistent, so sind Koeffizientenvektoren und Ergebnisvektor linear abhängig. Sind sie inkonsistent, so sind Koeffizientenvektoren und Ergebnisvektor linear unabhängig [12].

Da die Lineare Algebra als Themengebiet an der HWR Berlin nur einen Teil einer umfassenderen Einführung in die Wirtschaftsmathematik darstellt [5, Abschnitt 9], standen für die hier beschriebene Kursdurchführung nur 3 Termine zu je 4 Vorlesungsstunden zur Verfügung.

Diese Zeit wurde genutzt, um in Anlehnung an [9] eine Einführung in die Lösungen Linearer Gleichungssysteme im Schnelldurchgang unter vertiefter Erörterung einfacher Beispiele aus [7] zu geben. Diese Einführung umfasste mit 6 x 45 Min. die Hälfte der vorgesehenen Zeit.

Für die in diesem Beitrag vorgestellte Behandlung des Gaußschen Algorithmus standen somit ebenfalls 6 x 45 Min. zur Verfügung. Die Inhalte wurden dabei mit den Studierenden in einer durch Phasenwechsel durchzogenen Mischung aus Vorlesungs- und Übungsanteilen seminarartig erarbeitet und vertieft.

## 10. Schlussfolgerungen

Durch diese Kursdurchführung konnte erneut gezeigt werden, dass eine an physikalischen und physikdidaktischen Setzungen orientierte moderne Li-

neare Algebra auch mit Studierenden physikferner Fachgebiete erfolgreich erarbeitet und diskutiert werden kann.

Insbesondere zeigt sich, dass der Gaußsche Algorithmus erfolgreich als Koordinatentransformation eingeführt, erfolgreich unter Bezug auf algebraische und geometrische Sichtweisen diskutiert und von Studierenden erfolgreich zur Lösung komplexerer Aufgabenstellungen eingesetzt werden kann.

Eine vergleichende Evaluation der Kursdurchführung fand zwar nicht statt. Jedoch fiel auf, dass das Engagement und die Beteiligung der Studierenden in den Diskussionsphasen äußerst gut waren. Auch zeigten die Rückmeldungen der Studierenden nach Kursende, dass sie den Kursverlauf als sehr positiv einschätzen.

Es kann deshalb davon ausgegangen werden, dass eine solche Kursdurchführung bei entsprechender Verfügbarkeit zeitlicher Ressourcen auch mit Studierenden anderer Kurse, anderer Hochschulen und vor allem auch anderer Fachgebiete erfolgreich sein wird.

Und diese Art des Einstiegs in die Lineare Algebra bietet einen Ansatz, die Lineare Algebra weniger „dull and abstract“, sondern durch eine – ganz wie von Wilczek [1] gefordert – logisch herausfordernde und gleichzeitig die Anschaulichkeit fördernde didaktische Gestaltung zu diskutieren.

Dies kann auch Rückwirkungen auf physikalische Lehrveranstaltungen haben. Zwar ist die Lineare Algebra, wie von Wilczek in [1] herausgestellt, die Sprache der Quantenmechanik. Dies heißt jedoch nicht, dass in physikalischen Veranstaltungen die Lineare Algebra zwangsläufig anhand der Quantenmechanik eingeführt werden muss.

Es kann – insbesondere in Veranstaltung für Anfangssemester – auch für Physikstudierende sinnvoll sein, erst anhand leicht nachvollziehbarer, nicht physikalisch überformter Sachverhalte in die Lineare Algebra eingeführt zu werden und erst später dann die erlernten Grundkenntnisse der Linearen Algebra auf physikalische Problemstellungen zu übertragen.

Es ist somit auch für Studierende naturwissenschaftlicher Fächer sinnvoll, einfache wirtschaftsmathematische Problemstellungen mit Hilfe der Linearen Algebra zu durchdenken. Umso wichtiger wird dieses Durchdenken, wenn dabei ergänzend ein Grundverständnis für physikalisch entscheidende mathematische Strukturen (wie hier beispielsweise die Mathematik einer verallgemeinerten Pauli-Algebra) geschaffen werden kann.

## 11. Literatur

[1] Wilczek, Frank (2016): A Puzzling Solution for Math Education. In: Wall Street Journal, 8. Jan. 2016, Onlineausgabe, URL [28.01.2016]: <http://www.wsj.com/articles/our-puzzling-failures-in-math-education-1452268175>.

- [2] Hestenes, David (2003): Oersted Medal Lecture 2002: Reforming the Mathematical Language of Physics. In: American Journal of Physics, Vol. 71, No. 2, S. 104–121.
- [3] Hestenes, David (2010): Modeling Theory for Math and Science Education. In: Richard Lesh, Peter L. Galbraith, Christopher R. Haines, Andrew Hurford (Hrsg.): Modeling Students' Mathematical Modeling Competencies. ICTMA 13. New York, Dordrecht: Springer Science + Business Media, S. 13–41.
- [4] Parra Serra, Josep Manel (2009): Clifford Algebra and the Didactics of Mathematics. In: Advances in Applied Clifford Algebras, Vol. 19, No. 3/4, S. 819–834.
- [5] Horn, Martin Erik (2015): Lineare Algebra in physikdidaktischer Ausprägung. In: PhyDid B, Didaktik der Physik, Beiträge zur DPG-Frühjahrstagung des Fachverbands Didaktik der Physik in Wuppertal, Url [17.12.2015]: <http://www.phydid.de/index.php/phydid-b/article/view/626>.
- [6] Horn, Martin Erik (2014): Modern Linear Algebra. A Geometric Algebra Crash Course. Part I: Basics & Introduction. OHP-Folien des Kurses „Mathematics for Business and Economics“ (Stand: 31. Dez. 2014), LV-Nr. 200 691.01, Hochschule für Wirtschaft und Recht Berlin / Berlin School of Economics and Law, Wintersemester 2014/2015. Veröffentlicht als Anhang des Beitrags [7], Url [17.12.2015]: <http://www.phydid.de/index.php/phydid-b/article/view/626/794>.
- [7] Horn, Martin Erik (2014): Modern Linear Algebra. A Geometric Algebra Crash Course. Part II: Solving Systems of Linear Equations. OHP-Folien des Kurses „Mathematics for Business and Economics“ (Stand: 31. Dez. 2014), LV-Nr. 200 691.01, Hochschule für Wirtschaft und Recht Berlin / Berlin School of Economics and Law, Wintersemester 2014/2015. Veröffentlicht als Anhang des Beitrags [7], Url [17.12.2015]: <http://www.phydid.de/index.php/phydid-b/article/view/626/795>.
- [8] Horn, Martin Erik (2015): Modern Linear Algebra. A Geometric Algebra Crash Course. Part III: The Direct Product & Solving Higher-Dimensional Systems of Linear Equations. OHP-Folien des Kurses „Mathematics for Business and Economics“ (Stand: 28. Jan. 2015), LV-Nr. 200 691.01, Hochschule für Wirtschaft und Recht Berlin / Berlin School of Economics and Law, Wintersemester 2014/2015. Veröffentlicht als Anhang des Beitrags [7], Url [17.12.2015]: <http://www.phydid.de/index.php/phydid-b/article/view/626/796>.
- [9] Horn, Martin Erik (2016): Die Geometrische Algebra im Schnelldurchgang. Zur Veröffentlichung eingereicht bei: PhyDid B, Didaktik der Physik, Beiträge zur DPG-Frühjahrstagung

des Fachverbands Didaktik der Physik in Hannover.

- [10] Horn, Martin Erik (2015): Moderne Lineare Algebra – Ein Überblick. OHP-Folien des Kurses „Mathematik und Statistik“ (Stand: 28. Juni 2015), Modul M 22 des Bachelor-Studiengangs Medical Controlling and Management der Fakultät Gesundheit, Medical School Berlin, Sommersemester 2015. Zur Veröffentlichung eingereicht als Anhang des Beitrags [9].
- [11] Horn, Martin Erik (2015): Moderne Lineare Algebra – Übungsblätter 15 & 16 des Kurses „Mathematik und Statistik“ (Stand: 4. Juli 2015), Modul M 22 des Bachelor-Studiengangs Medical Controlling and Management der Fakultät Gesundheit, Medical School Berlin, Sommersemester 2015. Zur Veröffentlichung eingereicht als Anhang des Beitrags [9].
- [12] Horn, Martin Erik (2016): More Examples of Non-Square Matrix Inverses. Erweiterte und ins Englische übersetzte Fassung des Beitrags „Inverse von Rechteck-Matrizen“ zur Jahrestagung

2016 der GDM in Heidelberg. Zur Veröffentlichung eingereicht als Anhang des Beitrags [9].

#### Dem Beitrag beigefügte Dateien

- [13] Horn, Martin Erik (2016): Poster DD 05.10, ‚Physikdidaktische Interpretation des Gaußschen Algorithmus‘ vom 29. Feb. 2016, siehe auch: Verhandl. DPG (VI) 51, 1 (2016), Url: <http://www.dpg-verhandlungen.de/year/2016/conference/hannover/part/dd/session/5/contribution/10>.
- [14] Horn, Martin Erik (2014): Modern Linear Algebra. A Geometric Algebra crash course. Part IV: Transformation of Coordinates & Gaussian Method of Solving a System of Linear Equations. OHP-Folien des Kurses „Mathematics for Business and Economics“ (Stand: 28. Jan. 2016), LV-Nr. 200 691.01, Hochschule für Wirtschaft und Recht Berlin / Berlin School of Economics and Law, Wintersemester 2015/2016.