Posterbeitrag zur DPG-Frühjahrstagung 2016 an der Leibniz-Universität Hannover, DD 05.10, Mo, 29. Feb. 2016, 16:30 h – 19:00 h, Hauptgebäude, Empore Lichthof

Physikdidaktische Interpretation des Gaußschen Algorithmus

Martin Erik Horn (mail@martinerikhorn.de)

Hochschule für Wirtschaft und Recht Berlin, FB 1, FE Quantitative Methoden & MSB Medical School Berlin

Hochschule für Wirtschaft und Recht Berlin
Berlin School of Economics and Law

MSB Medical School Berlin
Hochschule für Gesundheit und Medizin

⇒ **Mathematikdidaktik und Physikdidaktik sind inhaltlich und konzeptuell verschränkt:**

„Linear algebra is the language of quantum physics. Learning it is an essential part of understanding how the physical world works. Yet the early parts of linear algebra are quite dull and abstract. One must have patience to persevere until the more advanced, and spectacularly beautiful, parts of the subject open to view." (F. Wilczek, Physik-Nobelpreisträger 2004, WSJ 8. Jan. 2016)

⇒ **Versuch einer Lösung dieses Problems durch Rückgriff auf physikdidaktische Ideen:**

Mit Hilfe der Geometrischen Algebra lässt sich eine an physikalischen und physikdidaktischen Setzungen orientierte moderne Lineare Algebra konstruieren, die auf einem konzeptuellen Gleichklang algebraischer und geometrischer Deutungen beruht.

⇒ **Fachliche Verortung:**

Die mathematische Sprache der Geometrischen Algebra wurde von David Hestenes und anderen Didaktikern mit Blick auf physikalische Modellierungsprozesse entwickelt und unter Rückgriff auf physikalische Ansätze didaktisch aufbearbeitet. Historisch ist die Geometrische Algebra ein physikdidaktisch motiviertes Konstrukt. Es zeigt sich jedoch, dass diese physikalisch motivierte Mathematik einen von der Physik abgehobenen Wert besitzen muss, da sie auch in physikfernen Gebieten immer stärker erfolgreich angewendet wird. Hier wird sie konkret zur Diskussion **wirtschaftswissenschaftlicher Fragestellungen** eingesetzt.

⇒ **Didaktisches Problem:**

Einführungen in die Lineare Algebra werden in Schule und Hochschule oft in Form einer rein algebraischen Zahlenakrobatik präsentiert – mit der Gefahr, diese dann einfallslos langweilig und betont abstrakt abzuhandeln.

⇒ **Vorgeschichte:**

WiSe 2014/2015 (HWR): Lösung Linearer Gleichungssysteme auf Grundlage der Geometrischen Algebra mit relativ leistungsstarken Studierenden (DD 13.06, Wuppertal 2015)
SoSe 2015 (MSB): Lösung Linearer Gleichungssysteme auf Grundlage der Geometrischen Algebra mit eher mathematikfernen Studierenden im Schnelldurchgang (DD 05.19, Hannover 2016)

⇒ **Aktuelles Poster:**

WiSe 2015/2016 (HWR): Lösung Linearer Gleichungssysteme mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus auf Grundlage der Geometrischen Algebra mit relativ leistungsstarken Studierenden (DD 05.10)

Beispielaufgabe:

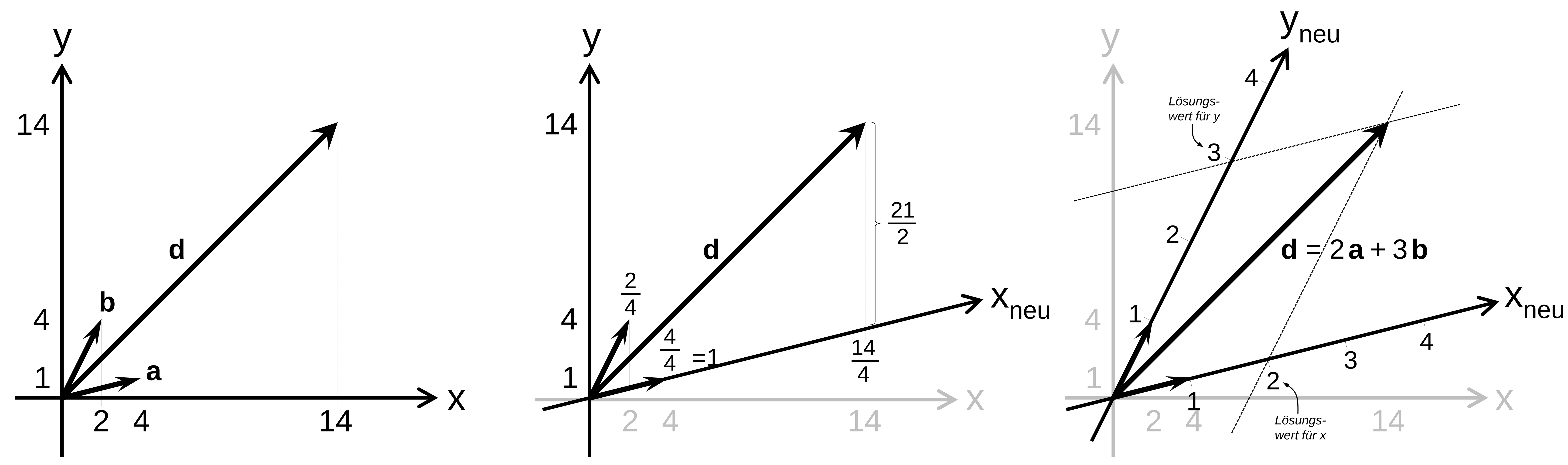
Wie lauten die Lösungswerte x, y des Linearen Gleichungssystems

$$\boxed{\begin{aligned} 4x + 2y &= 14 \\ x + 4y &= 14 \end{aligned}}\ ?$$

Kernidee und zentraler Ansatz:

Den oft nur rein algebraisch begründeten Zeilenmanipulationen des Gaußschen Algorithmus wird eine geometrische Deutung zur Seite gestellt, die den Zugang zu diesem Algorithmus erleichtert und auf ein typisches Werkzeug physikalischer Modellierungen verweist:

Der Gaußsche Algorithmus wird mit Hilfe der Geometrischen Algebra als Koordinatentransformation gedeutet.



Algebraische Beschreibung der Koordinatentransformation:

Spaltenorientierte Interpretation des LGS durch Einführung der Koeffizientenvektoren **a**, **b** und des Ergebnisvektors **d**.

$$\begin{aligned} 4x + 2y &= 14 \\ x + 4y &= 14 \end{aligned}$$

⇒ **a** x + **b** y = **d**

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{a}} x + \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}} y = \underbrace{\begin{pmatrix} 14 \\ 14 \end{pmatrix}}_{\mathbf{d}}$$

Darstellung der Vektoren als Linearkombinationen von Pauli-Matrizen.

$$(4\,\sigma_x + \sigma_y)\,x + (2\,\sigma_x + 4\,\sigma_y)\,y = 14\,\sigma_x + 14\,\sigma_y$$

$$\Downarrow$$

$$e_x\,x + (0{,}5\,e_x + 3{,}5\,\sigma_y)\,y = 3{,}5\,e_x + 10{,}5\,\sigma_y$$

$$\Downarrow$$

$$e_x\,x + e_y\,y = 2\,e_x + 3\,\sigma_y$$

Transformation der x-Achse:
Koeffizientenvektor **a** wird neuer Richtungsvektor e_x in x-Richtung: $e_x = \mathbf{a}$

Transformation der y-Achse:
Koeffizientenvektor **b** wird neuer Richtungsvektor e_y in y-Richtung: $e_y = \mathbf{b}$

Lösungswerte: x = 2 y = 3

Die Koeffizienten der Pauli-Vektor-Gleichungen sind identisch mit den Koeffizienten der erweiterten Gauß-Matrix

x	y	d
4	2	14
1	4	14
1	0,5	3,5
0	3,5	10,5
1	0	2
0	1	3

Mehr Material finden Sie im beigefügten Skript.