Medical School Berlin
Hochschule für Gesundheit und Medizin

Hochschule für
Wirtschaft und Recht Berlin
Berlin School of Economics and Law

Sommersemester 2015

Dr. Horn

Moderne Lineare Algebra

– Ein Überblick –

MSB Modul M 22: Mathematik und Statistik
HWR LV-Nr. 200 691.01: Mathematics for Business and Economics

Stand: 28. Juni 2015

Themeneingrenzung

Die Lineare Algebra umfasst als Themengebiet die Mathematik linearer Gleichungen und Linearer Gleichungssysteme.

Zahlreiche ökonomische Beziehungen können durch lineare Gleichungen ausgedrückt oder angenähert werden.

$$\left.\begin{array}{l} 3x^4 + \dfrac{12}{y} - 5\sqrt{z} = 27 \\ \text{bzw.} \\ 3x^4 + 12y^{-1} - 5z^{\frac{1}{2}} = 27 \end{array}\right\} \text{ist keine lineare Gleichung}$$

Linearität

$$\left.\begin{array}{l} 3x + 12y - 5z = 27 \\ \text{bzw.} \\ 3x^1 + 12y^1 - 5z^1 = 27 \end{array}\right\} \text{ist eine lineare Gleichung}$$

Dies ist eine algebraische Gleichung.

Aber erinnern wir uns an Galileo Galilei…

Galileo Galilei (1564 – 1642):

> “Philosophy is written in that great book which ever lies before our eyes – I mean the universe – but we cannot understand it if we do not first learn the language and characters in which it is written.
>
> This language is mathematics, and **the characters are** triangles, circles and other **geometrical figures**, without whose help it is impossible to comprehend a single word of it; without which one wanders in vain through a dark labyrinth.”

Mathematik ist die Sprache, in der wir unsere Welt beschreiben. Ihre Buchstaben werden in algebraischer Art und Weise zusammengefügt.

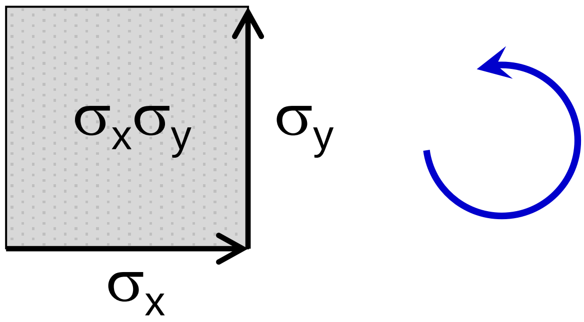
Diese Buchstaben jedoch sind geometrische Größen.

$$3\,x + 12\,y - 5\,z = r$$

$$3 \begin{array}{c}\text{Vektor in}\\ \text{x-Richtung}\end{array} + 12 \begin{array}{c}\text{Vektor in}\\ \text{y-Richtung}\end{array} - 5 \begin{array}{c}\text{Vektor in}\\ \text{z-Richtung}\end{array} = \text{Vektor}$$

Erst durch eine geometrische Beschreibung setzen wir tatsächlich Galileos Einsicht folgerichtig um.

Geometrie des Raumes



rechtshändige Orientierung (Rotationssinn entgegen dem Uhrzeigersinn)

σ_x ...... Basisvektor in x-Richtung
(ein Schritt der Länge 1 parallel zur x-Achse)

σ_y ...... Basisvektor in y-Richtung
(ein Schritt der Länge 1 parallel zur y-Achse)

σ_z ...... Basisvektor in z-Richtung
(ein Schritt der Länge 1 parallel zur z-Achse)

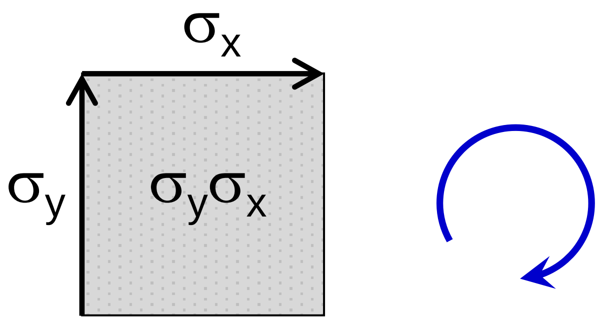
Basisvektoren sind Einheitsvektoren:

$$\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = 1$$

Das Produkt aus zwei verschiedenen Basis-vektoren ergibt einen Basis-Bivektor und stellt ein orientiertes Flächenstück (oder orientiertes Rechteck) dar:

$$\sigma_x\, \sigma_y = \sigma_x\sigma_y$$

Nun wird die Reihenfolge der Vektoren geändert:



linkshändige
Orientierung
(im Uhrzeigersinn)

σ_x ...... Basisvektor in x-Richtung
(Schritt parallel zur x-Achse) *zweiter Schritt*

σ_y ...... Basisvektor in y-Richtung
(Schritt parallel zur y-Achse) *erster Schritt*

σ_z ...... Basisvektor in z-Richtung
(Schritt parallel zur z-Achse)

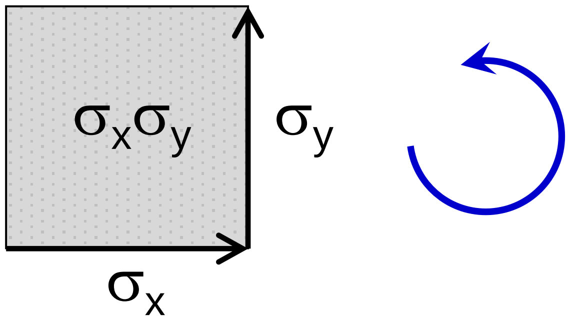
Bei dieser Abfolge der beiden Schritte ergibt sich ein orientiertes Flächenstück

$$\sigma_y\,\sigma_x = \sigma_y\sigma_x$$

mit umgekehrter Reihenfolge in der Anordnung der Basisvektoren.

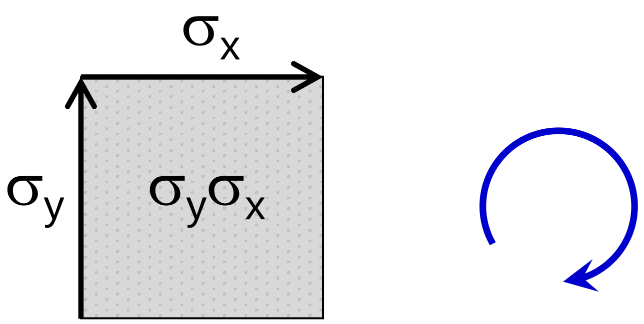
Werden Vektoren multipliziert, so ist die Reihenfolge der Vektoren wichtig! Sie beschreibt den Orientierungssinn des Flächenstücks.

Die Reihenfolge von Vektoren ist wichtig! Sie beschreibt den Orientierungssinn des Bivektors bzw. des Flächenstücks.



rechtshändige Orientierung (entgegen Uhrzeigersinn)

positive Ausrichtung in einem rechtshändigen Koordinatensystem



linkshändige Orientierung (im Uhrzeigersinn)

negative Ausrichtung in einem rechtshändigem Koordinatensystem

oberes Flächenstück = – unteres Flächenstück

$$\sigma_x\sigma_y = -\,\sigma_y\sigma_x$$

Ähnliche Beziehungen gelten für die anderen Richtungen:

$$\sigma_y\sigma_z = -\,\sigma_z\sigma_y$$

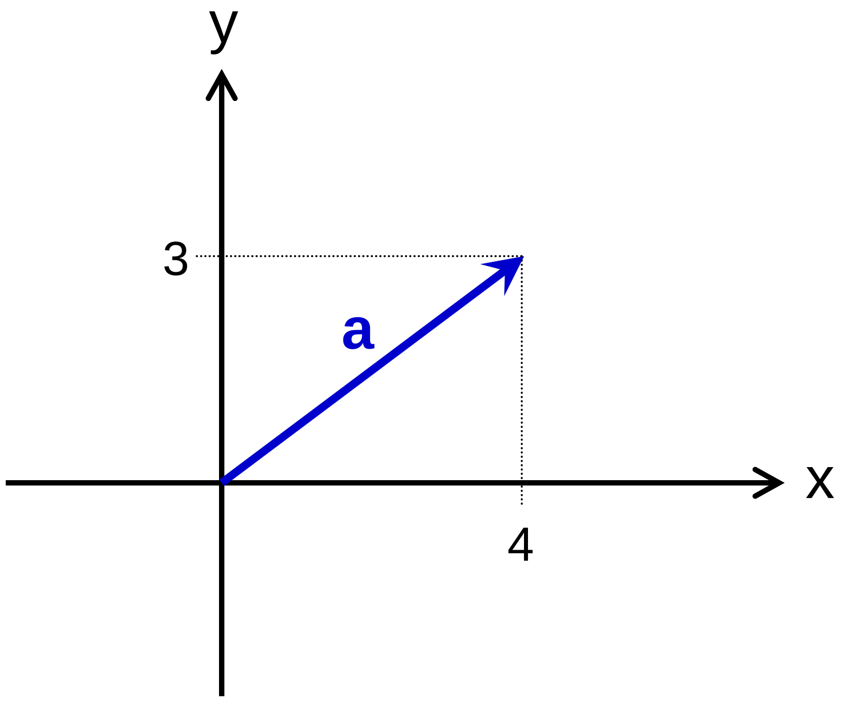
$$\sigma_z\sigma_x = -\,\sigma_x\sigma_z$$

Wird die Reihenfolge zweier benachbarter Basisvektoren geändert, so muss ein zusätzliches Minuszeichen eingefügt werden.

Vektoren

Vektoren sind orientierte Streckenstücke. Sie können als Linearkombination von Basisvektoren ausgedrückt werden.

Beispiel: $\mathbf{a} = 4\,\sigma_x + 3\,\sigma_y$



In drei Dimensionen gilt somit:

$$\mathbf{r} = x\,\sigma_x + y\,\sigma_y + z\,\sigma_z$$

Längenberechnung von Vektoren

Zuerst wird der Vektor quadriert.
Beispiel: Die Länge von $\mathbf{r_1}$ soll berechnet werden.

$$\mathbf{a}^2 = (4\,\sigma_x + 3\,\sigma_y)^2 = (4\,\sigma_x + 3\,\sigma_y)\,(4\,\sigma_x + 3\,\sigma_y)$$

$$= 16\,\sigma_x^2 + 12\,\sigma_x\sigma_y + 12\,\sigma_y\sigma_x + 9\,\sigma_y^2$$

$$= 16 + 12\,\sigma_x\sigma_y - 12\,\sigma_x\sigma_y + 9$$

$$= 16 + 9 = 25$$

Die Wurzel dieses Quadrats gibt die Länge des Vektors an:

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a^2} = \sqrt{25} = 5$$

Da sich die gemischten Terme gegenseitig aufheben, ist das Quadrat eines Vektors immer ein positiver Skalar:

$$\mathbf{r}^2 = (x\,\sigma_x + y\,\sigma_y + z\,\sigma_z)^2$$

$$= (x\,\sigma_x + y\,\sigma_y + z\,\sigma_z)\,(x\,\sigma_x + y\,\sigma_y + z\,\sigma_z)$$

$$= x^2 + y^2 + z^2 \qquad \Rightarrow \text{Satz von Pythagoras}$$

Lineare Gleichungssysteme (LGS)

Mit Hilfe von Vektoren lassen sich Lineare Gleichungssysteme nicht nur einfach beschreiben, sondern auch lösen.

Beispiel:

Ein Lineares Gleichungssystem bestehe aus den folgenden beiden Gleichungen:

$4x + y = 9$ Multiplikation mit σ_x

$3x + 2y = 8$ Multiplikation mit σ_y

$4x\,\sigma_x + 1y\,\sigma_x = 9\,\sigma_x$

$3x\,\sigma_y + 2y\,\sigma_x = 8\,\sigma_y$

$\mathbf{r} = 9\,\sigma_x + 8\,\sigma_y$ ***Ergebnisvektor***

$\mathbf{b} = \sigma_x + 2\,\sigma_y$ ***zweiter Koeffizientenvektor***

$\mathbf{a} = 4\,\sigma_x + 3\,\sigma_y$ ***erster Koeffizientenvektor***

$\Rightarrow$ Das LGS besteht jetzt nur noch aus einer Gleichung: $\mathbf{a}\,x + \mathbf{b}\,y = \mathbf{r}$

Strategien zur Lösung Linearer Gleichungssysteme

Ausgangspunkt ist das Lineare Gleichungs-system

$$\mathbf{a}\, x + \mathbf{b}\, y = \mathbf{r}$$

Die beiden Koeffizientenvektoren **a** und **b** sowie der Ergebnisvektor **r** sind bekannt.

Ziel ist, die beiden Unbekannten x und y zu bestimmen.

Im Folgenden werden drei verschiedene Lösungsverfahren vorgestellt, die auf der modernen Beschreibung von Vektoren auf-baut:

- Direkte Lösung mit Hilfe des äußeren Produkts
- Indirekte Lösung über Bestimmung der inversen Matrix mit Hilfe des äußeren Produkts
- Interpretation des Gauß-Verfahrens als Koordinatentransformation

Erste Strategie zur Lösung Linearer Gleichungssysteme

Ausgangspunkt ist das Lineare Gleichungs-system

$$\mathbf{a}\, x + \mathbf{b}\, y = \mathbf{r}$$

Die beiden Koeffizientenvektoren **a** und **b** sowie der Ergebnisvektor **r** sind bekannt.

Ziel ist, die beiden Unbekannten x und y zu bestimmen.

Diese Unbekannten werden ermittelt, indem Koeffizientenvektoren und Ergebnisvektor miteinander multipliziert

$$\mathbf{a}\,\mathbf{b} = ?$$

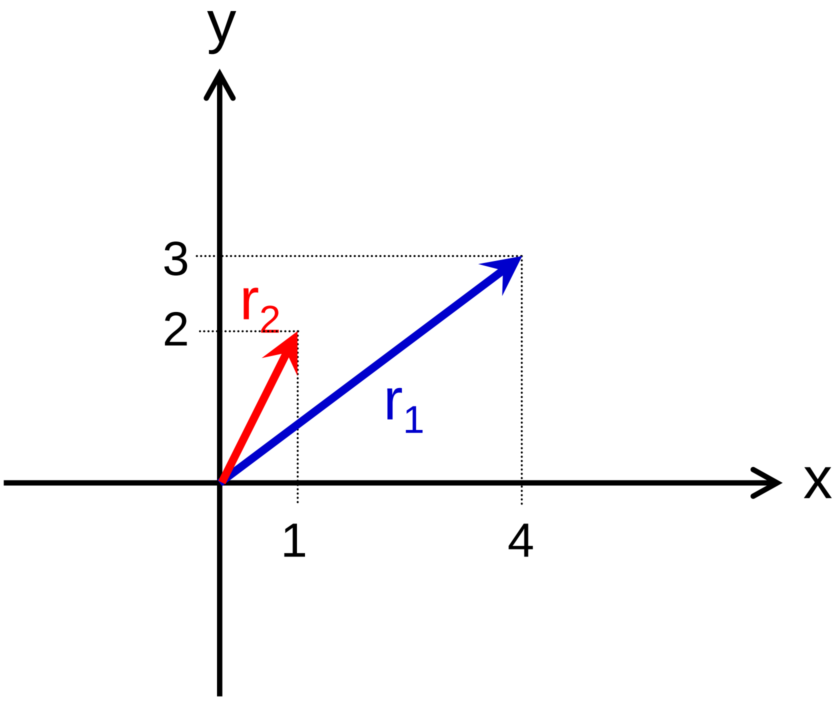
$$\mathbf{a}\,\mathbf{r} = ?$$

$$\mathbf{r}\,\mathbf{b} = ?$$

und dann miteinander verglichen werden.

Multiplikation von Vektoren

Multiplikation der beiden Koeffizientenvektoren $\mathbf{a} = 4\,\sigma_x + 3\,\sigma_y$
und $\mathbf{b} = \sigma_x + 2\,\sigma_y$



$$\mathbf{a}\,\mathbf{b} = (4\,\sigma_x + 3\,\sigma_y)\,(\sigma_x + 2\,\sigma_y)$$

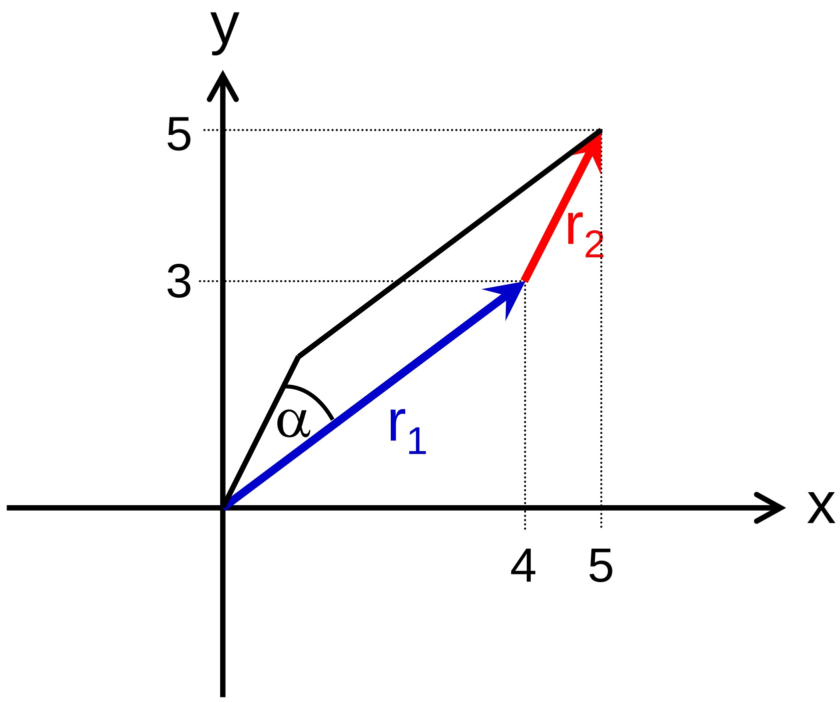
$$= 4\,\sigma_x^2 + 8\,\sigma_x\sigma_y + 3\,\sigma_y\sigma_x + 6\,\sigma_y^2$$

$$= 4 + 8\,\sigma_x\sigma_y - 3\,\sigma_x\sigma_y + 6$$

$$= 10 + 5\,\sigma_x\sigma_y$$

Multiplikation von Vektoren

Multiplikation der beiden Koeffizientenvektoren $\mathbf{a} = 4\,\sigma_x + 3\,\sigma_y$
und $\mathbf{b} = \sigma_x + 2\,\sigma_y$



$$\mathbf{a}\,\mathbf{b} = (4\,\sigma_x + 3\,\sigma_y)\,(\sigma_x + 2\,\sigma_y) = \underbrace{10}_{\text{Skalar}} + \underbrace{5\,\sigma_x\sigma_y}_{\text{Bivektor}}$$

Das Produkt der beiden Vektoren besteht aus einem skalaren Anteil und einem bivektoriellen Anteil.

Inneres und äußeres Produkt

Der skalare Anteil ist eine reelle Zahl.

Dieser Anteil wird **inneres Produkt** der beiden Vektoren genannt und durch einen dicken Punkt (englisch: dot) symbolisiert.

$$\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = 10$$

Der bivektorielle Anteil ist ein orientiertes Flächenstück.

Dieser Anteil wird **äußeres Produkt** der beiden Vektoren genannt und durch einen Keil (englisch: wedge) symbolisiert.

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = 5\, \sigma_x \sigma_y$$

Die beiden Vektoren **a** und **b** spannen ein Parallelogramm auf. Der Flächeninhalt A dieses Parallelogramms entspricht dem Betrag $|\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}|$ des äußeren Produkts:

$$A = |\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}| = 5$$

Multiplikation von Vektoren

Nun multiplizieren wir die beiden Koeffizientenvektoren $\mathbf{a} = 4\,\sigma_x + 3\,\sigma_y$

und $\mathbf{b} = \sigma_x + 2\,\sigma_y$

jeweils mit dem Ergebnisvektor

$$\mathbf{r} = 9\,\sigma_x + 8\,\sigma_y$$

$$\mathbf{a}\,\mathbf{r} = (4\,\sigma_x + 3\,\sigma_y)\,(9\,\sigma_x + 8\,\sigma_y)$$

$$= 36\,\sigma_x^{\,2} + 32\,\sigma_x\sigma_y + 27\,\sigma_y\sigma_x + 24\,\sigma_y^{\,2}$$

$$= 36 + 32\,\sigma_x\sigma_y - 27\,\sigma_x\sigma_y + 24$$

$$= 60 + 5\,\sigma_x\sigma_y$$

$$\mathbf{r}\,\mathbf{b} = (9\,\sigma_x + 8\,\sigma_y)\,(\sigma_x + 2\,\sigma_y)$$

$$= 9\,\sigma_x^{\,2} + 18\,\sigma_x\sigma_y + 8\,\sigma_y\sigma_x + 16\,\sigma_y^{\,2}$$

$$= 9 + 18\,\sigma_x\sigma_y - 8\,\sigma_x\sigma_y + 16$$

$$= 25 + 10\,\sigma_x\sigma_y$$

Lösung des Linearen Gleichungs- systems

Durch Vergleich der äußeren Produkte können die gesuchten Größen x und y ermittelt werden:

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = 5\,\sigma_x\sigma_y$$

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{r} = 5\,\sigma_x\sigma_y$$

$$\mathbf{r} \wedge \mathbf{b} = 10\,\sigma_x\sigma_y$$

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{r} = 1\,(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})$$

Lösung: $y = 1$

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = 5\,\sigma_x\sigma_y$$

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{r} = 5\,\sigma_x\sigma_y$$

$$\mathbf{r} \wedge \mathbf{b} = 10\,\sigma_x\sigma_y$$

$$\mathbf{r} \wedge \mathbf{b} = 2\,(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})$$

Lösung: $x = 2$

Die Lösung des Linearen Gleichungssystems ist somit durch x = 2 und y = 1 gegeben.

Dies kann durch eine einfache Probe überprüft werden:

$$\begin{aligned} 4x + y &= 9 \quad \Rightarrow \quad 4\cdot 2 + 1 = 9 \\ 3x + 2y &= 8 \quad \Rightarrow \quad 3\cdot 2 + 2\cdot 1 = 8 \end{aligned}$$

Matrizenmultiplikation

Die auf der vorangegangenen Folie gemachte Probe zeigt durch einfaches Einsetzen, dass die Lösungswerte korrekt sind.

In der Linearen Algebra werden Proben jedoch häufig mit Hilfe von Matrizenmultiplikationen durchgeführt. Dazu wird das besonders übersichtliche **Falksche Schema** verwendet:

$$\begin{array}{cc|cl} & & 2 & \\ & & 1 & \\ \hline 4 & 1 & 9 & \leftarrow \; 4 \cdot 2 + 1 = 9 \\ 3 & 2 & 8 & \leftarrow \; 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 8 \end{array}$$

Spaltenvektor der Lösung $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Koeffizientenmatrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Spaltenvektor des Ergebnisses

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Hier wird mit Hilfe der Matrizengleichung $\mathbf{A}\,\vec{x} = \vec{r}$ gezeigt, dass die Lösungswerte richtig sind.

Zweite Strategie zur Lösung Linearer Gleichungssysteme

Da Lineare Gleichungssysteme also auch als Matrizengleichungen

$$\mathbf{A}\,\vec{x} = \vec{r}$$

geschrieben werden können, können diese Gleichungssysteme mit Hilfe der Matrizenrechnung gelöst werden. Dazu muss die Inverse der Matrix $\mathbf{A}^{-1}$ von links an das Lineare Gleichungssystem anmultipliziert werden:

$$\underbrace{\mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{A}}_{\mathbf{E}}\,\vec{x} = \mathbf{A}^{-1}\,\vec{r}$$

Die Multiplikation einer Inversen $\mathbf{A}^{-1}$ mit der ursprünglichen Matrix $\mathbf{A}$ ergibt die Einheitsmatrix $\mathbf{E}$, so dass aufgrund von $\mathbf{E}\vec{x} = \vec{x}$ die folgende Lösungsgleichung gefunden wird:

$$\vec{x} = \mathbf{A}^{-1}\,\vec{r}$$

Zusammenfassung dieser zweiten Lösungsstrategie:

$$\mathbf{A}^{-1} = ?$$

$$\mathbf{A}^{-1}\,\vec{r} = ?$$

Bestimmung inverser Matrizen

Die Definitionsgleichung

$$\mathbf{A}\,\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}$$

kann im Falkschen Schema übersichtlich dar- gestellt werden:

$$\begin{array}{cc|cc l}
 & & x_1 & x_2 & \text{gesuchte inverse} \\
 & & y_1 & y_2 & \text{Matrix } \mathbf{A}^{-1} \\
\cline{1-4}
4 & 1 & 1 & 0 & \\
3 & 2 & 0 & 1 & \text{Einheitsmatrix } \mathbf{E}
\end{array}$$

Koeffizientenmatrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Diese Matrizenmultiplikation kann nun in zwei voneinander unabhängige Lineare Gleichungssysteme aufgeteilt werden.

Dazu werden die Matrizen spaltenweise getrennt angeordnet.

Bestimmung inverser Matrizen

		x_1	x_2
		y_1	y_2
4	1	1	0
3	2	0	1

erstes LGS (links):

		x_1
		y_1
4	1	1
3	2	0

zweites LGS (rechts):

		x_2
		y_2
4	1	0
3	2	1

$\Rightarrow$ Die beiden Linearen Gleichungssysteme können nun mit der bereits vorgestellten Methode gelöst werden.

Lösung des ersten Linearen Gleichungssystems

$$4\,x_1 + 1\,y_1 = 1$$

$$3\,x_1 + 2\,y_1 = 0$$

$\mathbf{r_1} = \sigma_x$ ***Ergebnisvektor***

$\mathbf{b} = \sigma_x + 2\,\sigma_y$ ***zweiter Koeffizientenvektor***

$\mathbf{a} = 4\,\sigma_x + 3\,\sigma_y$ ***erster Koeffizientenvektor***

Multiplikation der Vektoren

$$\mathbf{a}\,\mathbf{b} = (4\,\sigma_x + 3\,\sigma_y)\,(\sigma_x + 2\,\sigma_y) = 10 + 5\,\sigma_x\sigma_y$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = 5\,\sigma_x\sigma_y$$

$$\mathbf{r_1}\,\mathbf{b} = \sigma_x\,(\sigma_x + 2\,\sigma_y) = 1 + 2\,\sigma_x\sigma_y$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{r_1} \wedge \mathbf{b} = 2\,\sigma_x\sigma_y$$

$$\mathbf{a}\,\mathbf{r_1} = (4\,\sigma_x + 3\,\sigma_y)\,\sigma_x = 4 - 3\,\sigma_x\sigma_y$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{r_1} = -\,3\,\sigma_x\sigma_y$$

Lösung des ersten Linearen Gleichungssystems

$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = 5\,\sigma_x\sigma_y$ $\qquad$ $\mathbf{r_1} \wedge \mathbf{b} = 2\,\sigma_x\sigma_y$

$$\Rightarrow \qquad x_1\,(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = \mathbf{r_1} \wedge \mathbf{b}$$

$$5\,x_1\,\sigma_x\sigma_y = 2\,\sigma_x\sigma_y$$

$$x_1 = \frac{2}{5}$$

$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = 5\,\sigma_x\sigma_y$ $\qquad$ $\mathbf{a} \wedge \mathbf{r_1} = -\,3\,\sigma_x\sigma_y$

$$\Rightarrow \qquad y_1\,(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = \mathbf{a} \wedge \mathbf{r_1}$$

$$5\,y_1\,\sigma_x\sigma_y = -\,3\,\sigma_x\sigma_y$$

$$y_1 = -\,\frac{3}{5}$$

$\Rightarrow$ Die erste Spalte der inversen Matrix $\mathbf{A}^{-1}$ kann somit angegeben werden:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & x_2 \\ -\frac{3}{5} & y_2 \end{pmatrix}$$

Lösung des zweiten Linearen Gleichungssystems

$$4\,x_2 + 1\,y_2 = 0$$

$$3\,x_2 + 2\,y_2 = 1$$

$\mathbf{r_2} = \sigma_y$ ***Ergebnisvektor***

$\mathbf{b} = \sigma_x + 2\,\sigma_y$ ***zweiter Koeffizientenvektor***

$\mathbf{a} = 4\,\sigma_x + 3\,\sigma_y$ ***erster Koeffizientenvektor***

Multiplikation der Vektoren

$$\mathbf{a}\,\mathbf{b} = (4\,\sigma_x + 3\,\sigma_y)\,(\sigma_x + 2\,\sigma_y) = 10 + 5\,\sigma_x\sigma_y$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = 5\,\sigma_x\sigma_y$$

$$\mathbf{r_2}\,\mathbf{b} = \sigma_y\,(\sigma_x + 2\,\sigma_y) = 2 - \sigma_x\sigma_y$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{r_2} \wedge \mathbf{b} = -\,\sigma_x\sigma_y$$

$$\mathbf{a}\,\mathbf{r_2} = (4\,\sigma_x + 3\,\sigma_y)\,\sigma_y = 3 + 4\,\sigma_x\sigma_y$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{r_2} = 4\,\sigma_x\sigma_y$$

Lösung des zweiten Linearen Gleichungssystems

$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = 5\, \sigma_x\sigma_y \qquad\qquad \mathbf{r_2} \wedge \mathbf{b} = -\, \sigma_x\sigma_y$

$$\Rightarrow \qquad x_2\, (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = \mathbf{r_2} \wedge \mathbf{b}$$

$$5\, x_2\, \sigma_x\sigma_y = -\, \sigma_x\sigma_y$$

$$x_2 = -\frac{1}{5}$$

$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = 5\, \sigma_x\sigma_y \qquad\qquad \mathbf{a} \wedge \mathbf{r_2} = 4\, \sigma_x\sigma_y$

$$\Rightarrow \qquad y_2\, (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = \mathbf{a} \wedge \mathbf{r_2}$$

$$5\, y_2\, \sigma_x\sigma_y = 4\, \sigma_x\sigma_y$$

$$y_2 = \frac{4}{5}$$

$\Rightarrow$ Die gesamte inverse Matrix $\mathbf{A}^{-1}$ lautet somit:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

Probe: Überprüfung der inversen Matrix $\mathbf{A}^{-1}$

		$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$
		$-\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$
4	1	1	0
3	2	0	1

$\Rightarrow$ Die inverse Matrix wurde korrekt berechnet.

Damit kann nun das Lineare Gleichungssystem mit Hilfe der zweiten Lösungsstrategie gelöst werden:

$$\vec{x} = \mathbf{A}^{-1}\,\vec{r} = ?$$

Auch hier bietet sich das Falksche Schema zur Berechnung des gesuchten Lösungsvektors an.

Lösung des Linearen Gleichungssys-tems mit Hilfe der inversen Matrix

Letzter Schritt:
Ausmultiplikation von $\vec{x} = \mathbf{A}^{-1}\,\vec{r}$

$$\begin{array}{cc|cl}
 & & 9 & \\
 & & 8 & \left.\right\} \vec{r} \\
\hline
\mathbf{A}^{-1} \left\{ \right. & \frac{2}{5} \quad -\frac{1}{5} & 2 & \\
 & -\frac{3}{5} \quad \frac{4}{5} & 1 & \left.\right\} \text{Lösungs-vektor} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{array}$$

$\Rightarrow$ Es ergeben sich die gleichen Lösungs-werte wie bei direkter Lösung des LGS.
(siehe Folie S. 16)

Die Lösung des Linearen Gleichungssystems wird somit wieder durch die Werte $x = 2$ und $y = 1$ gegeben.

Dritte Strategie zur Lösung Linearer Gleichungssysteme

Ausgangspunkt ist das Lineare Gleichungs-system

$$4x + y = 9 \qquad \text{Multiplikation mit } \sigma_x$$

$$3x + 2y = 8 \qquad \text{Multiplikation mit } \sigma_y$$

$$4x\,\sigma_x + 1y\,\sigma_x = 9\,\sigma_x$$

$$3x\,\sigma_y + 2y\,\sigma_x = 8\,\sigma_y$$

$\mathbf{r} = 9\,\sigma_x + 8\,\sigma_y$ ***Ergebnisvektor***

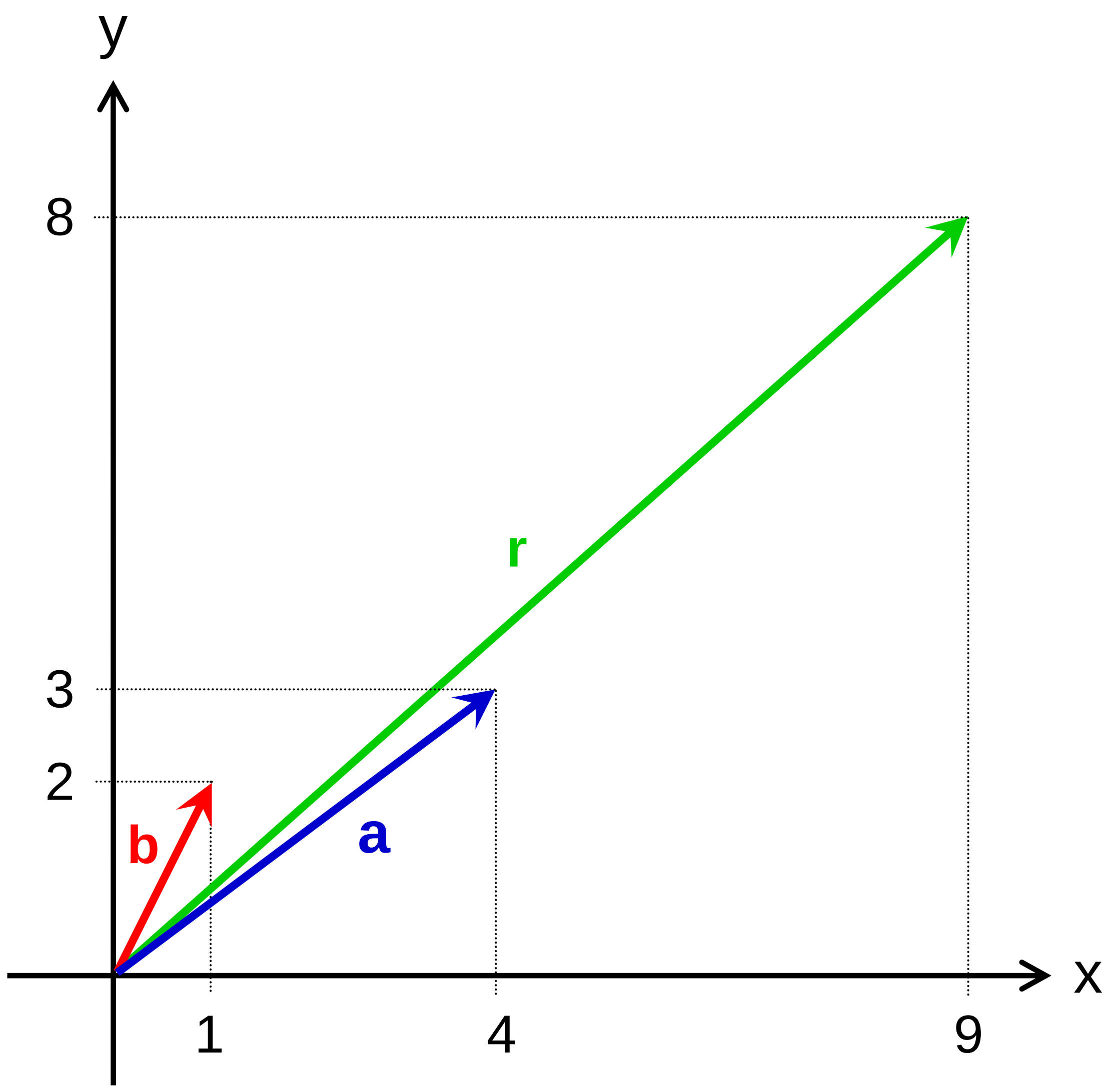
$\mathbf{b} = \sigma_x + 2\,\sigma_y$ ***zweiter Koeffizientenvektor***

$\mathbf{a} = 4\,\sigma_x + 3\,\sigma_y$ ***erster Koeffizientenvektor***

Dieses Gleichungssystem stellen wir graphisch dar, indem wir die Vektoren in ein Koordinatensystem einzeichnen.

(siehe nächste Folie)

Graphische Darstellung des Linearen Gleichungssystems



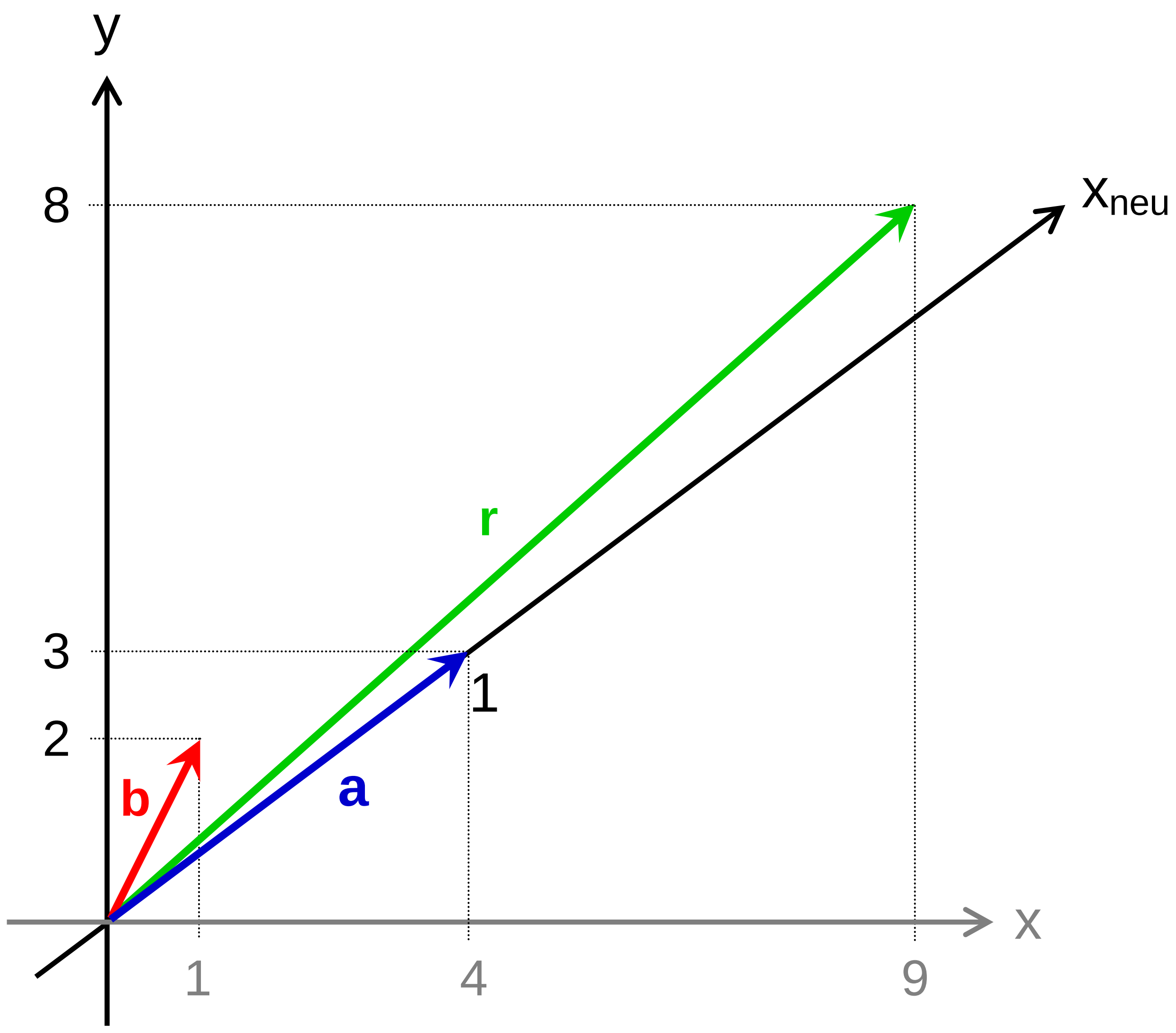
Ausgangspunkt:

$$\underbrace{(4\,\sigma_x + 3\,\sigma_y)}_{\mathbf{a}}\,x + \underbrace{(1\,\sigma_x + 2\,\sigma_y)}_{\mathbf{b}}\,y = \underbrace{9\,\sigma_x + 8\,\sigma_y}_{\mathbf{r}}$$

Nun wird zuerst die x-Achse des Koordinatensystems transformiert.

Transformation der x-Achse

Die neue x-Achse zeigt in Richtung des Koeffizientenvektors **a**.



Außerdem soll die Länge des Koeffizientenvektors **a** im neuen Koordinatensystem genau **eins** betragen.

$\Rightarrow$ **a** ist ein Einheitsvektor in x-Richtung.

Transformation der x-Achse

Algebraische Beschreibung dieser ersten Transformation:

$$\sigma_x = \frac{1}{4}\,\mathbf{a} - \frac{3}{4}\,\sigma_y$$

$$\overbrace{(4\,\sigma_x + 3\,\sigma_y)}^{\mathbf{a} = 4\,\sigma_x + 3\,\sigma_y}\, x + (1\,\sigma_x + 2\,\sigma_y)\, y = 9\,\sigma_x + 8\,\sigma_y$$

$$\mathbf{a}\, x + \left(\frac{1}{4}\,\mathbf{a} - \frac{3}{4}\,\sigma_y + 2\,\sigma_y\right) y = \frac{9}{4}\,\mathbf{a} - \frac{27}{4}\,\sigma_y + 8\,\sigma_y$$

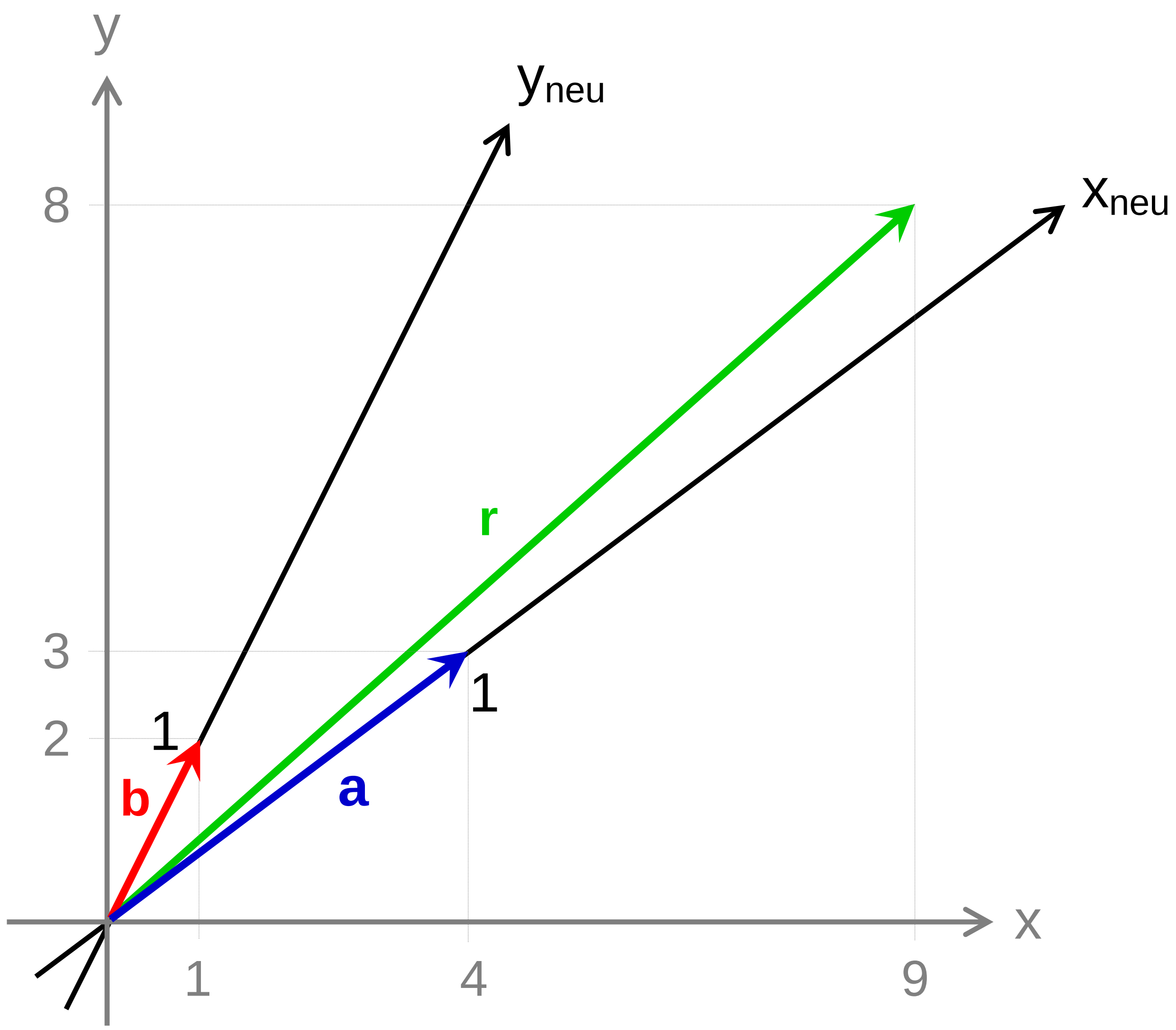
Zwischenergebnis:

$$\mathbf{a}\, x + \left(\frac{1}{4}\,\mathbf{a} + \frac{5}{4}\,\sigma_y\right) y = \frac{9}{4}\,\mathbf{a} + \frac{5}{4}\,\sigma_y$$

In einem zweiten Schritt wird die y-Achse des Koordinatensystems transformiert.

Transformation der y-Achse

Die neue y-Achse zeigt in Richtung des Ko-effizientenvektors **b**.



Außerdem soll die Länge des Koeffizienten-vektors **b** in diesem endgültigen Koordinaten-system genau **eins** betragen.

$\Rightarrow$ **b** ist ein Einheitsvektor in y-Richtung.

Transformation der y-Achse

Algebraische Beschreibung der zweiten Transformation:

$$\sigma_y = \frac{4}{5}\,\mathbf{b} - \frac{1}{5}\,\mathbf{a}$$

$$\mathbf{b} = \frac{1}{4}\,\mathbf{a} + \frac{5}{4}\,\sigma_y$$

$$\mathbf{a}\,x + \underbrace{\left(\frac{1}{4}\,\mathbf{a} + \frac{5}{4}\,\sigma_y\right)}\,y = \frac{9}{4}\,\mathbf{a} + \frac{5}{4}\,\sigma_y$$

$$\mathbf{a}\,x + \mathbf{b}\,y = \frac{9}{4}\,\mathbf{a} + \frac{5}{4}\left(\frac{4}{5}\,\mathbf{b} - \frac{1}{5}\,\mathbf{a}\right)$$

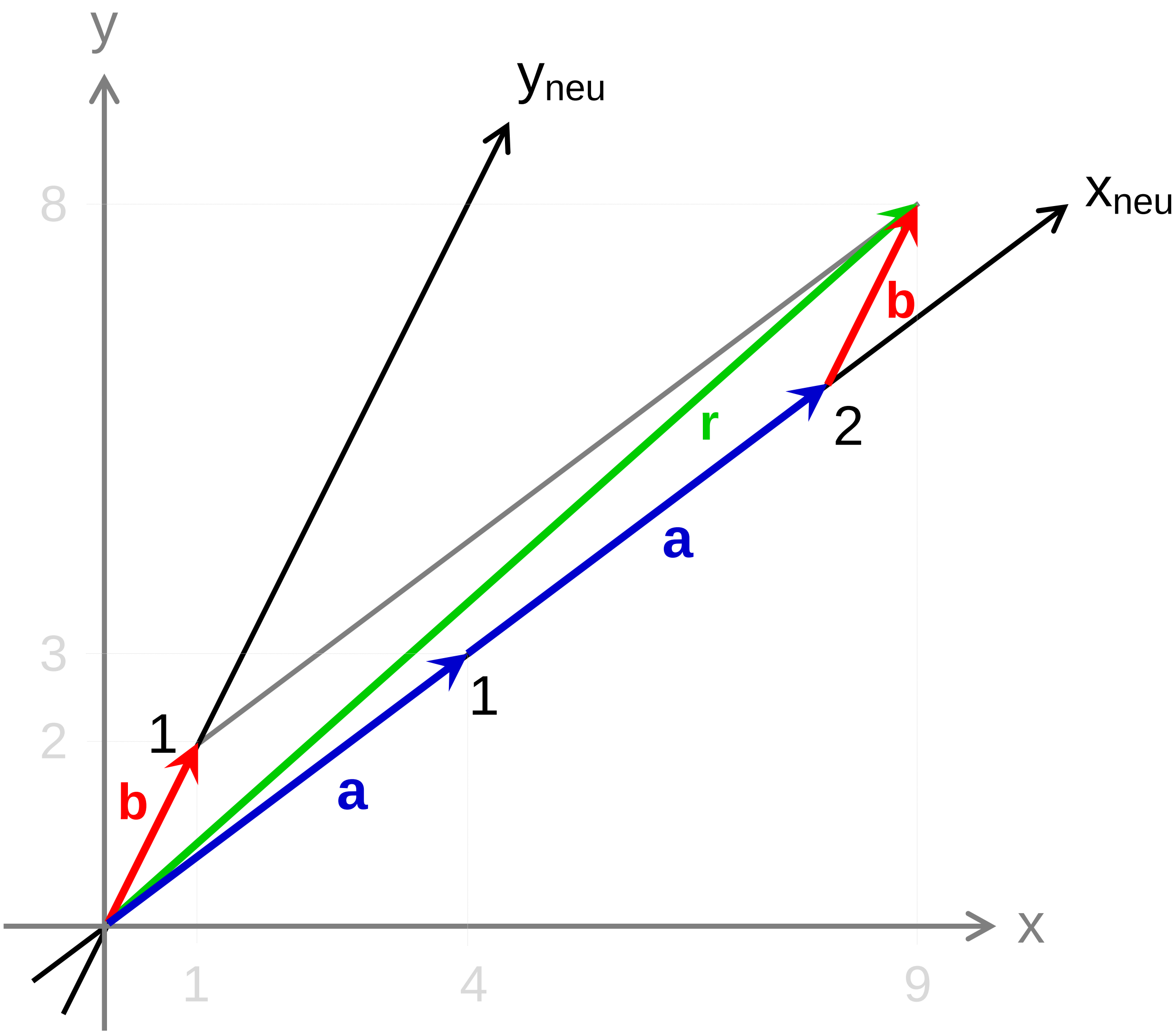
Endergebnis:

$$\mathbf{a}\,x + \mathbf{b}\,y = 2\,\mathbf{a} + 1\,\mathbf{b}$$

$$\Downarrow \qquad \Downarrow$$

Lösung: $x = 2 \quad y = 1$

Graphische Darstellung der Lösung



⇒ Der Ergebnisvektor **r** setzt sich folgendermaßen aus den Koeffizientenvektoren **a** und **b** zusammen:

$$\mathbf{r} = 2\,\mathbf{a} + \mathbf{b}$$

Die Koordinatentransformationen werden im Gauß-Verfahren kompakt tabellarisch dargestellt.

Zusammenfassung: Gauß-Verfahren

Der Koeffizientenvektor **a** wird als Einheitsvektor e_x in x-Richtung und der Vektor **b** als Einheitsvektor e_y in y-Richtung genutzt.

Ausgangspunkt:

$$(4\,\sigma_x + 3\,\sigma_y)\,x + (1\,\sigma_x + 2\,\sigma_y)\,y = 9\,\sigma_x + 8\,\sigma_y$$

Zwischenergebnis:

$$e_x\,x + \left(\frac{1}{4}e_x + \frac{5}{4}\sigma_y\right) y = \frac{9}{4}e_x + \frac{5}{4}\sigma_y$$

Endergebnis:

$$e_x\,x + e_y\,y = 2\,e_x + 1\,e_y$$

Die Koeffizienten werden nun in einer erweiterten Koeffizientenmatrix tabellarisch zusammengestellt.

Zusammenfassung: Gauß-Verfahren

Ausgangspunkt:

$$(4\,\sigma_x + 3\,\sigma_y)\,x + (1\,\sigma_x + 2\,\sigma_y)\,y = 9\,\sigma_x + 8\,\sigma_y$$

Zwischenergebnis:

$$1\,e_x\,x + \left(\frac{1}{4}e_x + \frac{5}{4}\sigma_y\right) y = \frac{9}{4}e_x + \frac{5}{4}\sigma_y$$

Endergebnis:

$$1\,e_x\,x + 1\,e_y\,y = 2\,e_x + 1\,e_y$$

x	y	r	
4	1	9	$\times\frac{1}{4}$
3	2	8	$-\frac{3}{4}$ (1. Zeile)
1	1/4	9/4	$-\frac{1}{5}$ (2. Zeile)
0	5/4	5/4	$\times\frac{4}{5}$
1	0	2	$\Rightarrow\ x = 2$
0	1	1	$\Rightarrow\ y = 1$