

Die Geometrische Algebra im Schnelldurchgang

Martin Erik Horn (mail@martinerikhorn.de)

Hochschule für Wirtschaft und Recht Berlin, FB 1, FE Quantitative Methoden & MSB Medical School Berlin



Ausgangslage: Die Reform von Bologna hat in Deutschland zu einer deutlichen Ausdifferenzierung und Ausweitung der Studienangebote geführt. Mittlerweile wird eine Vielzahl von unterschiedlichsten Studiengängen angeboten, die bereits auf Bachelor-Niveau hochgradig spezialisiert sind.

Konsequenzen: Um die Erwartungen nicht nur der Studierenden, sondern auch zukünftiger Arbeitgeber zu erfüllen, wird in solchen Studiengängen verstärkt und sehr zielgerichtet studiengangsspezifisch Fachwissen vermittelt. Dies führt jedoch zwangsläufig auch dazu, dass die Grundlagenausbildung aus Zeitgründen einen nicht mehr so breiten Raum einnehmen kann wie bei klassischen Studiengängen, die eine offene, polyvalente Themensetzung im Bachelor-Bereich aufweisen und erst in nachfolgenden Master-Studiengängen eine vertiefte Spezialisierung anstreben.

Beispiel: Anstelle eines breit und umfassend angelegten Studiums zur Betriebswirtschaftslehre können Studierende an der MSB den Bachelorstudiengang „**Medical Controlling and Management**“ studieren, der strikt auf das wirtschaftliche Agieren in der Gesundheitsbranche fokussiert.

Vergleich mit klassischer Studienstrukturierung: Im MSB-Studiengang Medical Controlling and Management steht die Vermittlung berufsfeldbezogener Handlungskompetenzen (Module zum Operativen Medizincontrolling und zum Medizinischen Qualitäts- und Forschungsmanagement) im Vordergrund. Die Grundlagenausbildung erfolgt sehr gedrängt.

Mathematik- und Statistikausbildung:

HWR Poolveranstaltungen
verteilt auf zwei Kurse
mit insgesamt 10 SWS

MSB (BA MC)
einsemestriges Modul
mit lediglich 4 SWS

Die geänderten Rahmenbedingungen der wissenschaftlichen Grundlagenausbildung erfordern nicht nur ein radikales Umdenken bei der didaktischen Ausgestaltung der Kurse, sondern eröffnen auch Chancen für neue Herangehensweisen.

Universitäre Mathematik **Fachhochschulische Ma.**

Dichotomie von Feynman: Griechische Tradition ↔ Babylonische Tradition
Axiomatische Fundierung ↔ Exemplarisches Betrachten
Erarbeitung eines mathematischen Gesamtgebäudes ↔ Lernen an Beispielen
↓
Mathematik „mathematisch“ verstehen ↔ Mathematik „physikalisch“ verstehen

Moderne Lineare Algebra: Didaktische Reduktion der Geometrischen Algebra als eine physikalisch motivierte mathematische Sprache, die über die Physik hinausweist und auch in nicht-physikalischen Fachzusammenhängen eine fundierte mathematische Herangehensweise fördert.
Ziel ist eine effiziente und äußerst kompakte Darstellung der Linearen Algebra auf einer fachlich modernen Basis unter Einbezug nicht-kommutativer Konzepte.

These dieses Posterbeitrags:

Auf Grundlage der Geometrischen Algebra kann die Lineare Algebra in moderner Darstellung auf Fachhochschulniveau in inhaltlich sehr kompakter und didaktisch reduzierter Form vermittelt und mit Studierenden diskutiert werden.

Beispiel einer Klausuraufgabe: Zur Herstellung einer einzigen Mengeneinheit (ME) des Endproduktes E_1 werden 5 ME des Rohstoffes R_1 und 8 ME des Rohstoffes R_2 benötigt. Zur Herstellung einer einzigen Mengeneinheit des Endproduktes E_2 werden 2 ME des Rohstoffes R_1 und 4 ME des Rohstoffes R_2 benötigt. Berechnen Sie, welche Menge der Endprodukte E_1 und E_2 hergestellt werden, wenn im Herstellungsprozess insgesamt genau 60 ME des Rohstoffes R_1 und 100 ME des Rohstoffes R_2 verbraucht werden.

Studentische Musterlösung:

Vorgehensweise

Ermittlung der Matrix des Rohstoffbedarfs zur Herstellung jeweils einer einzigen Mengeneinheit der Endprodukte.

Ermittlung des Vektors des Gesamtrohstoffbedarfs.

Aufstellung des Linearen Gleichungssystems mit Hilfe des Falkschen Schemas.

Bestimmung der Koeffizientenvektoren und des Ergebnisvektors.

Berechnung der Geometrischen Produkte der Vektoren a, b, r und a, r .

Ermittlung der äußeren Produkte der Vektoren $a \wedge b, r \wedge b$ und $a \wedge r$.

Größenvergleich der äußeren Produkte $r \wedge b$ und $a \wedge r$ mit dem äußeren Produkt $a \wedge b$, die als Bivektoren in der gleichen Ebene liegen.

Das Größenverhältnis dieser äußeren Produkte liefert die Lösungswerte der Unbekannten x, y des Linearen Gleichungssystems.

Durchführung einer Probe und Angabe eines Antwortsatzes.

Aufgabe B)

$$A = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 & E_2 \\ 5 & 2 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} E_1 & E_2 \\ 60 & 100 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc|cc} & & x & y \\ \hline R_1 & 5 & 2 & 5x + 2y = 60 \\ R_2 & 8 & 4 & 8x + 4y = 100 \end{array}$$

Lsg:

$$\begin{array}{l} 5x + 2y = 60 \\ 8x + 4y = 100 \\ \hline 2x = 20 \\ x = 10 \\ 5 \cdot 10 + 2y = 60 \\ 50 + 2y = 60 \\ 2y = 10 \\ y = 5 \end{array}$$

1) $a \cdot b = (5 \delta_x + 8 \delta_y) \cdot (2 \delta_x + 4 \delta_y) = 10 \delta_x^2 + 20 \delta_x \delta_y + 16 \delta_y \delta_x + 32 \delta_y^2 = 10 + 20 \delta_x \delta_y + 16 \delta_x \delta_y + 32 = 42 + 4 \delta_x \delta_y$

2) $a \wedge b = 4 \delta_x \delta_y$

3) $r \cdot b = (60 \delta_x + 100 \delta_y) \cdot (2 \delta_x + 4 \delta_y) = 120 \delta_x^2 + 240 \delta_x \delta_y + 200 \delta_y \delta_x + 400 \delta_y^2 = 120 + 240 \delta_x \delta_y + 200 \delta_x \delta_y + 400 = 520 + 40 \delta_x \delta_y$

4) $r \wedge b = 40 \delta_x \delta_y$

5) $a \wedge b \cdot x = r \wedge b \Rightarrow (4 \delta_x \delta_y) \cdot x = 40 \delta_x \delta_y \Rightarrow x = 10$

6) $a \cdot r = (5 \delta_x + 8 \delta_y) \cdot (60 \delta_x + 100 \delta_y) = 300 \delta_x^2 + 500 \delta_x \delta_y + 480 \delta_y \delta_x + 800 \delta_y^2 = 300 + 500 \delta_x \delta_y + 480 \delta_x \delta_y + 800 = 1100 + 20 \delta_x \delta_y$

7) $a \wedge r = 20 \delta_x \delta_y$

8) $a \wedge b \cdot y = a \wedge r \Rightarrow (4 \delta_x \delta_y) \cdot y = 20 \delta_x \delta_y \Rightarrow y = 5$

9) Lösung: $x = 10, y = 5$

10) Probe: $5 \cdot (10) + 2 \cdot (5) = 60$

Antwort: Im Herstellungsprozess werden für die Endprodukte E_1 und E_2 10 u. 5 Mengen von R_1 und R_2 benötigt.

Die wesentlichen Elemente dieses Ansatzes konnten vermittelt werden:

An Stelle einer zeilenweisen Interpretation des Linearen Gleichungssystems der konventionellen Linearen Algebra tritt eine spaltenweise Interpretation im Sinne einer modernen Linearen Algebra.

An Stelle von Spaltenvektoren der konventionellen Linearen Algebra treten Vektoren als Linearkombinationen von Pauli-Matrizen im Sinne der Geometrischen Algebra.

Erprobung im Modul M22 (Mathematik und Statistik) an der MSB im Sommersemester 2015:

- Zwei Kurstermine à 4 h,
- Beschränkung auf Gleichungssysteme aus zwei Linearen Gleichungen,
- Ausgabe eines Übersichtsskripts und von Übungsaufgaben mit Musterlösungen,
- Stellung einer entsprechenden Aufgabe in Klausur bzw. Nachklausur, die mit 20 % der insgesamt erreichbaren Bewertungseinheiten veranschlagt wurde,
- Überproportional gute Bearbeitung dieser Klausuraufgabe,
- Probleme bereitete nicht der mathematische Formalismus, sondern die Bedeutung der errechneten Werte.

Ausblick:

- Erneute Kursdurchführung im Modul M22 an der MSB im Wintersemester 2015/2016.

Schlussfolgerung aus Erprobung:

Bestätigung der These, dass es auf Fachhochschulniveau möglich ist, die Lineare Algebra in moderner Darstellung auf Grundlage der Geometrischen Algebra in inhaltlich sehr kompakter und didaktisch reduzierter Form zu vermitteln und mit Studierenden zu diskutieren.