Die Geometrische Algebra im Schnelldurchgang

Martin Erik Horn

MSB – Medical School Berlin, Calandrellistr. 1 - 9, 12247 Berlin &
HWR – Hochschule für Wirtschaft und Recht Berlin, Badensche Str. 52, 10825 Berlin,
Email: mail@martinerikhorn.de

Kurzfassung

Die Reform von Bologna hat in Deutschland zu einer deutlichen Ausdifferenzierung und Ausweitung der Studienangebote geführt. Mittlerweile wird eine Vielzahl von unterschiedlichsten Studiengängen angeboten, die bereits auf Bachelor-Niveau hochgradig spezialisiert sind.
Um die Erwartungen nicht nur der Studierenden, sondern auch die Erwartungen zukünftiger Arbeitgeber zu erfüllen, wird in solchen Studiengängen verstärkt und sehr zielgerichtet studiengangsspezifisch Fachwissen vermittelt. Dies führt jedoch zwangsläufig auch dazu, dass die Grundlagenausbildung aus Zeitgründen einen nicht mehr so breiten Raum einnehmen kann wie bei klassischen Studiengängen, die eine offene, polyvalente Themensetzung im Bachelor-Bereich aufweisen und erst in nachfolgenden Master-Studiengängen eine vertiefte Spezialisierung anstreben.
Deshalb wurde die Geometrische Algebra als eine physikalisch motivierte mathematische Sprache in einem fachhochschulischen Mathematikkurs vom Autor didaktisch reduziert und mit dem Ziel einer effizienten, äußerst kompakten Darstellung rekonstruiert angeboten. Die Kursdurchführung sowie deren Vor- und Nachteile werden vorgestellt und diskutiert. Da die Geometrische Algebra als mathematische Sprache über die Physik hinausweist und auch in nicht-physikalischen Fachzusammenhängen eine fundierte mathematische Herangehensweise fördert, können die Kursinhalte recht einfach auf andere Themengebiete übertragen werden.

1. Ausgangslage

Die Reform von Bologna hat in Deutschland zu einer deutlichen Ausdifferenzierung und Ausweitung der Studienangebote geführt. Mittlerweile wird eine Vielzahl von unterschiedlichsten Studiengängen angeboten, die bereits auf Bachelor-Niveau hochgradig spezialisiert sind.

Um die Erwartungen nicht nur der Studierenden, sondern auch zukünftiger Arbeitgeber zu erfüllen, wird in solchen Studiengängen verstärkt und sehr zielgerichtet studiengangsspezifisch Fachwissen vermittelt. Dies führt jedoch zwangsläufig auch dazu, dass die Grundlagenausbildung aus Zeitgründen einen nicht mehr so breiten Raum einnehmen kann wie bei klassischen Studiengängen, die eine offene, polyvalente Themensetzung im Bachelor-Bereich aufweisen und erst in nachfolgenden Master-Studiengängen eine vertiefte Spezialisierung anstreben.

Der Kurs, in dem die Geometrische Algebra sehr kompakt zur Lösung Linearer Gleichungssysteme eingesetzt und gewissermaßen im Schnelldurchgang vermittelt wurde, ist Teil eines solchen thematisch monovalent ausgerichteten Studiengangs: Anstelle eines breit und umfassend angelegten Studiums zur Betriebswirtschaftslehre können Studierende an der MSB den Bachelorstudiengang „Medical Controlling and Management“ studieren, der strikt auf das wirtschaftliche Agieren in der Gesundheitsbranche fokussiert.

In diesem Studiengang steht die Vermittlung berufsfeldbezogener Handlungskompetenzen (Module zum Operativen Medizincontrolling, zum Medizinischen Qualitäts- und Forschungsmanagement, etc.) im Vordergrund. Die Grundlagenausbildung erfolgt dagegen sehr gedrängt.

Dies macht sich insbesondere auch im Bereich der Mathematik und Statistik bemerkbar, da im Vergleich zu polyvalent ausgerichteten Studiengängen der inhaltliche Umfang mit

- Lineare Algebra/Lineare Optimierung
- Differential- und Integralrechnung
- Finanzmathematische Grundlagen
- Deskriptive Statistik
- Wahrscheinlichkeitsrechnung
- Induktive Statistik

(ausführliche Auflistung siehe [1])

ähnlich umfangreich eingeplant, jedoch nun in einem Semester zu vermitteln ist. Damit steht in diesem Studiengang mit 4 SWS im Vergleich zu polyvalent ausgerichteten Studiengängen, die im Hochschulverbund von BSP & MSB ebenfalls angeboten werden, nur in etwa halb so viel Zeit für die Vermittlung der gleichen Inhalte zur Verfügung.

2. Konsequenzen der geänderten Rahmenbedingungen

Die geänderten Rahmenbedingungen der wissenschaftlichen Grundlagenausbildung erfordern nun nicht nur ein radikales Umdenken bei der didaktischen Ausgestaltung der Kurse, sondern eröffnen auch Chancen für neue Herangehensweisen. Dies wird besonders deutlich, wenn die Dichotomie von Feynman zur Beschreibung wissenschaftlicher Herangehensweisen auf diesen Bereich übertragen wird.

Universitäre Mathematik	**Fachhochschulische Mathematik**
Griechische Tradition	Babylonische Tradition
Axiomatische Fundierung	Exemplarisches Betrachten
Erarbeitung eines mathematischen Gesamtgebäudes	Lernen an Beispielen
Mathematik als Wissenschaft	Mathematik als Handwerk
Formeln begründen und verstehen *„pure mathematics“*	Formeln anwenden *„applied mathematics“*
Mathematik „mathematisch“ verstehen	Mathematik „physikalisch“ verstehen

Abb.1: Griechisch-Babylonische Dichotomie von Feynman [2, S. 46 ff].

Diese Dichotomie schließt an die unterschiedlichen mathematischen Traditionen in Babylon und Griechenland an, deren moderne Umformung (siehe Abbildung 1) wir noch heute durch die Zweispaltung akademischer Bildung in Form universitär grundlegender bzw. fachhochschulisch anwendungsbezogener Schwerpunktsetzungen – bewusst oder unbewusst – weiterführen.

Für den Bereich der Physik zieht Feynman eine entschiedene Schlussfolgerung: „In physics we need the Babylonian method, and not the Euclidean or Greek method“ [2, S. 47]. Er begründet dies unter anderem auch didaktisch: „Heute besitzen wir nicht die Fähigkeit, einem Studenten zu zeigen, wie er Physik *physikalisch* verstehen kann! (…) Der einzige Weg, Physik physikalisch zu verstehen, (ist) auch heute noch der langweilige, babylonische Weg, viele Beispiele zu machen, bis man es verstanden hat“ [3, S. 70].

In der Physik sind wir – sofern wir dieser Argumentation folgen – in unserer didaktischen Herangehensweise somit unabänderlich festgelegt: Es geht nicht anders, wir müssen aus inhaltlich zwingenden Gründen dem babylonischen Weg folgen.

Für die Mathematik jedoch, und dies macht eine Öffnung physikdidaktisch geprägter Ansätze für die Mathematikdidaktik interessant, gibt es eine solche inhaltlich zwingende Festlegung nicht, denn es gibt offenkundig zwei verschiedene Arten, Mathematik zu betreiben. „There are then two mathematics,” schreibt Hardy in [4, S. 139].

Es existieren zwei mathematische Welten – eine echte mathematische Welt, die der griechischen Tradition folgt, und eine dem entgegengesetzte mathematische Welt, die der babylonischen und damit der physikalischen Tradition folgt. Diese in den Worten von Hardy ‚triviale‘ Mathematik („for want of a better word“ [4, S. 139]) ergänzt die Dichotomie von Feynman noch um den Aspekt der Nützlichkeit: „The trivial mathematics is, on the whole, useful, and ... the real mathematics, on the whole, is not“ [4, S. 139].

Insbesondere diese Zielstellung der Nützlichkeit und des strikten Anwendungsbezugs führt dazu, dass die Mathematikausbildung in den streng auf ein äußerst eng umrissenes Berufsbild ausgerichteten Studiengängen, der an Beispielen ausgerichteten, also traditionell physikalischen Art der Wissensvermittlung folgen wird.

Anstelle einer Mathematik, die als Wissenschaft konzipiert ist, tritt eine Mathematik, die als Handwerk gelehrt, gelernt und nutzbringend eingesetzt wird.

3. Ziel dieses Beitrags

Die Geometrische Algebra ist eine mathematische Sprache, die aus mehreren Gründen geeignet ist, die Mathematik (bzw. die nach Bologna übrig gebliebene kondensierte Mathematik) „physikalisch“ zu lehren und zu verstehen.

Zum einen handelt es sich bei der Geometrischen Algebra um einen mathematischen Ansatz, der auf der Grundlage nicht-kommutativer Ideen von Graßmann, Hamilton, Clifford, Cartan und anderer durch David Hestenes physikdidaktisch motiviert und vor allem unter Bezug auf physikalische Fragestellungen weiterentwickelt und didaktisch aufbearbeitet wurde.

Im Zentrum steht somit immer auch der Gedanke einer Reform der mathematischen Sprache der Physik [5]. Somit könnte die Geometrische Algebra von ihren Wurzeln her als typisch physikalisches Konstrukt, das ein babylonisch-physikalisches Lehren und Lernen gestattet, betrachtet werden.

Zwar hat sich die Geometrische Algebra mittlerweile von diesen Wurzeln emanzipiert und findet auch in zahlreichen Gebieten und Fragestellungen außerhalb der Physik eine immer größere Verbreitung.

Doch dieses Überschreiten der physikalischen Fachgrenzen erfolgt meist nicht in mathematisch-axiomatischer, also griechischer Form, sondern in den allermeisten Fällen beispielhaft anwendungsbezogen und somit in physikalisch-babylonischer Tradition.

So ist die Nutzung der Geometrischen Algebra zur Modellierung einer modernen Linearen Algebra ein typisch fachübergreifender Ansatz, da die Annäherung komplexer Zusammenhänge durch Lineare Gleichungen ein Wesenskern der Mathematisierung zahlreicher, auch physikfremder Sachgebiete darstellt.

Ziel dieses Beitrags ist deshalb genau dies: Es soll eine effiziente und äußerst kompakte Darstellung der Linearen Algebra auf einer modernen Basis unter Einbezug nicht-kommutativer Konzepte vorgestellt und diskutiert werden.

Die diesem Ansatz zugrunde liegende These lautet dann, dass eine solche moderne Darstellung der Linearen Algebra auf Fachhochschulniveau nicht nur mit leistungsstärkeren Studierenden (was bereits in [7] gezeigt wurde), sondern auch mit leistungsschwächeren Studierenden erfolgreich erarbeitet und diskutiert werden kann.

4. Übersicht über die Materialentwicklung

Da in aktuell gebräuchlichen Lehrbüchern derzeit kein Bezug auf eine Lineare Algebra, die die Kernpunkte der Geometrischen Algebra aufgreift, genommen wird, ist zur Umsetzung eines solchen Ansatzes in einem ersten Schritt die Entwicklung entsprechender Materialien notwendig.

Für leistungsstärkere Studierende liegen solche Materialien bereits auf englisch vor [7], [8], [9], [10] bzw. befinden sich in Vorbereitung zur Publikation [11], [12]. Die in diesem Zusammenhang wesentlichste Fragestellung betrifft den Umfang der didaktischen Reduktion und das Problem, welche notwendigen Inhalte zu übernehmen bzw. welche nicht zwingend notwendigen Inhalte im Sinne einer kompakten und anwendungsorientierten Vermittlung gestrichen werden können.

Des Weiteren sind entsprechende Übungsmaterialien bisher ebenfalls nicht in deutscher Sprache erhältlich. Deshalb wurden mehrere Arbeitsblätter mit Übungsaufgaben und Musterlösungen entworfen, die diesem Beitrag in [15] beigefügt werden.

5. Didaktische Reduktion der modernen Linearen Algebra

Letztendlich wurde im Unterricht eine radikal einfache Umsetzung gewählt: Alle bisher den Studierenden bekannten Rechenregeln werden unhinterfragt übernommen und naiv auf nicht-kommutative Situationen übertragen bzw. im Einzelfall adäquat angepasst. Lediglich eine einzige neue Regel wird eingeführt: Bei Multiplikation zweier unterschiedlicher, benachbarter Basisvektoren muss ein zusätzliches Minuszeichen berücksichtigt werden, wenn die Multiplikationsreihenfolge vertauscht wird.

$$\sigma_i \, \sigma_j = -\, \sigma_j \, \sigma_i \qquad \text{für } i \neq j \tag{1}$$

Zusammen mit der bereits bekannten Tatsache, dass räumliche Basisvektoren zu Eins quadrieren

$$\sigma_i^2 = 1 \tag{2}$$

ergibt sich eine mathematisch vollständige Beschreibung einer verallgemeinerten Pauli-Algebra für n beliebig viele Dimensionen. Dies stellt in der Tat „the simplest way of fully characterizing the object as a working definition“ [6, S. 823] dar, „(…) clearly enough general and simple. The only rules to remember is that different orthogonal generating units (vectors) anticommute and that their square is +1, (…)” [6, S. 823].

Deshalb wurden die einführenden Folien des englischsprachigen Kurses [8, S. 2-6], die diese einfache Definition begründen und erläutern, in deutscher Übersetzung inhaltlich nahezu unverändert in die Folien des MSB-Kurses [14, S. 2-6] übernommen. Die graphische Veranschaulichung der grundlegenden Anti-Kommutativität ist in Abbildung 2 [14, S. 6] gezeigt.

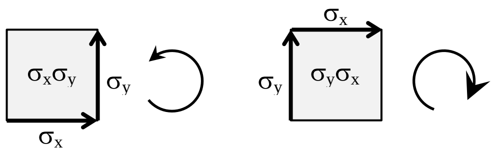

Abb.2: Geometrische Begründung des Vertauschungsverhaltens $\sigma_x\sigma_y = -\,\sigma_y\sigma_x$ der beiden Basisvektoren σ_x und σ_y.

Zur Lösung Linearer Gleichungssysteme wird nun nur noch die Anwendung dieses Vertauschungsverhaltens bei Multiplikation mehrerer Vektoren benötigt.

Um den rechnerischen Aufwand gering zu halten, beschränkt sich die Diskussion im vorgestellten Kursverlauf im Wesentlichen auf konsistente Lineare Gleichungssysteme mit zwei Unbekannten und demzufolge zwei Linearen Gleichungen [14, S. 10]

$$\mathbf{a}\, x + \mathbf{b}\, y = \mathbf{r} \tag{3}$$

mit den Koeffizientenvektoren

$$\mathbf{a} = a_x \, \sigma_x + a_y \, \sigma_y \qquad \mathbf{b} = b_x \, \sigma_x + b_y \, \sigma_y \tag{4}$$

und dem Ergebnisvektor

$$\mathbf{r} = r_x \, \sigma_x + r_y \, \sigma_y \tag{5}$$

An die Stelle einer zeilenweisen Interpretation Linearer Gleichungssysteme der konventionellen Linearen Algebra tritt dabei eine spaltenweise Interpretation im Sinne einer modernen Linearen Algebra.

Und an die Stelle von Spaltenvektoren der konventionellen Linearen Algebra treten Pauli-Vektoren als Linearkombinationen von Pauli-Matrizen im Sinne der Geometrischen Algebra [7].

Da nur zwei Unbekannte x, y betrachtet werden, ist mathematisch nur die Multiplikation von lediglich zwei Vektoren notwendig, die beispielhaft anhand der Determinantenberechnung in [14, S. 12-13]

$$\mathbf{a}\,\mathbf{b} = (a_x \, \sigma_x + a_y \, \sigma_y)\,(b_x \, \sigma_x + b_y \, \sigma_y) \tag{6}$$

$$\det\,[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})\, \sigma_y\sigma_x \tag{7}$$

eingeführt und diskutiert wird.

Eine entscheidende Rolle bei der didaktischen Umgestaltung und Vereinfachung spielt in diesem Zusammenhang die fachsprachliche Reduktion.

Zwar werden in den Folien, die von den Studierenden über die hochschuleigene Lernplattform heruntergeladen und auch als Skript verwendet werden können, Begrifflichkeiten wie inneres und äußeres Produkt geklärt. Im hochschulischen Unterricht wurde auf diese Fachausdrücke jedoch verzichtet. Stattdessen wird lediglich von Skalarteil und flächenartigem Teil (Flächenteil) gesprochen, so dass inneres und äußeres Produkt durch Bezug auf ihren Sinngehalt geometrisch greifbar und allgemeinverständlich benannt werden.

Aus den Produkten **a b**, **a r**, **r b** kann das äußere Produkt als flächenartiger Teil in einfacher Weise durch simples Weglassen des Skalarteils

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \langle \mathbf{a}\,\mathbf{b} \rangle_2 \qquad \{8\}$$

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{r} = \langle \mathbf{a}\,\mathbf{r} \rangle_2 \qquad \{9\}$$

$$\mathbf{r} \wedge \mathbf{b} = \langle \mathbf{r}\,\mathbf{b} \rangle_2 \qquad \{10\}$$

ermittelt werden. Ein Rückgriff auf die Definitionsgleichung

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \tfrac{1}{2}\left(\mathbf{a}\,\mathbf{b} - \mathbf{b}\,\mathbf{a}\right) \qquad \{11\}$$

ist nicht notwendig, kann jedoch bei Bedarf mit leistungsstärkeren Studierenden thematisiert werden.

Der Begriff der Determinante wurde vollständig gestrichen. Stattdessen wird die Determinante im zweidimensionalen Fall ganz im Sinne von Gl. {7} als orientierte Fläche des von **a** und **b** aufgespannten Parallelogramms der Gleichungen {6}&{8} eingeführt.

In dieser Sprachregelung führen die Studierenden somit keinen unanschaulichen Determinantenvergleich, sondern einen graphisch fassbaren Flächenvergleich durch, um die Unbekannten x, y zu ermitteln:

$$x\,(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = \mathbf{r} \wedge \mathbf{b} \qquad \{12\}$$

$$y\,(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = \mathbf{a} \wedge \mathbf{r} \qquad \{13\}$$

Die Cramersche Regel erfährt so eine geometrisch-anschauliche Interpretation, die das sonst übliche, aus Studierendensicht oft unmotivierte Hantieren mit vom Dozenten ohne nachvollziehbare Begründung eingeführten Zahlen (Determinanten) durch eine visuell zugängliche Darstellung ersetzt oder zumindest ergänzt.

Um die mathematische Verständlichkeit zu gewährleisten wird auf eine Äquivalenzumformung der Gleichungen {12} und {13} verzichtet, so dass die Thematik einer Division durch orientierte Flächen

$$x = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{r} \wedge \mathbf{b}) \qquad \{14\}$$

$$y = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{a} \wedge \mathbf{r}) \qquad \{15\}$$

nicht angesprochen werden muss. Die Unbekannten x, y können mit Hilfe der Gleichungen {12} und {13} direkt durch Koeffizientenvergleich [14, S. 16] bestimmt werden.

Eine Probe [14, S. 16-17] schließt die Rechnung durch Bestätigung der aufgefunden Werte von x, y sodann ab.

6. Berechnung Inverser Matrizen

Anschließend an die in Abschnitt 5 vorgestellte didaktische Reduktion der Lösung eines Linearen Gleichungssystems aus zwei linearen Gleichungen, kann das Lösungsverfahren unter Nutzung inverser Matrizen eingeführt werden. Dabei wird die Definitionsgleichung für die Inversen von (2 x 2)-Matrizen

$$\mathbf{A}\,\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E} \qquad (\mathbf{E} \ldots \text{Einheitsmatrix}) \qquad \{16\}$$

in zwei gesonderte Lineare Gleichungssysteme

$$\mathbf{a}\,x_1 + \mathbf{b}\,y_1 = \sigma_x \qquad \{17\}$$

$$\mathbf{a}\,x_2 + \mathbf{b}\,y_2 = \sigma_y \qquad \{18\}$$

umgeschrieben [14, S. 20 ff]. Analog zu den Gleichungen {12}, {13} ergeben sich die Elemente der inversen Matrix

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} \qquad \{19\}$$

durch Koeffizientenvergleich der äußeren Produkte der Koeffizientenvektoren **a**, **b** und der Basisvektoren σ_x, σ_y:

$$x_1\,(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = \sigma_x \wedge \mathbf{b} \qquad x_2\,(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = \sigma_y \wedge \mathbf{b} \qquad \{20\}$$

$$y_1\,(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = \mathbf{a} \wedge \sigma_x \qquad y_2\,(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = \mathbf{a} \wedge \sigma_y \qquad \{21\}$$

Wird die in Abschnitt 5 diskutierte Systematik des Lösungswegs von den Studierenden verstanden, stellt der Übergang zur Ermittlung inverser Matrizen keine große kognitive Umstellung bezüglich der Geometrischen Algebra dar, da die Rechenschritte bei der jeweiligen Flächenbestimmung analog verlaufen.

Zwar müssen nun vier Flächenvergleiche (siehe Gl. {20}, {21}) anstelle von lediglich zwei Flächenvergleichen (Gl. {12}, {13}) vorgenommen werden. Die Rechnungen sind jedoch insgesamt einfacher, da die Multiplikationen **a r** bzw. **r b** auf jeweils vier Terme führt, während die Multiplikationen der Koeffizientenvektoren mit den Basisvektoren immer nur zwei Terme umfasst.

7. Gaußscher Algorithmus

Eine deutliche kognitive Umstellung stellt jedoch der Schritt von den oben aufgeführten Lösungsverfahren zum Gaußschen Algorithmus dar. Im physikalisch geprägten Kontext der Geometrischen Algebra kann der Gaußsche Algorithmus als Koordinatentransformation [11] verstanden werden. Dabei wird Gleichung {3}

$$(a_x\,\sigma_x + a_y\,\sigma_y)\,x + (b_x\,\sigma_x + b_y\,\sigma_y)\,y = r_x\,\sigma_x + r_y\,\sigma_y \qquad \{22\}$$

durch eine erste Transformation der x-Achse mit Hilfe der Substitution

$$e_x = \mathbf{a} = a_x\,\sigma_x + a_y\,\sigma_y \;\Rightarrow\; \sigma_x = \frac{e_x - a_y\,\sigma_y}{a_x} \qquad \{23\}$$

in die Gleichung

$$e_x\, x + \left(\frac{b_x}{a_x} e_x + \left(b_y - \frac{b_x a_y}{a_x}\right)\sigma_y\right) y$$
$$= \frac{r_x}{a_x} e_x + \left(r_y - \frac{r_x a_y}{a_x}\right)\sigma_y \quad \{24\}$$

überführt. Die nachfolgende Transformation der y-Achse

$$e_y = \mathbf{b} = \frac{b_x}{a_x} e_x + \left(b_y - \frac{b_x a_y}{a_x}\right)\sigma_y$$
$$\Rightarrow\ \sigma_y = -\frac{b_x}{a_x b_y - a_y b_x} e_x + \frac{a_x}{a_x b_y - a_y b_x} e_y \quad \{25\}$$

ergibt die endgültige Gauß-Gleichung in Pauli-Form

$$e_x\, x + e_y\, y$$
$$= \frac{r_x b_y - r_y b_x}{a_x b_y - a_y b_x} e_x + \frac{a_x r_y - a_y r_x}{a_x b_y - a_y b_x} e_y \quad \{26\}$$

Die Koeffizienten der Ausgangsgleichung {22}, des Zwischenschritts {24} und der endgültigen Gauß-Gleichung {26} sind jeweils Elemente der erweiterten Koeffizientenmatrizen von Gauß (Abb. 3).

x	y	r
a_x	b_x	r_x
a_y	b_y	r_y
1	$\frac{b_x}{a_x}$	$\frac{r_x}{a_x}$
0	$b_y - \frac{b_x a_y}{a_x}$	$r_y - \frac{r_x a_y}{a_x}$
1	0	$\frac{r_x b_y - r_y b_x}{a_x b_y - a_y b_x}$
0	1	$\frac{a_x r_y - a_y r_x}{a_x b_y - a_y b_x}$

Abb.3: Erweiterte Koeffizientenmatrizen für ein Lineares Gleichungssystem aus zwei linearen Gleichungen.

Während die allgemeine algebraische Darstellung für leistungsschwächere Studierende nicht leicht nachvollziehbar ist, stellt die graphische Veranschaulichung [14, S. 28, 29, 31] eine gute didaktische Brücke dar. Diese Brücke lässt sich insbesondere dann erfolgreich nutzen, wenn das Lösungsverfahren nicht allgemein wie in Abb. 3, sondern anhand von Beispielaufgaben durchschritten wird.

Dennoch ist der Gauß-Algorithmus für Studierende kognitiv bei weitem nicht so attraktiv wie die vorangegangenen Verfahren. In der Klausur, in der die freie Wahl der Lösungsstrategie zugelassen wurde, entschieden sich alle Studierenden dafür, die entsprechende Aufgabe zur Linearen Algebra mit Hilfe der in Abschnitt 5 beschriebenen Vorgehensweise zu lösen.

8. Durchführung der Kurseinheit

Im Kurs „Mathematik und Statistik“ (Modul M 22) des Bachelorstudiengangs „Medical Controlling and Management“ der MSB [1] ist ein Workload von insgesamt 150 Stunden vorgesehen.

Dieser verteilt sich auf 72 Vorlesungsstunden (Kontaktstudium in Form von Präsenzunterricht) und 78 Stunden Selbststudium, was zu einer anrechenbaren ECTS-Punktezahl von 5 Credit Points führt.

Die hochschulische Organisation lehnt sich dabei sehr an schulische Unterrichtsformen an. Die Studierenden sind einem Klassenverband zugeordnet und studieren nach einem vorgegebenen Stundenplan. Die Anwesenheit ist in allen Kursen verpflichtend und wird auf nachdrücklichen Wunsch der Hochschulleitung auch durchgängig und strikt überprüft.

Dem gegenüber steht eine großzügige Anrechenbarkeit von andersweitig erbrachten Leistungen. So waren im Sommersemester 2015 etwa die Hälfte der Studierenden vom Besuch des Moduls M 22 befreit, da sie als Quereinsteiger zuvor in der BWL besuchte Mathematikveranstaltungen anrechnen konnten.

Für die Durchführung der Kurseinheit zur Geometrischen Algebra, die sich an eine Einführung in die Matrizenrechnung anschloss, standen zwei Kurstermine zu je 4 x 45 Min. zur Verfügung.

Im ersten Kurstermin (siehe Arbeitsblatt 15 in [15]) wurden die in den Abschnitten 5 und 6 diskutieren Lösungsverfahren zur Lösung Linearer Gleichungssysteme mit zwei Unbekannten erarbeitet und eingeübt. Dabei wechselten sich vorlesungsartige Phasen in Zentralunterricht und Einzel- bzw. Gruppenübungsphasen ab.

Im zweiten Kurstermin wurde der in Abschnitt 7 vorgestellte Gaußsche Algorithmus in der Interpretation von Koordinatentransformationen erörtert und eingeübt.

Zwar wurde für leistungsstärkere und mathematisch interessiertere Studierende auch eine Aufgabe zur Lösung eines LGS mit drei Unbekannten (siehe Aufg. 8 in [15]) aufgenommen. Die Bearbeitung dieser Aufgabe war jedoch freiwillig und wurde ausdrücklich als nicht klausurrelevant benannt.

Zur Unterstützung der Einzel- und Gruppenübungsphasen werden Übungsaufgaben [15] bereitgestellt. Zum Teil können diese während der Kursveranstaltung gelöst werden. Die aus Zeitgründen während des Präsenzunterrichts nicht gelösten Aufgaben dienen jeweils als Hausaufgaben.

Zu Beginn des nachfolgenden Kurstermins können einzelne Aufgaben, die die Studierenden zuhause bearbeitet haben, vorgestellt und eingehender diskutiert werden, falls in dieser häuslichen Vertiefungsübung Studierende Probleme mit dem Lösungsweg gehabt haben.

Abbildung 4 zeigt das Tafelbild eines solchen Aufgabenvergleichs. Vorgestellt ist die erfolgreiche und

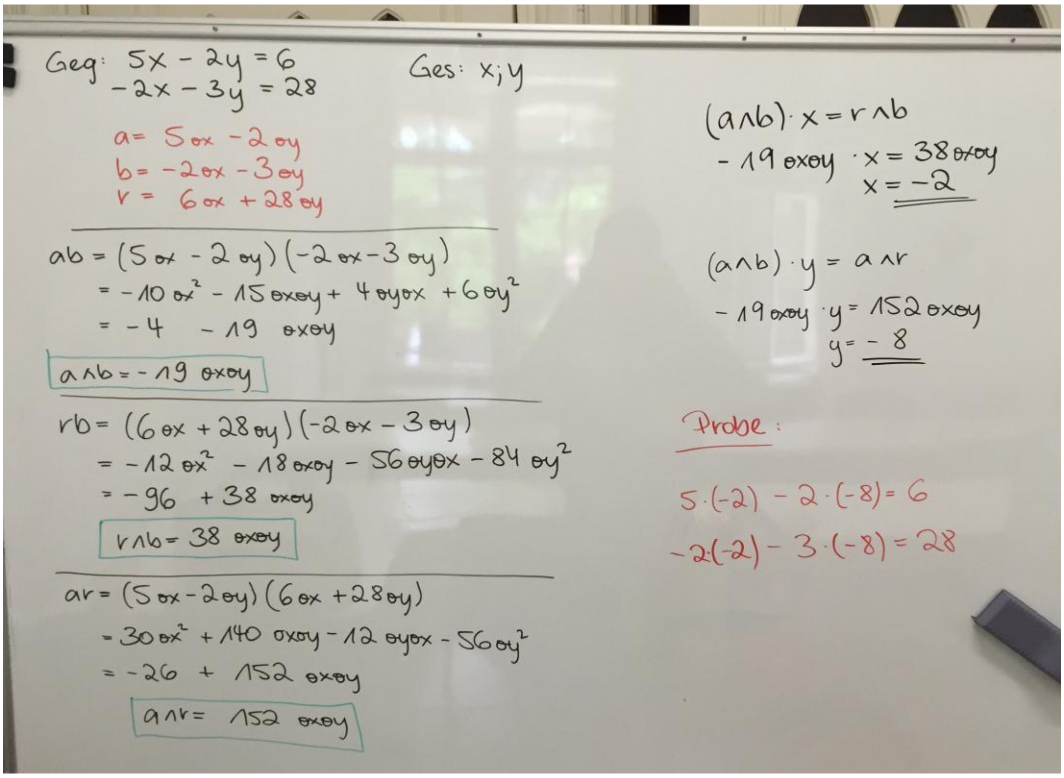

Abb.4: Tafelbild zur Lösung der Übungsaufgabe 1 d) des Übungsblattes 15 vom 15. Juni 2015.

mathematisch korrekte Bearbeitung von Aufgabe 1 d) des Übungsblattes 15 (siehe [15]).

Die Lösung der gleichen Aufgabe durch Koordinatentransformationen, die die vormals orthogonalen Achsen das Koordinatensystem in zwei schräg zueinander stehende neue Achsen in Richtung der Vektoren

$$e_x = \mathbf{a} = 5\,\sigma_x - 2\,\sigma_y \qquad \{27\}$$

$$e_y = \mathbf{b} = -2\,\sigma_x - 3\,\sigma_y \qquad \{28\}$$

überführen, ist in Abbildung 5 dargestellt. Die entsprechende Rechnung ist als Musterlösung in [15, S. 21-22] zu finden.

Eine statistisch abgesicherte Evaluation wurde nicht durchgeführt. Jedoch wurde eine entsprechende Aufgabe in der Klausur gestellt, in der ein Lineares Gleichungssystem gelöst werden sollte. Diese Aufgabe wurde im Vergleich zu den anderen Klausuraufgaben von den Studierenden überdurchschnittlich gut gelöst.

Dies deutet darauf hin, dass die Studierenden die Inhalte der Kurseinheit zur Geometrischen Algebra zumindest in dem in der Klausur geforderten Rahmen verstanden und kognitiv erfolgreich verarbeitet haben: Sie sind also in der Lage, die wesentlichen Inhalte der Geometrischen Algebra eigenständig zu reproduzieren und auf modifizierte Fragestellungen anzuwenden.

Auch die sonstigen Rückmeldungen der Studierenden zu dieser Kurseinheit waren durchgängig positiv

Die zur Geometrischen Algebra vermittelten Inhalte wurden als verständlich, nachvollziehbar und mathematisch nicht zu schwierig beschrieben. Insbesondere der Vergleich des von den Studierenden genannten (subjektiven) Schwierigkeitsgrads zeigt, dass die Rezeption der Geometrischen Algebra in diesem Kurs ohne größere Probleme erfolgte.

Als schwierig, sehr abstrakt und weniger gut zugänglich wurden von den Studierenden im Rückblick gegen Kursende dagegen vor allem Inhalte zur Finanzmathematik und zur Statistik bezeichnet.

Weitere Schlussfolgerungen lassen sich aus der Art, wie die Klausuraufgabe gelöst wurde, ziehen. Dabei fallen vier Punkte ins Auge:

- Das schulische Wissen zur Lösung Linearer Gleichungssysteme scheint komplett verschüttet. Obwohl die Studierenden in der Klausur in der Wahl der Lösungsstrategie vollkommen frei waren, entschied sich kein Prüfling für die in der Schule üblicherweise behandelten Lösungsmethoden.
- Alle Klausurteilnehmerinnen und -teilnehmer entschieden sich dafür, das gegebene Lineare Gleichungssystem mit Hilfe der in Abschnitt 5 beschriebenen Berechnung äußerer Produkte zu lösen. Ein direkter Flächenvergleich erscheint somit für Studierende attraktiver als ein indirekter Vergleich mit Hilfe inverser Matrizen oder ein Längenvergleich auf Grundlage des Gaußschen Algorithmus.

$$(5\,\sigma_x - 2\,\sigma_y)\,x + (-2\,\sigma_x - 3\,\sigma_y)\,y = 6\,\sigma_x + 28\,\sigma_y \quad \rightarrow \quad e_x\,x + e_y\,y = -2\,e_x - 8\,e_y$$

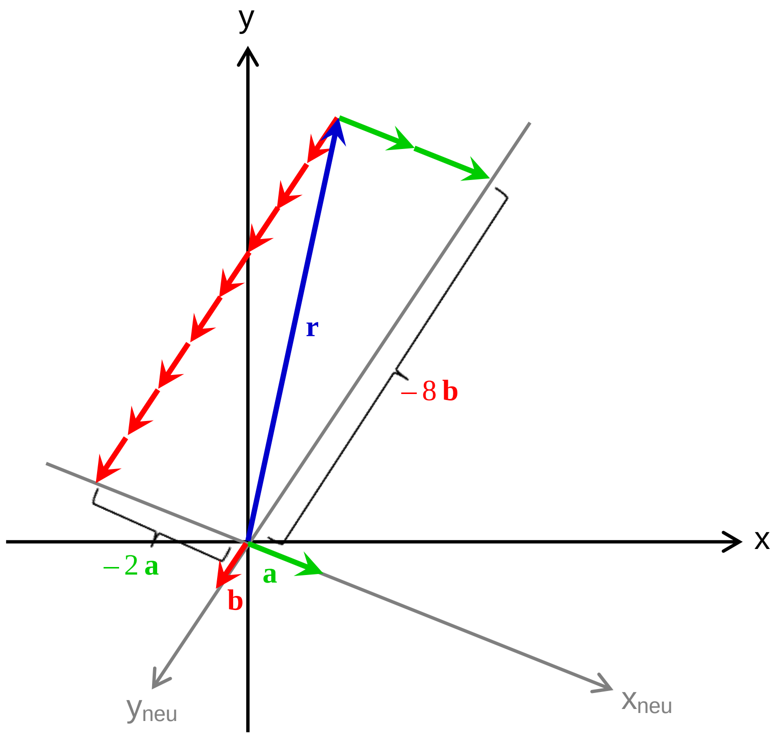

Abb.5: Graphische Veranschaulichung der Koordinatentransformation, die der Lösung von Übungsaufgabe 1 d) mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus zugrunde liegt.

- Der mathematische Formalismus wurde bis auf einen von allen Prüflingen korrekt und sachrichtig durchschritten. Die Mathematik der Geometrischen Algebra wurde erfolgreich angewandt.
- Probleme gab es jedoch mit der inhaltlichen Interpretation der mathematisch korrekt ermittelten Ergebnisse. Die Geometrische Algebra führt somit zwar zu einer erfolgreichen Mathematisierung, vermindert aber nicht zwangsläufig logische Verständnisprobleme, wenn es um die Interpretation der Aufgabenstellung (die naturgemäß vor einer Mathematisierung steht) geht.

Eine ausführliche Darstellung der Klausuraufgabe mit der konkreten Ausgestaltung des Aufgabentextes und einer studentischen Musterlösung findet sich ergänzend im beigefügten Text [16].

9. Schlussfolgerungen und Ausblick

Die gelungene Kursdurchführung zeigt, dass eine moderne Darstellung der Linearen Algebra auf Grundlage der Geometrischen Algebra nicht nur mit leistungsstärkeren Studierenden, sondern auch mit leistungsschwächeren Studierenden erfolgreich auf Fachhochschulniveau erarbeitet und diskutiert werden kann.

Die hier vorgestellte Kurseinheit bietet eine effiziente und äußerst kompakte Einführung in die Mathematik Linearer Gleichungssysteme auf Grundlage der Geometrischen Algebra. Diese Einführung kann dabei nicht nur genutzt werden, um mit mathematisch zurückhaltenden Studierenden anwendungsorientiert wirtschaftswissenschaftliche Problemstellungen sachangemessen zu diskutieren und zu lösen.

Da die Lineare Algebra wesentlicher mathematischer Strukturkern zahlreicher weiterer Wissenschaftsdisziplinen ist, in denen ebenfalls komplexe Sachverhalte durch lineare Gleichungen modelliert oder angenähert werden, können das hier vorgestellte Konzept und die hier vorgestellten Kursinhalte recht einfach auf andere Themengebiete übertragen werden.

Darüber hinaus können auch leistungsstärkere Studierende von diesem Konzept profitieren, wenn aus Zeitgründen nur knapp in die Geometrische Algebra eingeführt werden kann. Eine solche Anwendung findet sich beispielsweise in [11], [12], wobei die kompakte Einführung in die Mathematik Linearer Gleichungssysteme auf Grundalge der Geometrischen Algebra (in Analogie zu den hier vorgestellten Abschnitten 5 und 6) dazu genutzt wurde, um die Grundlagen für eine breitere und tiefer gehende Diskussion Linearer Gleichungssysteme als Koordinatentransformationen (in Analogie zu Abschnitt 7) zu schaffen.

Und nicht zuletzt sollte ein weiterer Gesichtspunkt nicht vernachlässigt werden: Die Studierenden der

MSB, mit denen das hier vorgestellte Konzept auf Fachhochschulniveau erprobt wurde, sind bezüglich ihres mathematischen Wissenstandes und bezüglich der von ihnen gezeigten mathematischen Problemlösekompetenzen in etwa mit Schülerinnen und Schülern der Mathematik-Grundkurse in der Sekundarstufe II vergleichbar.

Es ist deshalb davon auszugehen, dass die Geometrische Algebra im Allgemeinen und die Lösung Linearer Gleichungssysteme auf Grundlage der Geometrischen Algebra im Speziellen auch im schulischen Bereich erfolgreich eingesetzt und auch mathematikferneren Schülerinnen und Schülern erfolgreich vermittelt werden kann.

Und angesichts der immer weiter ausufernden Vorgaben durch Kerncurricula, zentrale Prüfungen und anderer Leistungsvergleiche sollten wir nicht vergessen, was dies bedeutet: „A geometric algebra based curriculum in high school (and before) will provide also the most effective way to improve that dramatic situation that has been acutely depicted by P. Dowling and R. Noss with the sentence: "The mathematical content of the National Curriculum (in Mathematics): The Empty Set“[6, S. 821].

Das hier vorgestellte Konzept bietet somit auch die Chance, sich intensiver über Inhalte und deren didaktischer Bedeutung auseinanderzusetzen.

10. Literatur

[1] Studiengangsleitung MC (2015): Modulhandbuch des Bachelorstudiengangs Medical Controlling and Management (MC, Vollzeitmodell), MSB Medical School Berlin – Hochschule für Gesundheit und Medizin, Fakultät Gesundheit (Stand: 4. Juni 2015), unveröffentlicht, nur zum internen Gebrauch freigegeben.

[2] Feynman, Richard Phillips (1967): The Character of Physical Law. First MIT Press Paperback Edition, Cambridge, Massachusetts: MIT Press.

[3] Feynman, Richard Phillips (2006): Physik. »The Lost Lectures«. München: Pearson Studium.

[4] Hardy, Godfrey Harold (1967): A Mathematician's Apology. Cambridge: Cambridge University Press.

[5] Hestenes, David Orlin (2003): Oersted Medal Lecture 2002: Reforming the Mathematical Language of Physics. In: American Journal of Physics, Vol. 71, No. 2, S. 104–121.

[6] Parra Serra, Josep Manel (2009): Clifford Algebra and the Didactics of Mathematics. In: Advances in Applied Clifford Algebras, Vol. 19, No. 3/4, S. 819–834.

[7] Horn, Martin Erik (2015): Lineare Algebra in physikdidaktischer Ausprägung. In: PhyDid B, Didaktik der Physik, Beiträge zur DPG-Frühjahrstagung des Fachverbands Didaktik der Physik in Wuppertal, Url [17.12.2015]: http://www.phydid.de/index.php/phydid-b/article/view/626.

[8] Horn, Martin Erik (2014): Modern Linear Algebra. A Geometric Algebra Crash Course. Part I: Basics & Introduction. OHP-Folien des Kurses „Mathematics for Business and Economics“ (Stand: 31. Dez. 2014), LV-Nr. 200 691.01, Hochschule für Wirtschaft und Recht Berlin / Berlin School of Economics and Law, Wintersemester 2014/2015. Veröffentlicht als Anhang des Beitrags [7], Url: http://www.phydid.de/index.php/phydid-b/article/view/626/794.

[9] Horn, Martin Erik (2014): Modern Linear Algebra. A Geometric Algebra Crash Course. Part II: Solving Systems of Linear Equations. OHP-Folien des Kurses „Mathematics for Business and Economics“ (Stand: 31. Dez. 2014), LV-Nr. 200 691.01, Hochschule für Wirtschaft und Recht Berlin / Berlin School of Economics and Law, Wintersemester 2014/2015. Veröffentlicht als Anhang des Beitrags [7], Url: http://www.phydid.de/index.php/phydid-b/article/view/626/795.

[10] Horn, Martin Erik (2015): Modern Linear Algebra. A Geometric Algebra Crash Course. Part III: The Direct Product & Solving Higher-Dimensional Systems of Linear Equations. OHP-Folien des Kurses „Mathematics for Business and Economics“ (Stand: 28. Jan. 2015), LV-Nr. 200 691.01, Hochschule für Wirtschaft und Recht Berlin / Berlin School of Economics and Law, Wintersemester 2014/2015. Veröffentlicht als Anhang des Beitrags [7], Url: http://www.phydid.de/index.php/phydid-b/article/view/626/796.

[11] Horn, Martin Erik (2016): Physikdidaktische Interpretation des Gaußschen Algorithmus. Zur Veröffentlichung eingereicht bei: PhyDid B, Didaktik der Physik, Beiträge zur DPG-Frühjahrstagung des Fachverbands Didaktik der Physik in Hannover.

[12] Horn, Martin Erik (2016): Modern Linear Algebra. A Geometric Algebra Crash Course. Part IV: Transformation of Coordinates & Gaussian Method of Solving a System of Linear Equations. OHP-Folien des Kurses „Mathematics for Business and Economics“ (Stand: 28. Jan. 2016), LV-Nr. 200 691.01, Hochschule für Wirtschaft und Recht Berlin / Berlin School of Economics and Law, Wintersemester 2015/ 2016. Zur Veröffentlichung eingereicht als Anhang des Beitrags [11].

Dem Beitrag beigefügte Dateien

[13] Horn, Martin Erik (2016): Poster DD 05.19 ‚Die Geometrische Algebra im Schnelldurchgang‘ vom 29. Feb. 2016, Url: http://www.dpg-verhandlungen.de/year/2016/conference/hannover/part/dd/session/5/contribution/19.

[14] Horn, Martin Erik (2015): Moderne Lineare Algebra – Ein Überblick. OHP-Folien des Kurses

„Mathematik und Statistik“ (Stand: 28. Juni 2015), Modul M 22 des Bachelor-Studiengangs Medical Controlling and Management der Fakultät Gesundheit, Medical School Berlin, Sommersemester 2015.

[15] Horn, Martin Erik (2015): Moderne Lineare Algebra – Übungsblätter 15 & 16 des Kurses „Mathematik und Statistik“ (Stand: 4. Juli 2015), Modul M 22 des Bachelor-Studiengangs Medical Controlling and Management der Fakultät Gesundheit, Medical School Berlin, Sommersemester 2015.

[16] Martin Erik Horn (2016): More Examples of Non-Square Matrix Inverses. Erweiterte und ins Englische übersetze Fassung des Beitrags „Inverse von Rechteck-Matrizen“ zur Jahrestagung 2016 der GDM in Heidelberg.