Sommersemester 2015

Dr. Horn

Moderne Lineare Algebra

Übungsblätter 15 & 16

des Moduls
M 22: Mathematik und Statistik
des Bachelor-Studiengangs
Medical Controlling and Management
der Fakultät Gesundheit
an der Medical School Berlin (MSB)

Stand: 4. Juli 2015

Mathematik und Statistik (Modul M 22)

Übungsblatt 15 – Aufgabenstellungen

Aufgabe 1:

Lösen Sie die folgenden Linearen Gleichungssysteme und überprüfen Sie Ihre Lösungen mit einer Probe.

a) $\begin{aligned} 3x + 8y &= 28 \\ 6x + 2y &= 28 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} 4x + 9y &= 29 \\ 5x + 6y &= 31 \end{aligned}$ c) $\begin{aligned} 6x + 4y &= 6 \\ 2x + y &= 3 \end{aligned}$ d) $\begin{aligned} 5x - 2y &= 6 \\ -2x - 3y &= 28 \end{aligned}$

Aufgabe 2:

Zur Herstellung einer einzigen Mengeneinheit (ME) des Endproduktes E_1 werden 3 ME des Rohstoffes R_1 und 6 ME des Rohstoffes R_2 benötigt.
Zur Herstellung einer einzigen Mengeneinheit des Endproduktes E_2 werden 8 ME des Rohstoffes R_1 und 2 ME des Rohstoffes R_2 benötigt.

Berechnen Sie, welche Menge an Endprodukten E_1 und E_2 hergestellt wurden, wenn im Herstellungsprozess insgesamt genau 28 ME des Rohstoffes R_1 und 28 ME des Rohstoffes R_2 verbraucht wurden.

(Hinweis: Es können die Ergebnisse von Aufgabe 1 verwendet werden.)

Aufgabe 3:

Zur Herstellung einer einzigen Mengeneinheit des Endproduktes E_1 werden 2 ME des Rohstoffes R_1 und 5 ME des Rohstoffes R_2 benötigt.
Zur Herstellung einer einzigen Mengeneinheit des Endproduktes E_2 werden 7 ME des Rohstoffes R_1 und eine ME des Rohstoffes R_2 benötigt.

Berechnen Sie, welche Menge an Endprodukten E_1 und E_2 hergestellt wurden, wenn im Herstellungsprozess insgesamt genau 2 050 ME des Rohstoffes R_1 und 1 000 ME des Rohstoffes R_2 verbraucht wurden.

Aufgabe 4:

Zur Herstellung einer einzigen Mengeneinheit des Endproduktes E_1 werden 4 ME des Rohstoffes R_1 und eine ME des Rohstoffes R_2 benötigt.
Zur Herstellung einer einzigen Mengeneinheit des Endproduktes E_2 werden 3 ME des Rohstoffes R_1 und 5 ME des Rohstoffes R_2 benötigt.

Im ersten Quartal eines Jahres werden bei der Herstellung dieser beiden Endprodukte insgesamt genau 33 000 ME des ersten Rohstoffes R_1 und 38 000 ME des zweiten Rohstoffes R_2 verbraucht. Im zweiten Quartal eines Jahres werden dagegen insgesamt genau 32 000 ME des ersten Rohstoffes R_1 und 25 000 ME des zweiten Rohstoffes R_2 verbraucht.

Berechnen Sie, welche Menge an Endprodukten E_1 und E_2 im ersten Quartal und welche Mengen dieser Endprodukte im zweiten Quartal hergestellt wurden.

Aufgabe 5:

Ein Betrieb stellt aus zwei Rohstoffen R_1 und R_2 die beiden Zwischenprodukte Z_1 und Z_2 her. Diese werden sodann zu den drei Endprodukten E_1, E_2 und E_3 weiterverarbeitet.

Der Rohstoffbedarf des ersten Produktionsschrittes und der Gesamtrohstoffbedarf zur Produktion jeweils einer Einheit werden durch die folgenden Tabellen beschrieben:

	Z_1	Z_2
R_1	9	3
R_2	2	2

	E_1	E_2	E_3
R_1	48	21	84
R_2	12	14	32

Geben Sie die Zwischenbedarfsmatrix **B** an, die den Bedarf an Zwischenprodukten zur Produktion jeweils einer Einheit der Endprodukte im zweiten Produktionsschritt angibt.

Aufgabe 6:

Gegen Sie die Koeffizientenmatrizen der Linearen Gleichungssysteme der Aufgaben 1 bis 5 an und berechnen Sie die Inversen dieser Koeffizientenmatrizen.

Lösen Sie die Aufgaben 1 bis 5 dann mit Hilfe dieser Inversen.

Aufgabe 7:

Ein Betrieb stellt aus zwei Rohstoffen R_1 und R_2 die beiden Zwischenprodukte Z_1 und Z_2 her. Diese werden sodann zu den drei Endprodukten E_1, E_2 und E_3 weiterverarbeitet.

Der Rohstoffbedarf des ersten Produktionsschrittes und der Gesamtrohstoffbedarf zur Produktion jeweils einer Einheit werden durch die folgenden Tabellen beschrieben:

	E_1	E_2	E_3
Z_1	9	3	7
Z_2	2	2	4

	E_1	E_2	E_3
R_1	48	36	74
R_2	47	17	39

Geben Sie die Bedarfsmatrix **A** des ersten Produktionsschrittes an, die den Bedarf an Rohstoffen zur Produktion jeweils einer Einheit der Zwischenprodukte angibt.

Aufgabe 8:

Lösen Sie die folgenden Linearen Gleichungssysteme. Führen Sie dabei bitte für jeden Ihrer Zwischenschritte eine Probe mit Hilfe der Regel von Sarrus durch.

a)
$$\begin{aligned} 9x + 2y + 3z &= 66 \\ 5x + y \phantom{{}+4z} &= 21 \\ 2x + y + 4z &= 48 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 20x + 15y + 25z &= 16 \\ 40x + 10y + 10z &= 16 \\ 12x + 25y + 15z &= 16 \end{aligned}$$

Mathematik und Statistik (Modul M 22)

Übungsblatt 16 – Aufgabenstellungen

Aufgabe 1:

Lösen Sie die Aufgaben des Übungsblattes 15 direkt mit Hilfe des Gauß-Algorithmus.

Aufgabe 2:

Lösen Sie die Aufgaben des Übungsblattes 15, indem Sie die Inversen der Koeffizientenmatrizen mit Hilfe des Gauß-Algorithmus bestimmen und dann mit Hilfe dieser Inversen die jeweiligen Lösungen ermitteln.

Ergänzungsaufgaben:

Bearbeiten Sie weitere Aufgaben zur ***Lösung Linearer Gleichungssysteme*** und zur ***Bestimmung inverser Matrizen***, die Sie in Ihren Wirtschaftsmathematik-Übungsbüchern finden.

Mathematik und Statistik (Modul M 22)

Übungsblatt 15 – Lösungen

Aufgabe 1:

a) $3x + 8y = 28$, $6x + 2y = 28$ $\Rightarrow$ $\mathbf{a} = 3\sigma_x + 6\sigma_y$, $\mathbf{b} = 8\sigma_x + 2\sigma_y$, $\mathbf{r} = 28\sigma_x + 28\sigma_y$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{a}\,\mathbf{b} = (3\sigma_x + 6\sigma_y)(8\sigma_x + 2\sigma_y) = 24\sigma_x^2 + 6\sigma_x\sigma_y + 48\sigma_y\sigma_x + 12\sigma_y^2 = 36 - 42\sigma_x\sigma_y$$

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = -42\sigma_x\sigma_y$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{a}\,\mathbf{r} = (3\sigma_x + 6\sigma_y)(28\sigma_x + 28\sigma_y) = 84\sigma_x^2 + 84\sigma_x\sigma_y + 168\sigma_y\sigma_x + 168\sigma_y^2 = 252 - 84\sigma_x\sigma_y$$

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{r} = -84\sigma_x\sigma_y$$

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})\,y = \mathbf{a} \wedge \mathbf{r}$$
$$-42\sigma_x\sigma_y\,y = -84\sigma_x\sigma_y$$
$$\Rightarrow \quad y = 2$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{r}\,\mathbf{b} = (28\sigma_x + 28\sigma_y)(8\sigma_x + 2\sigma_y) = 224\sigma_x^2 + 56\sigma_x\sigma_y + 224\sigma_y\sigma_x + 56\sigma_y^2 = 280 - 168\sigma_x\sigma_y$$

$$\mathbf{r} \wedge \mathbf{b} = -168\sigma_x\sigma_y$$

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})\,x = \mathbf{r} \wedge \mathbf{b}$$
$$-42\sigma_x\sigma_y\,x = -168\sigma_x\sigma_y$$
$$\Rightarrow \quad x = 4$$

Probe: $3 \cdot 4 + 8 \cdot 2 = 12 + 16 = 28$
$6 \cdot 4 + 2 \cdot 2 = 24 + 4 = 28$

b) $4x + 9y = 29$, $5x + 6y = 31$ $\Rightarrow$ $\mathbf{a} = 4\sigma_x + 5\sigma_y$, $\mathbf{b} = 9\sigma_x + 6\sigma_y$, $\mathbf{r} = 29\sigma_x + 31\sigma_y$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{a}\,\mathbf{b} = (4\sigma_x + 5\sigma_y)(9\sigma_x + 6\sigma_y) = 36\sigma_x^2 + 24\sigma_x\sigma_y + 45\sigma_y\sigma_x + 30\sigma_y^2 = 66 - 21\sigma_x\sigma_y$$

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = -21\sigma_x\sigma_y$$

$$\left.\begin{aligned}
\Rightarrow\quad \mathbf{a}\,\mathbf{r} &= (4\,\sigma_x + 5\,\sigma_y)\,(29\,\sigma_x + 31\,\sigma_y)\\
&= 116\,\sigma_x^2 + 124\,\sigma_x\sigma_y + 145\,\sigma_y\sigma_x + 155\,\sigma_y^2\\
&= 271 - 21\,\sigma_x\sigma_y\\
\mathbf{a}\wedge\mathbf{r} &= -\,21\,\sigma_x\sigma_y
\end{aligned}\right\}
\quad
\begin{aligned}
(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})\,y &= \mathbf{a}\wedge\mathbf{r}\\
-\,21\,\sigma_x\sigma_y\,y &= -\,21\,\sigma_x\sigma_y\\
\Rightarrow\quad y &= 1
\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}
\Rightarrow\quad \mathbf{r}\,\mathbf{b} &= (29\,\sigma_x + 31\,\sigma_y)\,(9\,\sigma_x + 6\,\sigma_y)\\
&= 261\,\sigma_x^2 + 174\,\sigma_x\sigma_y + 279\,\sigma_y\sigma_x + 186\,\sigma_y^2\\
&= 447 - 105\,\sigma_x\sigma_y\\
\mathbf{r}\wedge\mathbf{b} &= -\,105\,\sigma_x\sigma_y
\end{aligned}\right\}
\quad
\begin{aligned}
(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})\,x &= \mathbf{r}\wedge\mathbf{b}\\
-\,21\,\sigma_x\sigma_y\,x &= -\,105\,\sigma_x\sigma_y\\
\Rightarrow\quad x &= 5
\end{aligned}$$

Probe: $\quad 4\cdot 5 + 9\cdot 1 = 20 + 9 = 29$

$\qquad\qquad 5\cdot 5 + 6\cdot 1 = 25 + 6 = 31$

c) $\quad \begin{aligned} 6\,x + 4\,y &= 6\\ 2\,x + \,y &= 3\end{aligned} \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned}\mathbf{a} &= 6\,\sigma_x + 2\,\sigma_y\\ \mathbf{b} &= 4\,\sigma_x + \sigma_y\\ \mathbf{r} &= 6\,\sigma_x + 3\,\sigma_y\end{aligned}$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow\quad \mathbf{a}\,\mathbf{b} &= (6\,\sigma_x + 2\,\sigma_y)\,(4\,\sigma_x + \sigma_y)\\
&= 24\,\sigma_x^2 + 6\,\sigma_x\sigma_y + 8\,\sigma_y\sigma_x + 2\,\sigma_y^2\\
&= 26 - 2\,\sigma_x\sigma_y\\
\mathbf{a}\wedge\mathbf{b} &= -\,2\,\sigma_x\sigma_y
\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}
\Rightarrow\quad \mathbf{a}\,\mathbf{r} &= (6\,\sigma_x + 2\,\sigma_y)\,(6\,\sigma_x + 3\,\sigma_y)\\
&= 36\,\sigma_x^2 + 18\,\sigma_x\sigma_y + 12\,\sigma_y\sigma_x + 6\,\sigma_y^2\\
&= 42 + 6\,\sigma_x\sigma_y\\
\mathbf{a}\wedge\mathbf{r} &= 6\,\sigma_x\sigma_y
\end{aligned}\right\}
\quad
\begin{aligned}
(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})\,y &= \mathbf{a}\wedge\mathbf{r}\\
-\,2\,\sigma_x\sigma_y\,y &= 6\,\sigma_x\sigma_y\\
\Rightarrow\quad y &= -\,3
\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}
\Rightarrow\quad \mathbf{r}\,\mathbf{b} &= (6\,\sigma_x + 3\,\sigma_y)\,(4\,\sigma_x + \sigma_y)\\
&= 24\,\sigma_x^2 + 6\,\sigma_x\sigma_y + 12\,\sigma_y\sigma_x + 3\,\sigma_y^2\\
&= 27 - 6\,\sigma_x\sigma_y\\
\mathbf{r}\wedge\mathbf{b} &= -\,6\,\sigma_x\sigma_y
\end{aligned}\right\}
\quad
\begin{aligned}
(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})\,x &= \mathbf{r}\wedge\mathbf{b}\\
-\,2\,\sigma_x\sigma_y\,x &= -\,6\,\sigma_x\sigma_y\\
\Rightarrow\quad x &= 3
\end{aligned}$$

Probe: $\quad 6\cdot 3 + 4\cdot(-3) = 18 - 12 = 6$

$\qquad\qquad 2\cdot 3 + (-3) = 6 - 3 = 3$

d) $\begin{aligned} 5x - 2y &= 6 \\ -2x - 3y &= 28 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \mathbf{a} &= 5\,\sigma_x - 2\,\sigma_y \\ \mathbf{b} &= -2\,\sigma_x - 3\,\sigma_y \\ \mathbf{r} &= 6\,\sigma_x + 28\,\sigma_y \end{aligned}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \mathbf{a}\,\mathbf{b} &= (5\,\sigma_x - 2\,\sigma_y)\,(-2\,\sigma_x - 3\,\sigma_y) \\ &= -10\,\sigma_x^2 - 15\,\sigma_x\sigma_y + 4\,\sigma_y\sigma_x + 6\,\sigma_y^2 \\ &= -4 - 19\,\sigma_x\sigma_y \end{aligned}$$

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = -19\,\sigma_x\sigma_y$$

$$\left.\begin{aligned} \Rightarrow \quad \mathbf{a}\,\mathbf{r} &= (5\,\sigma_x - 2\,\sigma_y)\,(6\,\sigma_x + 28\,\sigma_y) \\ &= 30\,\sigma_x^2 + 140\,\sigma_x\sigma_y - 12\,\sigma_y\sigma_x - 56\,\sigma_y^2 \\ &= -26 + 152\,\sigma_x\sigma_y \\ \mathbf{a} \wedge \mathbf{r} &= 152\,\sigma_x\sigma_y \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \begin{aligned} (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})\,y &= \mathbf{a} \wedge \mathbf{r} \\ -19\,\sigma_x\sigma_y\,y &= 152\,\sigma_x\sigma_y \\ y &= -8 \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} \Rightarrow \quad \mathbf{r}\,\mathbf{b} &= (6\,\sigma_x + 28\,\sigma_y)\,(-2\,\sigma_x - 3\,\sigma_y) \\ &= -12\,\sigma_x^2 - 18\,\sigma_x\sigma_y - 56\,\sigma_y\sigma_x - 84\,\sigma_y^2 \\ &= -96 + 38\,\sigma_x\sigma_y \\ \mathbf{r} \wedge \mathbf{b} &= 38\,\sigma_x\sigma_y \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \begin{aligned} (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})\,x &= \mathbf{r} \wedge \mathbf{b} \\ -19\,\sigma_x\sigma_y\,x &= 38\,\sigma_x\sigma_y \\ x &= -2 \end{aligned}$$

Probe: $\begin{aligned} 5 \cdot (-2) - 2 \cdot (-8) &= -10 + 16 = 6 \\ -2 \cdot (-2) - 3 \cdot (-8) &= \quad 4 + 24 = 28 \end{aligned}$

Aufgabe 2:

Das Lineare Gleichungssystem, das dieser Textaufgabe zugrunde liegt, entspricht dem LGS von Aufgabe 1a. Es können deshalb die Ergebnisse dieser Aufgabe übernommen werden:

$\begin{aligned} 3x + 8y &= 28 \\ 6x + 2y &= 28 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \mathbf{a} &= 3\,\sigma_x + 6\,\sigma_y \\ \mathbf{b} &= 8\,\sigma_x + 2\,\sigma_y \\ \mathbf{r} &= 28\,\sigma_x + 28\,\sigma_y \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} &= -42\,\sigma_x\sigma_y \\ \mathbf{a} \wedge \mathbf{r} &= -84\,\sigma_x\sigma_y \\ \mathbf{r} \wedge \mathbf{b} &= -168\,\sigma_x\sigma_y \end{aligned}$

$$x = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{r} \wedge \mathbf{b}) = \frac{-168}{-42} = 4 \qquad y = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{a} \wedge \mathbf{r}) = \frac{-84}{-42} = 2$$

Es werden 4 ME des ersten Endproduktes E_1 und 2 ME des zweiten Endproduktes E_2 hergestellt, wenn 28 ME des ersten Rohstoffes R_1 und 28 ME des zweiten Rohstoffes R_2 verbraucht werden.

Aufgabe 3:

$\begin{aligned} 2x + 7y &= 2050 \\ 5x + y &= 1000 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \mathbf{a} &= 2\,\sigma_x + 5\,\sigma_y \\ \mathbf{b} &= 7\,\sigma_x + \sigma_y \\ \mathbf{r} &= 2050\,\sigma_x + 1000\,\sigma_y \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} &= -33\,\sigma_x\sigma_y \\ \mathbf{a} \wedge \mathbf{r} &= -8250\,\sigma_x\sigma_y \\ \mathbf{r} \wedge \mathbf{b} &= -4950\,\sigma_x\sigma_y \end{aligned}$

$$x = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{r} \wedge \mathbf{b}) = \frac{-4950}{-33} = 150 \qquad y = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{a} \wedge \mathbf{r}) = \frac{-8250}{-33} = 250$$

Es werden 150 ME des ersten Endproduktes E_1 und 250 ME des zweiten Endproduktes E_2 hergestellt, wenn 2050 ME des ersten Rohstoffes R_1 und 1000 ME des zweiten Rohstoffes R_2 verbraucht werden.

Aufgabe 4:

1. Quartal   2. Quartal

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{P}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 33000 & 32000 \\ 38000 & 25000 \end{pmatrix}}_{\mathbf{R}}$$

R .... Matrix des quartalsweisen Rohstoffbedarfs (Rohstoffbedarfsmatrix)

P .... Matrix der quartalsweisen Produktion (Produktionsmatrix)

$$\begin{aligned} 4\,x_1 + 3\,y_1 &= 33000 \\ x_1 + 5\,y_1 &= 38000 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \mathbf{a} &= 4\,\sigma_x + \sigma_y \\ \mathbf{b} &= 3\,\sigma_x + 5\,\sigma_y \\ \mathbf{r_1} &= 33000\,\sigma_x + 38000\,\sigma_y \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} &= 17\,\sigma_x\sigma_y \\ \mathbf{a} \wedge \mathbf{r_1} &= 119000\,\sigma_x\sigma_y \\ \mathbf{r_1} \wedge \mathbf{b} &= 51000\,\sigma_x\sigma_y \end{aligned}$$

$$x_1 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{r_1} \wedge \mathbf{b}) = \frac{51000}{17} = 3000 \qquad y_1 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{a} \wedge \mathbf{r_1}) = \frac{119000}{17} = 7000$$

$$\begin{aligned} 4\,x_2 + 3\,y_2 &= 32000 \\ x_2 + 5\,y_2 &= 25000 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \mathbf{a} &= 4\,\sigma_x + \sigma_y \\ \mathbf{b} &= 3\,\sigma_x + 5\,\sigma_y \\ \mathbf{r_2} &= 32000\,\sigma_x + 25000\,\sigma_y \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} &= 17\,\sigma_x\sigma_y \\ \mathbf{a} \wedge \mathbf{r_2} &= 68000\,\sigma_x\sigma_y \\ \mathbf{r_2} \wedge \mathbf{b} &= 85000\,\sigma_x\sigma_y \end{aligned}$$

$$x_2 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{r_2} \wedge \mathbf{b}) = \frac{85000}{17} = 5000 \qquad y_2 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{a} \wedge \mathbf{r_2}) = \frac{68000}{17} = 4000$$

$\Rightarrow$ Die Matrix der quartalsweisen Produktion lautet: $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 3000 & 5000 \\ 7000 & 4000 \end{pmatrix}$

Im ersten Quartal werden somit 3000 ME des ersten Endproduktes E_1 und 7000 ME des zweiten Endproduktes E_2 hergestellt.

Im zweiten Quartal werden dann 5000 ME des ersten Endproduktes E_1 und 4000 ME des zweiten Endproduktes E_2 hergestellt.

Aufgabe 5:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}}_{\mathbf{B}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 48 & 21 & 84 \\ 12 & 14 & 32 \end{pmatrix}}_{\mathbf{G}}$$

G .... Gesamtbedarfsmatrix

B .... Bedarfsmatrix des zweiten Produktionsschritts

A .... Bedarfsmatrix des ersten Produktionsschritts

$9\,x_1 + 3\,y_1 = 48$ $\quad\Rightarrow\quad$ $\mathbf{a} = 9\,\sigma_x + 2\,\sigma_y$ $\quad\Rightarrow\quad$ $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = 12\,\sigma_x\sigma_y$

$2\,x_1 + 2\,y_1 = 12$ $\quad$ $\mathbf{b} = 3\,\sigma_x + 2\,\sigma_y$ $\quad$ $\mathbf{a} \wedge \mathbf{r_1} = 12\,\sigma_x\sigma_y$

$\mathbf{r_1} = 48\,\sigma_x + 12\,\sigma_y$ $\quad$ $\mathbf{r_1} \wedge \mathbf{b} = 60\,\sigma_x\sigma_y$

$$x_1 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{r_1} \wedge \mathbf{b}) = \frac{60}{12} = 5 \qquad y_1 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{a} \wedge \mathbf{r_1}) = \frac{12}{12} = 1$$

$9\,x_2 + 3\,y_2 = 21$ $\quad\Rightarrow\quad$ $\mathbf{a} = 9\,\sigma_x + 2\,\sigma_y$ $\quad\Rightarrow\quad$ $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = 12\,\sigma_x\sigma_y$

$2\,x_2 + 2\,y_2 = 14$ $\quad$ $\mathbf{b} = 3\,\sigma_x + 2\,\sigma_y$ $\quad$ $\mathbf{a} \wedge \mathbf{r_2} = 84\,\sigma_x\sigma_y$

$\mathbf{r_2} = 21\,\sigma_x + 14\,\sigma_y$ $\quad$ $\mathbf{r_2} \wedge \mathbf{b} = 0\,\sigma_x\sigma_y$

$$x_2 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{r_2} \wedge \mathbf{b}) = \frac{0}{12} = 0 \qquad y_2 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{a} \wedge \mathbf{r_2}) = \frac{84}{12} = 7$$

$9\,x_3 + 3\,y_3 = 84$ $\quad\Rightarrow\quad$ $\mathbf{a} = 9\,\sigma_x + 2\,\sigma_y$ $\quad\Rightarrow\quad$ $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = 12\,\sigma_x\sigma_y$

$2\,x_3 + 2\,y_3 = 32$ $\quad$ $\mathbf{b} = 3\,\sigma_x + 2\,\sigma_y$ $\quad$ $\mathbf{a} \wedge \mathbf{r_3} = 120\,\sigma_x\sigma_y$

$\mathbf{r_3} = 84\,\sigma_x + 32\,\sigma_y$ $\quad$ $\mathbf{r_3} \wedge \mathbf{b} = 72\,\sigma_x\sigma_y$

$$x_3 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{r_3} \wedge \mathbf{b}) = \frac{72}{12} = 6 \qquad y_3 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{a} \wedge \mathbf{r_3}) = \frac{120}{12} = 10$$

$\Rightarrow$ Die Zwischenbedarfsmatrix lautet: $\quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 6 \\ 1 & 7 & 10 \end{pmatrix}$

Aufgabe 6 $\rightarrow$ Alternative Lösung von Aufgabe 1:

a) $3\,x + 8\,y = 28$
$6\,x + 2\,y = 28$ $\quad\Rightarrow\quad \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 \\ 28 \end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$

Berechnung der inversen Matrix $\mathbf{A^{-1}}$:

$$\mathbf{A\,A^{-1} = E} \qquad\Rightarrow\qquad \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ $\mathbf{a} = 3\,\sigma_x + 6\,\sigma_y$ $\quad\Rightarrow\quad$ $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = -\,42\,\sigma_x\sigma_y$

$\mathbf{b} = 8\,\sigma_x + 2\,\sigma_y$

$\mathbf{r_1} = \sigma_x$ $\quad$ $\mathbf{a} \wedge \mathbf{r_1} = -\,6\,\sigma_x\sigma_y$ $\quad$ $\mathbf{r_1} \wedge \mathbf{b} = 2\,\sigma_x\sigma_y$

$\mathbf{r_2} = \sigma_y$ $\quad$ $\mathbf{a} \wedge \mathbf{r_2} = 3\,\sigma_x\sigma_y$ $\quad$ $\mathbf{r_2} \wedge \mathbf{b} = -\,8\,\sigma_x\sigma_y$

$$\Rightarrow\quad x_1 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{r_1} \wedge \mathbf{b}) = \frac{2}{-\,42} = -\,\frac{2}{42} \qquad y_1 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{a} \wedge \mathbf{r_1}) = \frac{-\,6}{-\,42} = \frac{6}{42}$$

$$x_2 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{r_2} \wedge \mathbf{b}) = \frac{-\,8}{-\,42} = \frac{8}{42} \qquad y_2 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{a} \wedge \mathbf{r_2}) = \frac{3}{-\,42} = -\,\frac{3}{42}$$

$$\Rightarrow\quad \mathbf{A^{-1}} = \frac{1}{42}\begin{pmatrix} -\,2 & 8 \\ 6 & -\,3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \begin{pmatrix} 28 \\ 28 \end{pmatrix} = \frac{1}{42} \begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 28 \\ 28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

b) $\begin{aligned} 4x + 9y &= 29 \\ 5x + 6y &= 31 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 \\ 31 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

Berechnung der inversen Matrix $\mathbf{A}^{-1}$:

$$\mathbf{A}\,\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \quad \mathbf{a} = 4\,\sigma_x + 5\,\sigma_y \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = -21\,\sigma_x\sigma_y$

$\mathbf{b} = 9\,\sigma_x + 6\,\sigma_y$

$\mathbf{r_1} = \sigma_x \qquad \mathbf{a} \wedge \mathbf{r_1} = -5\,\sigma_x\sigma_y \qquad \mathbf{r_1} \wedge \mathbf{b} = 6\,\sigma_x\sigma_y$

$\mathbf{r_2} = \sigma_y \qquad \mathbf{a} \wedge \mathbf{r_2} = 4\,\sigma_x\sigma_y \qquad \mathbf{r_2} \wedge \mathbf{b} = -9\,\sigma_x\sigma_y$

$\Rightarrow \quad x_1 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{r_1} \wedge \mathbf{b}) = \frac{6}{-21} = -\frac{6}{21} \qquad y_1 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{a} \wedge \mathbf{r_1}) = \frac{-5}{-21} = \frac{5}{21}$

$x_2 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{r_2} \wedge \mathbf{b}) = \frac{-9}{-21} = \frac{9}{21} \qquad y_2 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{a} \wedge \mathbf{r_2}) = \frac{4}{-21} = -\frac{4}{21}$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{21} \begin{pmatrix} -6 & 9 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \begin{pmatrix} 29 \\ 31 \end{pmatrix} = \frac{1}{21} \begin{pmatrix} -6 & 9 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 29 \\ 31 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c) $\begin{aligned} 6x + 4y &= 6 \\ 2x + y &= 3 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Berechnung der inversen Matrix $\mathbf{A}^{-1}$:

$$\mathbf{A}\,\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \quad \mathbf{a} = 6\,\sigma_x + 2\,\sigma_y \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = -2\,\sigma_x\sigma_y$

$\mathbf{b} = 4\,\sigma_x + \sigma_y$

$\mathbf{r_1} = \sigma_x \qquad \mathbf{a} \wedge \mathbf{r_1} = -2\,\sigma_x\sigma_y \qquad \mathbf{r_1} \wedge \mathbf{b} = \sigma_x\sigma_y$

$\mathbf{r_2} = \sigma_y \qquad \mathbf{a} \wedge \mathbf{r_2} = 6\,\sigma_x\sigma_y \qquad \mathbf{r_2} \wedge \mathbf{b} = -4\,\sigma_x\sigma_y$

$\Rightarrow \quad x_1 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{r_1} \wedge \mathbf{b}) = \frac{1}{-2} = -0{,}5 \qquad y_1 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{a} \wedge \mathbf{r_1}) = \frac{-2}{-2} = 1$

$x_2 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{r_2} \wedge \mathbf{b}) = \frac{-4}{-2} = 2 \qquad y_2 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{a} \wedge \mathbf{r_2}) = \frac{6}{-2} = -3$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -0{,}5 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}5 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

d) $$\begin{aligned} 5\,x - 2\,y &= 6 \\ -2\,x - 3\,y &= 28 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 28 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Berechnung der inversen Matrix $\mathbf{A}^{-1}$:

$$\mathbf{A}\,\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \quad \mathbf{a} = 5\,\sigma_x - 2\,\sigma_y \qquad \Rightarrow \quad \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = -19\,\sigma_x\sigma_y$

$\mathbf{b} = -2\,\sigma_x - 3\,\sigma_y$

$\mathbf{r_1} = \sigma_x \qquad \mathbf{a} \wedge \mathbf{r_1} = 2\,\sigma_x\sigma_y \qquad \mathbf{r_1} \wedge \mathbf{b} = -3\,{}_x\sigma_y$

$\mathbf{r_2} = \sigma_y \qquad \mathbf{a} \wedge \mathbf{r_2} = 5\,\sigma_x\sigma_y \qquad \mathbf{r_2} \wedge \mathbf{b} = 2\,\sigma_x\sigma_y$

$$\Rightarrow \quad x_1 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{r_1} \wedge \mathbf{b}) = \frac{-3}{-19} = \frac{3}{19} \qquad y_1 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{a} \wedge \mathbf{r_1}) = \frac{2}{-19} = -\frac{2}{19}$$

$$x_2 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{r_2} \wedge \mathbf{b}) = \frac{2}{-19} = -\frac{2}{19} \qquad y_2 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{a} \wedge \mathbf{r_2}) = \frac{5}{-19} = -\frac{5}{19}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{19} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \begin{pmatrix} 6 \\ 28 \end{pmatrix} = \frac{1}{19} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6 $\rightarrow$ Alternative Lösung von Aufgabe 2:

Das Lineare Gleichungssystem, das dieser Textaufgabe zugrunde liegt, entspricht dem LGS von Aufgabe 1a. Es können deshalb die Ergebnisse dieser Aufgabe übernommen werden.

$$\begin{aligned} 3\,x + 8\,y &= 28 \\ 6\,x + 2\,y &= 28 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 \\ 28 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$$

Berechnung der inversen Matrix $\mathbf{A}^{-1}$:

$$\mathbf{A}\,\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \quad \mathbf{a} = 3\,\sigma_x + 6\,\sigma_y \qquad \Rightarrow \quad \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = -42\,\sigma_x\sigma_y$

$\mathbf{b} = 8\,\sigma_x + 2\,\sigma_y$

$\mathbf{r_1} = \sigma_x \qquad \mathbf{a} \wedge \mathbf{r_1} = -6\,\sigma_x\sigma_y \qquad \mathbf{r_1} \wedge \mathbf{b} = 2\,\sigma_x\sigma_y$

$\mathbf{r_2} = \sigma_y \qquad \mathbf{a} \wedge \mathbf{r_2} = 3\,\sigma_x\sigma_y \qquad \mathbf{r_2} \wedge \mathbf{b} = -8\,\sigma_x\sigma_y$

$$\Rightarrow \quad x_1 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{r_1} \wedge \mathbf{b}) = \frac{2}{-42} = -\frac{2}{42} \qquad y_1 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{a} \wedge \mathbf{r_1}) = \frac{-6}{-42} = \frac{6}{42}$$

$$x_2 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{r_2} \wedge \mathbf{b}) = \frac{-8}{-42} = \frac{8}{42} \qquad y_2 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{a} \wedge \mathbf{r_2}) = \frac{3}{-42} = -\frac{3}{42}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{A^{-1}} = \frac{1}{42}\begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{A^{-1}} \begin{pmatrix} 28 \\ 28 \end{pmatrix} = \frac{1}{42}\begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 28 \\ 28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Es werden 4 ME des ersten Endproduktes E_1 und 2 ME des zweiten Endproduktes E_2 hergestellt, wenn 28 ME des ersten Rohstoffes R_1 und 28 ME des zweiten Rohstoffes R_2 verbraucht werden.

Aufgabe 6 $\rightarrow$ Alternative Lösung von Aufgabe 3:

$$\begin{aligned} 2\,x + 7\,y &= 2050 \\ 5\,x + y &= 1000 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2050 \\ 1000 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Berechnung der inversen Matrix $\mathbf{A^{-1}}$:

$$\mathbf{A\,A^{-1} = E} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \quad \mathbf{a} = 2\,\sigma_x + 5\,\sigma_y \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = -33\,\sigma_x\sigma_y$

$\mathbf{b} = 7\,\sigma_x + \sigma_y$

$\mathbf{r_1} = \sigma_x \qquad \mathbf{a} \wedge \mathbf{r_1} = -5\,\sigma_x\sigma_y \qquad \mathbf{r_1} \wedge \mathbf{b} = \sigma_x\sigma_y$

$\mathbf{r_2} = \sigma_y \qquad \mathbf{a} \wedge \mathbf{r_2} = 2\,\sigma_x\sigma_y \qquad \mathbf{r_2} \wedge \mathbf{b} = -7\,\sigma_x\sigma_y$

$$\Rightarrow \quad x_1 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{r_1} \wedge \mathbf{b}) = \frac{1}{-33} = -\frac{1}{33} \qquad y_1 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{a} \wedge \mathbf{r_1}) = \frac{-5}{-33} = \frac{5}{33}$$

$$x_2 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{r_2} \wedge \mathbf{b}) = \frac{-7}{-33} = \frac{7}{33} \qquad y_2 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{a} \wedge \mathbf{r_2}) = \frac{2}{-33} = -\frac{2}{33}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{A^{-1}} = \frac{1}{33}\begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{A^{-1}} \begin{pmatrix} 2050 \\ 1000 \end{pmatrix} = \frac{1}{33}\begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2050 \\ 1000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 150 \\ 250 \end{pmatrix}$$

Es werden 150 ME des ersten Endproduktes E_1 und 250 ME des zweiten Endproduktes E_2 hergestellt, wenn 2050 ME des ersten Rohstoffes R_1 und 1000 ME des zweiten Rohstoffes R_2 verbraucht werden.

Aufgabe 6 $\rightarrow$ Alternative Lösung von Aufgabe 4:

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}}_{\mathbf{P}} = \underbrace{\begin{array}{cc} \text{1. Quartal} & \text{2. Quartal} \\ \downarrow & \downarrow \\ \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} 33000 & 32000 \\ 38000 & 25000 \end{pmatrix}} \end{array}}_{\mathbf{R}} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

R .... Matrix des quartalsweisen Rohstoffbedarfs
(Rohstoffbedarfsmatrix)

P .... Matrix der quartalsweisen Produktion
(Produktionsmatrix)

Berechnung der inversen Matrix $\mathbf{A}^{-1}$:

$$\mathbf{A}\,\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \quad \mathbf{a} = 4\,\sigma_x + \sigma_y \qquad \Rightarrow \quad \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = 17\,\sigma_x\sigma_y$

$\mathbf{b} = 3\,\sigma_x + 5\,\sigma_y$

$\mathbf{r_1} = \sigma_x \qquad \mathbf{a} \wedge \mathbf{r_1} = -\,\sigma_x\sigma_y \qquad \mathbf{r_1} \wedge \mathbf{b} = 5\,\sigma_x\sigma_y$

$\mathbf{r_2} = \sigma_y \qquad \mathbf{a} \wedge \mathbf{r_2} = 4\,\sigma_x\sigma_y \qquad \mathbf{r_2} \wedge \mathbf{b} = -\,3\,\sigma_x\sigma_y$

$$\Rightarrow \quad x_1 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{r_1} \wedge \mathbf{b}) = \frac{5}{17} \qquad y_1 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{a} \wedge \mathbf{r_1}) = \frac{-1}{17} = -\,\frac{1}{17}$$

$$x_2 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{r_2} \wedge \mathbf{b}) = \frac{-3}{17} = -\,\frac{3}{17} \qquad y_2 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{a} \wedge \mathbf{r_2}) = \frac{4}{17}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{-1}\begin{pmatrix} 33000 \\ 38000 \end{pmatrix} = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 33000 & 32000 \\ 38000 & 25000 \end{pmatrix} = \begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} 3000 & 5000 \\ 7000 & 4000 \end{pmatrix}} \\ \uparrow & \uparrow \\ \text{1. Quartal} & \text{2. Quartal} \end{array}$$

Die Matrix der quartalsweisen Produktion lautet: $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 3000 & 5000 \\ 7000 & 4000 \end{pmatrix}$

Im ersten Quartal werden somit 3000 ME des ersten Endproduktes E_1 und 7000 ME des zweiten Endproduktes E_2 hergestellt.

Im zweiten Quartal werden dann 5000 ME des ersten Endproduktes E_1 und 4000 ME des zweiten Endproduktes E_2 hergestellt.

Aufgabe 6 $\rightarrow$ Alternative Lösung von Aufgabe 5:

$$\mathbf{A\,B} = \underbrace{\begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}}_{\mathbf{B}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 48 & 21 & 84 \\ 12 & 14 & 32 \end{pmatrix}}_{\mathbf{G}} = \mathbf{G}$$

G .... Gesamtbedarfsmatrix

B .... Bedarfsmatrix des zweiten Produktionsschritts

A .... Bedarfsmatrix des ersten Produktionsschritts

Berechnung der inversen Matrix $\mathbf{A}^{-1}$:

$$\mathbf{A\,A}^{-1} = \mathbf{E} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{a} = 9\,\sigma_x + 2\,\sigma_y \qquad \Rightarrow \quad \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = 12\,\sigma_x\sigma_y$$

$$\mathbf{b} = 3\,\sigma_x + 2\,\sigma_y$$

$$\mathbf{r_1} = \sigma_x \qquad \mathbf{a} \wedge \mathbf{r_1} = -2\,\sigma_x\sigma_y \qquad \mathbf{r_1} \wedge \mathbf{b} = 2\,\sigma_x\sigma_y$$

$$\mathbf{r_2} = \sigma_y \qquad \mathbf{a} \wedge \mathbf{r_2} = 9\,\sigma_x\sigma_y \qquad \mathbf{r_2} \wedge \mathbf{b} = -3\,\sigma_x\sigma_y$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{r_1} \wedge \mathbf{b}) = \frac{2}{12} \qquad y_1 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{a} \wedge \mathbf{r_1}) = \frac{-2}{12} = -\frac{2}{12}$$

$$x_2 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{r_2} \wedge \mathbf{b}) = \frac{-3}{12} = -\frac{3}{12} \qquad y_2 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{a} \wedge \mathbf{r_2}) = \frac{9}{12}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{G} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}\begin{pmatrix} 48 & 21 & 84 \\ 12 & 14 & 32 \end{pmatrix} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 48 & 21 & 84 \\ 12 & 14 & 32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 6 \\ 1 & 7 & 10 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Die Zwischenbedarfsmatrix lautet: $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 6 \\ 1 & 7 & 10 \end{pmatrix}$

Aufgabe 7:

Achtung: Die Bezeichnung der Elemente x_i und y_i folgt im Hinblick auf die anstehende Transposition bereits der transponierten Schreibung.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} 9 & 3 & 7 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}}_{\mathbf{B}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 48 & 36 & 74 \\ 47 & 17 & 39 \end{pmatrix}}_{\mathbf{G}}$$

G .... Gesamtbedarfsmatrix

B .... Bedarfsmatrix des zweiten Produktionsschritts

A .... Bedarfsmatrix des ersten Produktionsschritts

$\mathbf{A\,B} = \mathbf{G} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{B^T\,A^T} = \mathbf{G^T}$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 3 & 2 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}}_{\mathbf{B^T}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A^T}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 48 & 47 \\ 36 & 17 \\ 74 & 39 \end{pmatrix}}_{\mathbf{G^T}}$$

$9\,x_1 + 2\,y_1 = 48 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a} = 9\,\sigma_x + 3\,\sigma_y + 7\,\sigma_z \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = 12\,\sigma_x\sigma_y - 2\,\sigma_y\sigma_z - 22\,\sigma_z\sigma_x$

$3\,x_1 + 2\,y_1 = 36 \qquad \mathbf{b} = 2\,\sigma_x + 2\,\sigma_y + 4\,\sigma_z \qquad \mathbf{a} \wedge \mathbf{r_1} = 180\,\sigma_x\sigma_y - 30\,\sigma_y\sigma_z - 330\,\sigma_z\sigma_x$

$7\,x_1 + 4\,y_1 = 74 \qquad \mathbf{r_1} = 48\,\sigma_x + 36\,\sigma_y + 74\,\sigma_z \qquad \mathbf{r_1} \wedge \mathbf{b} = 24\,\sigma_x\sigma_y - 4\,\sigma_y\sigma_z - 44\,\sigma_z\sigma_x$

$x_1 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{r_1} \wedge \mathbf{b}) = 2 \qquad y_1 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{a} \wedge \mathbf{r_1}) = 15$

$9\,x_2 + 2\,y_2 = 47 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a} = 9\,\sigma_x + 3\,\sigma_y + 7\,\sigma_z \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = 12\,\sigma_x\sigma_y - 2\,\sigma_y\sigma_z - 22\,\sigma_z\sigma_x$

$3\,x_2 + 2\,y_2 = 17 \qquad \mathbf{b} = 2\,\sigma_x + 2\,\sigma_y + 4\,\sigma_z \qquad \mathbf{a} \wedge \mathbf{r_2} = 12\,\sigma_x\sigma_y - 2\,\sigma_y\sigma_z - 22\,\sigma_z\sigma_x$

$7\,x_2 + 4\,y_2 = 39 \qquad \mathbf{r_2} = 47\,\sigma_x + 17\,\sigma_y + 39\,\sigma_z \qquad \mathbf{r_2} \wedge \mathbf{b} = 60\,\sigma_x\sigma_y - 10\,\sigma_y\sigma_z - 110\,\sigma_z\sigma_x$

$x_2 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{r_2} \wedge \mathbf{b}) = 5 \qquad y_2 = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^{-1}\,(\mathbf{a} \wedge \mathbf{r_2}) = 1$

$\Rightarrow$ Die Transponierte der Bedarfsmatrix des ersten Produktionsschrittes lautet: $\mathbf{A^T} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 15 & 1 \end{pmatrix}$

Damit lautet die Bedarfsmatrix des ersten Produktionsschrittes: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 15 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 8:

a) $\begin{aligned} 9\,x + 2\,y + 3\,z &= 66 \\ 5\,x + y \phantom{{}+ 3\,z} &= 21 \\ 2\,x + y + 4\,z &= 48 \end{aligned} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{pmatrix} 9 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 66 \\ 21 \\ 48 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \quad \mathbf{a} = 9\,\sigma_x + 5\,\sigma_y + 2\,\sigma_z$

$\mathbf{b} = 2\,\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$

$\mathbf{c} = 3\,\sigma_x + 4\,\sigma_z$

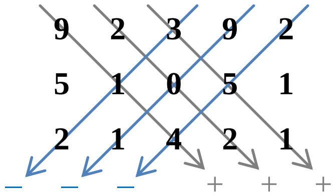
$\mathbf{r} = 66\,\sigma_x + 21\,\sigma_y + 48\,\sigma_z$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} &= (9\,\sigma_x + 5\,\sigma_y + 2\,\sigma_z) \wedge (2\,\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \\ &= 9\,\sigma_x\sigma_y + 9\,\sigma_x\sigma_z + 10\,\sigma_y\sigma_x + 5\,\sigma_y\sigma_z + 4\,\sigma_z\sigma_x + 2\,\sigma_z\sigma_y \\ &= 9\,\sigma_x\sigma_y - 9\,\sigma_z\sigma_x - 10\,\sigma_x\sigma_y + 5\,\sigma_y\sigma_z + 4\,\sigma_z\sigma_x - 2\,\sigma_y\sigma_z \\ &= -\,\sigma_x\sigma_y + 3\,\sigma_y\sigma_z - 5\,\sigma_z\sigma_x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} &= (-\,\sigma_x\sigma_y + 3\,\sigma_y\sigma_z - 5\,\sigma_z\sigma_x) \wedge (3\,\sigma_x + 4\,\sigma_z) \\ &= -4\,\sigma_x\sigma_y\sigma_z + 9\,\sigma_y\sigma_z\sigma_x \\ &= -4\,\sigma_x\sigma_y\sigma_z + 9\,\sigma_x\sigma_y\sigma_z \end{aligned}$$

$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} = 5\ \sigma_x\sigma_y\sigma_z$

Probe mit der Regel von Sarrus:



$\det \mathbf{A} = 9 \cdot 1 \cdot 4 + 2 \cdot 0 \cdot 2 + 3 \cdot 5 \cdot 1 - 3 \cdot 1 \cdot 2 - 9 \cdot 0 \cdot 1 - 2 \cdot 5 \cdot 4$

$= 36 + 0 + 15 - 6 - 0 - 40$

$= 5$

$\Rightarrow$ $\mathbf{r} \wedge \mathbf{b} = (66\ \sigma_x + 21\ \sigma_y + 48\ \sigma_z) \wedge (2\ \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$

$= 66\ \sigma_x\sigma_y + 66\ \sigma_x\sigma_z + 42\ \sigma_y\sigma_x + 21\ \sigma_y\sigma_z + 96\ \sigma_z\sigma_x + 48\ \sigma_z\sigma_y$

$= 66\ \sigma_x\sigma_y - 66\ \sigma_z\sigma_x - 42\ \sigma_x\sigma_y + 21\ \sigma_y\sigma_z + 96\ \sigma_z\sigma_x - 48\ \sigma_y\sigma_z$

$= 24\ \sigma_x\sigma_y - 27\ \sigma_y\sigma_z + 30\ \sigma_z\sigma_x$

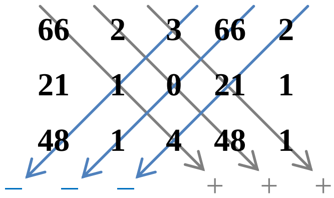
$\mathbf{r} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} = (24\ \sigma_x\sigma_y - 27\ \sigma_y\sigma_z + 30\ \sigma_z\sigma_x) \wedge (3\ \sigma_x + 4\ \sigma_z)$

$= 96\ \sigma_x\sigma_y\sigma_z - 81\ \sigma_y\sigma_z\sigma_x$

$= 96\ \sigma_x\sigma_y\sigma_z - 81\ \sigma_x\sigma_y\sigma_z$

$= 15\ \sigma_x\sigma_y\sigma_z$

Probe mit der Regel von Sarrus:



$\det \mathbf{A} = 66 \cdot 1 \cdot 4 + 2 \cdot 0 \cdot 48 + 3 \cdot 21 \cdot 1 - 3 \cdot 1 \cdot 48 - 66 \cdot 0 \cdot 1 - 2 \cdot 21 \cdot 4$

$= 264 + 0 + 63 - 144 - 0 - 168$

$= 15$

$\Rightarrow$ $\mathbf{a} \wedge \mathbf{r} = (9\ \sigma_x + 5\ \sigma_y + 2\ \sigma_z) \wedge (66\ \sigma_x + 21\ \sigma_y + 48\ \sigma_z)$

$= 189\ \sigma_x\sigma_y + 432\ \sigma_x\sigma_z + 330\ \sigma_y\sigma_x + 240\ \sigma_y\sigma_z + 132\ \sigma_z\sigma_x + 42\ \sigma_z\sigma_y$

$= 189\ \sigma_x\sigma_y - 432\ \sigma_z\sigma_x - 330\ \sigma_x\sigma_y + 240\ \sigma_y\sigma_z + 132\ \sigma_z\sigma_x - 42\ \sigma_y\sigma_z$

$= -\ 141\ \sigma_x\sigma_y + 198\ \sigma_y\sigma_z - 300\ \sigma_z\sigma_x$

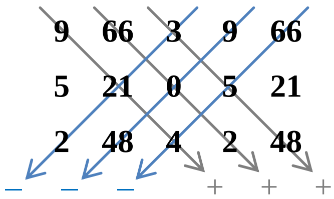
$\mathbf{a} \wedge \mathbf{r} \wedge \mathbf{c} = (-\ 141\ \sigma_x\sigma_y + 198\ \sigma_y\sigma_z - 300\ \sigma_z\sigma_x) \wedge (3\ \sigma_x + 4\ \sigma_z)$

$= -\ 564\ \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 594\ \sigma_y\sigma_z\sigma_x$

$= -\ 564\ \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 594\ \sigma_x\sigma_y\sigma_z$

$= 30\ \sigma_x\sigma_y\sigma_z$

Probe mit der Regel von Sarrus:



$\det \mathbf{A} = 9 \cdot 21 \cdot 4 + 66 \cdot 0 \cdot 2 + 3 \cdot 5 \cdot 48 - 3 \cdot 21 \cdot 2 - 9 \cdot 0 \cdot 48 - 66 \cdot 5 \cdot 4$

$= 756 + 0 + 720 - 126 - 0 - 1\,320$

$= 30$

$\Rightarrow$ $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = -\ \sigma_x\sigma_y + 3\ \sigma_y\sigma_z - 5\ \sigma_z\sigma_x$ $\leftarrow$ *siehe vorige Seite*

$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{r} = (-\ \sigma_x\sigma_y + 3\ \sigma_y\sigma_z - 5\ \sigma_z\sigma_x) \wedge (66\ \sigma_x + 21\ \sigma_y + 48\ \sigma_z)$

$= -\ 48\ \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 198\ \sigma_y\sigma_z\sigma_x - 105\ \sigma_z\sigma_x\sigma_y$

$= -48\,\sigma_x\sigma_y\sigma_z + 198\,\sigma_x\sigma_y\sigma_z - 105\,\sigma_x\sigma_y\sigma_z$

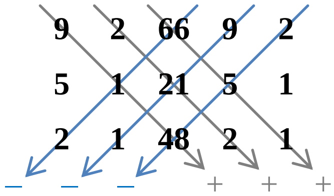
$= 45\,\sigma_x\sigma_y\sigma_z$

Probe mit der Regel von Sarrus:

$\det \mathbf{A} = 9 \cdot 1 \cdot 48 + 2 \cdot 21 \cdot 2 + 66 \cdot 5 \cdot 1 - 66 \cdot 1 \cdot 2 - 9 \cdot 21 \cdot 1 - 2 \cdot 5 \cdot 48$

$= 432 + 84 + 330 - 132 - 189 - 480$

$= 45$



$$x = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c})^{-1}\,(\mathbf{r} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = \frac{15}{5} = 3$$

$$y = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c})^{-1}\,(\mathbf{a} \wedge \mathbf{r} \wedge \mathbf{c}) = \frac{30}{5} = 6$$

$$z = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c})^{-1}\,(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{r}) = \frac{45}{5} = 9$$

Probe: $9 \cdot 3 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 9 = 27 + 12 + 27 = 66$
$5 \cdot 3 + 6 = 15 + 6 = 21$
$2 \cdot 3 + 6 + 4 \cdot 9 = 6 + 6 + 36 = 48$

b) $20\,x + 15\,y + 25\,z = 16$
$40\,x + 10\,y + 10\,z = 16$
$12\,x + 25\,y + 15\,z = 16$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 20 & 15 & 25 \\ 40 & 10 & 10 \\ 12 & 25 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 16 \\ 16 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ $\mathbf{a} = 20\,\sigma_x + 40\,\sigma_y + 12\,\sigma_z$

$\mathbf{b} = 15\,\sigma_x + 10\,\sigma_y + 25\,\sigma_z$

$\mathbf{c} = 25\,\sigma_x + 10\,\sigma_y + 15\,\sigma_z$

$\mathbf{r} = 16\,\sigma_x + 16\,\sigma_y + 16\,\sigma_z$

$\Rightarrow$ $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = (20\,\sigma_x + 40\,\sigma_y + 12\,\sigma_z) \wedge (15\,\sigma_x + 10\,\sigma_y + 25\,\sigma_z)$

$= 200\,\sigma_x\sigma_y - 500\,\sigma_z\sigma_x - 600\,\sigma_x\sigma_y + 1\,000\,\sigma_y\sigma_z + 180\,\sigma_z\sigma_x - 120\,\sigma_y\sigma_z$

$= -400\,\sigma_x\sigma_y + 880\,\sigma_y\sigma_z - 320\,\sigma_z\sigma_x$

$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} = (-400\,\sigma_x\sigma_y + 880\,\sigma_y\sigma_z - 320\,\sigma_z\sigma_x) \wedge (25\,\sigma_x + 10\,\sigma_y + 15\,\sigma_z)$

$= -6\,000\,\sigma_x\sigma_y\sigma_z + 22\,000\,\sigma_x\sigma_y\sigma_z - 3\,200\,\sigma_x\sigma_y\sigma_z$

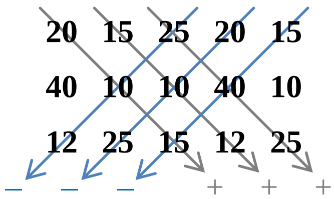
$= 12\,800\,\sigma_x\sigma_y\sigma_z$

Probe mit der Regel von Sarrus:

$\det \mathbf{A} = 20 \cdot 10 \cdot 15 + 15 \cdot 10 \cdot 12 + 25 \cdot 40 \cdot 25 - 25 \cdot 10 \cdot 12 - 20 \cdot 10 \cdot 25 - 15 \cdot 40 \cdot 15$

$= 3\,000 + 1\,800 + 25\,000 - 3\,000 - 5\,000 - 9\,000$

$= 12\,800$



$\Rightarrow \quad \mathbf{r} \wedge \mathbf{b} = (16\,\sigma_x + 16\,\sigma_y + 16\,\sigma_z) \wedge (15\,\sigma_x + 10\,\sigma_y + 25\,\sigma_z)$

$= 160\,\sigma_x\sigma_y - 400\,\sigma_z\sigma_x - 240\,\sigma_x\sigma_y + 400\,\sigma_y\sigma_z + 240\,\sigma_z\sigma_x - 160\,\sigma_y\sigma_z$

$= -\,80\,\sigma_x\sigma_y + 240\,\sigma_y\sigma_z - 160\,\sigma_z\sigma_x$

$\mathbf{r} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} = (-\,80\,\sigma_x\sigma_y + 240\,\sigma_y\sigma_z - 160\,\sigma_z\sigma_x) \wedge (25\,\sigma_x + 10\,\sigma_y + 15\,\sigma_z)$

$= -\,1200\,\sigma_x\sigma_y\sigma_z + 6000\,\sigma_x\sigma_y\sigma_z - 1600\,\sigma_x\sigma_y\sigma_z$

$= 3200\,\sigma_x\sigma_y\sigma_z$

Probe mit der Regel von Sarrus:

$\det \mathbf{A} = 16 \cdot 10 \cdot 15 + 15 \cdot 10 \cdot 16 + 25 \cdot 16 \cdot 25 - 25 \cdot 10 \cdot 16 - 16 \cdot 10 \cdot 25 - 15 \cdot 16 \cdot 15$

$= 2400 + 2400 + 10000 - 4000 - 4000 - 3600$

$= 3200$

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{16} & \mathbf{15} & \mathbf{25} & \mathbf{16} & \mathbf{15} \\ \mathbf{16} & \mathbf{10} & \mathbf{10} & \mathbf{16} & \mathbf{10} \\ \mathbf{16} & \mathbf{25} & \mathbf{15} & \mathbf{16} & \mathbf{25} \\ - & - & - & + \; + & + \end{array}$$

$\Rightarrow \quad \mathbf{a} \wedge \mathbf{r} = (20\,\sigma_x + 40\,\sigma_y + 12\,\sigma_z) \wedge (16\,\sigma_x + 16\,\sigma_y + 16\,\sigma_z)$

$= 320\,\sigma_x\sigma_y - 320\,\sigma_z\sigma_x - 640\,\sigma_x\sigma_y + 640\,\sigma_y\sigma_z + 192\,\sigma_z\sigma_x - 192\,\sigma_y\sigma_z$

$= -\,320\,\sigma_x\sigma_y + 448\,\sigma_y\sigma_z - 128\,\sigma_z\sigma_x$

$\mathbf{a} \wedge \mathbf{r} \wedge \mathbf{c} = (-\,320\,\sigma_x\sigma_y + 448\,\sigma_y\sigma_z - 128\,\sigma_z\sigma_x) \wedge (25\,\sigma_x + 10\,\sigma_y + 15\,\sigma_z)$

$= -\,4800\,\sigma_x\sigma_y\sigma_z + 11200\,\sigma_x\sigma_y\sigma_z - 1280\,\sigma_x\sigma_y\sigma_z$

$= 5120\,\sigma_x\sigma_y\sigma_z$

Probe mit der Regel von Sarrus:

$\det \mathbf{A} = 20 \cdot 16 \cdot 15 + 16 \cdot 10 \cdot 12 + 25 \cdot 40 \cdot 16 - 25 \cdot 16 \cdot 12 - 20 \cdot 10 \cdot 16 - 16 \cdot 40 \cdot 15$

$= 4800 + 1920 + 16000 - 4800 - 3200 - 9600$

$= 5120$

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{20} & \mathbf{16} & \mathbf{25} & \mathbf{20} & \mathbf{16} \\ \mathbf{40} & \mathbf{16} & \mathbf{10} & \mathbf{40} & \mathbf{16} \\ \mathbf{12} & \mathbf{16} & \mathbf{15} & \mathbf{12} & \mathbf{16} \\ - & - & - & + \; + & + \end{array}$$

$\Rightarrow \quad \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = -\,400\,\sigma_x\sigma_y + 880\,\sigma_y\sigma_z - 320\,\sigma_z\sigma_x \quad \leftarrow$ *siehe vorige Seite*

$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{r} = (-\,400\,\sigma_x\sigma_y + 880\,\sigma_y\sigma_z - 320\,\sigma_z\sigma_x) \wedge (16\,\sigma_x + 16\,\sigma_y + 16\,\sigma_z)$

$= -\,6400\,\sigma_x\sigma_y\sigma_z + 14080\,\sigma_x\sigma_y\sigma_z - 5120\,\sigma_x\sigma_y\sigma_z$

$= 2560\,\sigma_x\sigma_y\sigma_z$

Probe mit der Regel von Sarrus:

$\det \mathbf{A} = 20 \cdot 10 \cdot 16 + 15 \cdot 16 \cdot 12 + 16 \cdot 40 \cdot 25 - 16 \cdot 10 \cdot 12 - 20 \cdot 16 \cdot 25 - 15 \cdot 40 \cdot 16$

$= 3200 + 2880 + 16000 - 1920 - 8000 - 9600$

$= 2560$

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{20} & \mathbf{15} & \mathbf{16} & \mathbf{20} & \mathbf{15} \\ \mathbf{40} & \mathbf{10} & \mathbf{16} & \mathbf{40} & \mathbf{10} \\ \mathbf{12} & \mathbf{25} & \mathbf{16} & \mathbf{12} & \mathbf{25} \\ - & - & - & + \; + & + \end{array}$$

$$x = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c})^{-1}\,(\mathbf{r} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = \frac{3200}{12800} = 0{,}25$$

$$y = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c})^{-1}\,(\mathbf{a} \wedge \mathbf{r} \wedge \mathbf{c}) = \frac{5120}{12800} = 0{,}40$$

$$z = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c})^{-1} (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{r}) = \frac{2560}{12800} = 0{,}20$$

Probe:

$$\begin{aligned}
20 \cdot 0{,}25 + 15 \cdot 0{,}4 + 25 \cdot 0{,}2 &= 5 + 6 + 5 = 16 \\
40 \cdot 0{,}25 + 10 \cdot 0{,}4 + 10 \cdot 0{,}2 &= 10 + 4 + 2 = 16 \\
12 \cdot 0{,}25 + 25 \cdot 0{,}4 + 15 \cdot 0{,}2 &= 3 + 10 + 3 = 16
\end{aligned}$$

Mathematik und Statistik (Modul M 22)

Übungsblatt 16 – Lösungen

Aufgabe 1:

Gauß-Algorithmus – Aufgabe 1 von Übungsblatt 15:

a) $3x + 8y = 28$
$6x + 2y = 28$

$\Rightarrow$ $\mathbf{a} = 3\sigma_x + 6\sigma_y$
$\mathbf{b} = 8\sigma_x + 2\sigma_y$
$\mathbf{r} = 28\sigma_x + 28\sigma_y$

$\boxed{\mathbf{a}\,x + \mathbf{b}\,y = \mathbf{r}}$

$$\Rightarrow \underbrace{(3\sigma_x + 6\sigma_y)}_{e_x = 3\sigma_x + 6\sigma_y}x + (8\sigma_x + 2\sigma_y)y = 28\sigma_x + 28\sigma_y$$

$$\downarrow \quad \sigma_x = \frac{1}{3}e_x - 2\sigma_y$$

$$\Rightarrow e_x x + \left(\frac{8}{3}e_x - 16\sigma_y + 2\sigma_y\right)y = \frac{28}{3}e_x - 56\sigma_y + 28\sigma_y$$

$$e_x x + \underbrace{\left(\frac{8}{3}e_x - 14\sigma_y\right)}_{e_y = \frac{8}{3}e_x - 14\sigma_y}y = \frac{28}{3}e_x - 28\sigma_y$$

$$\downarrow \quad \sigma_y = \frac{4}{21}e_x - \frac{1}{14}e_y$$

$$\Rightarrow e_x x + e_y y = \frac{28}{3}e_x - \frac{112}{21}e_x + \frac{28}{14}e_y$$

$$e_x x + e_y y = 4e_x + 2e_y$$

x	y	r
3	8	28
6	2	28
1	8/3	28/3
0	– 14	– 28
1	0	4
0	1	2

$\Downarrow$

$x = 4$
$y = 2$

b) $4x + 9y = 29$
$5x + 6y = 31$

$\Rightarrow$ $\mathbf{a} = 4\sigma_x + 5\sigma_y$
$\mathbf{b} = 9\sigma_x + 6\sigma_y$
$\mathbf{r} = 29\sigma_x + 31\sigma_y$

$\boxed{\mathbf{a}\,x + \mathbf{b}\,y = \mathbf{r}}$

$$\Rightarrow \underbrace{(4\sigma_x + 5\sigma_y)}_{e_x = 4\sigma_x + 5\sigma_y}x + (9\sigma_x + 6\sigma_y)y = 29\sigma_x + 31\sigma_y$$

$$\downarrow \quad \sigma_x = \frac{1}{4}e_x - \frac{5}{4}\sigma_y$$

folgende Seite

$$\Rightarrow \quad e_x\, x + \left(\frac{9}{4}e_x - \frac{45}{4}\sigma_y + 6\,\sigma_y\right) y = \frac{29}{4}e_x - \frac{145}{4}\sigma_y + 31\,\sigma_y$$

$$e_x\, x + \underbrace{\left(\frac{9}{4}e_x - \frac{21}{4}\sigma_y\right)}_{e_y \,=\, \frac{9}{4}e_x - \frac{21}{4}\sigma_y} y = \frac{29}{4}e_x - \frac{21}{4}\sigma_y$$

$$\downarrow$$

$$\sigma_y = \frac{9}{21}e_x - \frac{4}{21}e_y$$

$$\Rightarrow \quad e_x\, x + e_y\, y = \frac{29}{4}e_x - \frac{9}{4}e_x + \frac{1}{1}e_y$$

$$e_x\, x + e_y\, y = 5\, e_x + e_y$$

x	y	r
4	9	29
5	6	31
1	9/4	29/4
0	– 21/4	– 21/4
1	0	5
0	1	1

$\Downarrow$

$x = 5$
$y = 1$

c) $6\,x + 4\,y = 6$
$2\,x + y = 3$

$\Rightarrow$ $\mathbf{a} = 6\,\sigma_x + 2\,\sigma_y$
$\mathbf{b} = 4\,\sigma_x + \sigma_y$
$\mathbf{r} = 6\,\sigma_x + 3\,\sigma_y$

$$\boxed{\mathbf{a}\,x + \mathbf{b}\,y = \mathbf{r}}$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{(6\,\sigma_x + 2\,\sigma_y)}_{e_x \,=\, 6\,\sigma_x + 2\,\sigma_y}\, x + (4\,\sigma_x + \sigma_y)\, y = 6\,\sigma_x + 3\,\sigma_y$$

$$\downarrow$$

$$\sigma_x = \frac{1}{6}e_x - \frac{1}{3}\sigma_y$$

$$\Rightarrow \quad e_x\, x + \left(\frac{2}{3}e_x - \frac{4}{3}\sigma_y + \sigma_y\right) y = e_x - 2\,\sigma_y + 3\,\sigma_y$$

$$e_x\, x + \underbrace{\left(\frac{2}{3}e_x - \frac{1}{3}\sigma_y\right)}_{e_y \,=\, \frac{2}{3}e_x - \frac{1}{3}\sigma_y} y = e_x + \sigma_y$$

$$\downarrow$$

$$\sigma_y = 2\,e_x - 3\,e_y$$

$$\Rightarrow \quad e_x\, x + e_y\, y = e_x + 2\,e_x - 3\,e_y$$

$$e_x\, x + e_y\, y = 3\,e_x - 3\,e_y$$

x	y	r
6	4	6
2	1	3
1	2/3	1
0	– 1/3	1
1	0	3
0	1	– 3

$\Downarrow$

$x = 3$
$y = -3$

d) $5\,x - 2\,y = 6$
$-2\,x - 3\,y = 28$

$\Rightarrow$ $\mathbf{a} = 5\,\sigma_x - 2\,\sigma_y$
$\mathbf{b} = -2\,\sigma_x - 3\,\sigma_y$
$\mathbf{r} = 6\,\sigma_x + 28\,\sigma_y$

$$\boxed{\mathbf{a}\,x + \mathbf{b}\,y = \mathbf{r}}$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{(5\,\sigma_x - 2\,\sigma_y)}_{e_x = 5\,\sigma_x - 2\,\sigma_y}\,x + (-2\,\sigma_x - 3\,\sigma_y)\,y = 6\,\sigma_x + 28\,\sigma_y$$

$$\downarrow$$

$$\sigma_x = \frac{1}{5}\,e_x + \frac{2}{5}\,\sigma_y$$

$$\Rightarrow \quad e_x\,x + \left(-\frac{2}{5}e_x - \frac{4}{5}\sigma_y - 3\sigma_y\right) y = \frac{6}{5}\,e_x + \frac{12}{5}\,\sigma_y + 28\,\sigma_y$$

$$e_x\,x + \underbrace{\left(-\frac{2}{5}e_x - \frac{19}{5}\sigma_y\right)}_{e_y = -\frac{2}{5}e_x - \frac{19}{5}\sigma_y} y = \frac{6}{5}\,e_x + \frac{152}{5}\,\sigma_y$$

$$\downarrow$$

$$\sigma_y = -\frac{2}{19}\,e_x - \frac{5}{19}\,e_y$$

$$\Rightarrow \quad e_x\,x + e_y\,y = \frac{6}{5}\,e_x - \frac{304}{95}\,e_x - \frac{152}{19}\,e_y$$

$$e_x\,x + e_y\,y = -2\,e_x - 8\,e_y$$

x	y	r
5	– 2	6
– 2	– 3	28
1	– 2/5	6/5
0	– 19/5	152/5
1	0	– 2
0	1	– 8

$\Downarrow$

$x = -2$
$y = -8$

Gauß-Algorithmus – Aufgabe 2 von Übungsblatt 15:

Das Lineare Gleichungssystem, das dieser Textaufgabe zugrunde liegt, entspricht dem LGS von Aufgabe 1a. Es können deshalb die Ergebnisse dieser Aufgabe übernommen werden:

$$\begin{aligned} 3\,x + 8\,y &= 28 \\ 6\,x + 2\,y &= 28 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \mathbf{a} &= 3\,\sigma_x + 6\,\sigma_y \\ \mathbf{b} &= 8\,\sigma_x + 2\,\sigma_y \\ \mathbf{r} &= 28\,\sigma_x + 28\,\sigma_y \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbf{a}\,x + \mathbf{b}\,y = \mathbf{r}}$$

$$\Rightarrow \quad (3\,\sigma_x + 6\,\sigma_y)\,x + (8\,\sigma_x + 2\,\sigma_y)\,y = 28\,\sigma_x + 28\,\sigma_y$$

$$\Rightarrow \quad e_x\,x + \left(\frac{8}{3}e_x - 14\,\sigma_y\right) y = \frac{28}{3}\,e_x - 28\,\sigma_y$$

$$\Rightarrow \quad e_x\,x + e_y\,y = 4\,e_x + 2\,e_y$$

x	y	r
3	8	28
6	8	28
1	8/3	28/3
0	– 14	– 28
1	0	4
0	1	2

$\Downarrow$

$x = 4$
$y = 2$

Es werden 4 ME des ersten Endproduktes E_1 und 2 ME des zweiten Endproduktes E_2 hergestellt, wenn 28 ME des ersten Rohstoffes R_1 und 28 ME des zweiten Rohstoffes R_2 verbraucht werden.

Gauß-Algorithmus – Aufgabe 3 von Übungsblatt 15:

$$\begin{aligned} 2x + 7y &= 2050 \\ 5x + y &= 1000 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \mathbf{a} &= 2\,\sigma_x + 5\,\sigma_y \\ \mathbf{b} &= 7\,\sigma_x + \sigma_y \\ \mathbf{r} &= 2050\,\sigma_x + 1000\,\sigma_y \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{(2\,\sigma_x + 5\,\sigma_y)}_{e_x = 2\,\sigma_x - 5\,\sigma_y}\,x + (7\,\sigma_x + \sigma_y)\,y = 2050\,\sigma_x + 1000\,\sigma_y$$

$$\sigma_x = \frac{1}{2}e_x - \frac{5}{2}\sigma_y$$

$$\Rightarrow \quad e_x\,x + \left(\frac{7}{2}e_x - \frac{35}{2}\sigma_y + \sigma_y\right)y = \frac{2050}{2}e_x - \frac{10250}{2}\sigma_y + 1000\,\sigma_y$$

$$e_x\,x + \underbrace{\left(\frac{7}{2}e_x - \frac{33}{2}\sigma_y\right)}_{e_y = \frac{7}{2}e_x - \frac{33}{2}\sigma_y}y = 1025\,e_x - 4125\,\sigma_y$$

$$\sigma_y = \frac{7}{33}e_x - \frac{2}{33}e_y$$

$$\Rightarrow \quad e_x\,x + e_y\,y = 1025\,e_x - \frac{28875}{33}e_x + \frac{8250}{33}e_y$$

$$e_x\,x + e_y\,y = 150\,e_x + 250\,e_y$$

x	y	r
2	7	2050
5	1	1000
1	3,5	1025
0	– 16,5	– 4125
1	0	150
0	1	250

$\Downarrow$

$x = 150$
$y = 250$

Es werden 150 ME des ersten Endproduktes E_1 und 250 ME des zweiten Endproduktes E_2 hergestellt, wenn 2050 ME des ersten Rohstoffes R_1 und 1000 ME des zweiten Rohstoffes R_2 verbraucht werden.

Gauß-Algorithmus – Aufgabe 4 von Übungsblatt 15:

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{P}} = \underbrace{\begin{array}{cc} \text{1. Quartal} & \text{2. Quartal} \\ \downarrow & \downarrow \\ \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} 33000 & 32000 \\ 38000 & 25000 \end{pmatrix}} \end{array}}_{\mathbf{R}}$$

R .... Matrix des quartalsweisen Rohstoffbedarfs (Rohstoffbedarfsmatrix)

P .... Matrix der quartalsweisen Produktion (Produktionsmatrix)

$$\begin{aligned} 4x_1 + 3y_1 &= 33000 \\ x_1 + 5y_1 &= 38000 \end{aligned} \quad \text{und} \quad \begin{aligned} 4x_2 + 3y_2 &= 33000 \\ x_2 + 5y_2 &= 38000 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \mathbf{a} &= 4\,\sigma_x + \sigma_y \\ \mathbf{b} &= 3\,\sigma_x + 5\,\sigma_y \\ \mathbf{r_1} &= 33000\,\sigma_x + 38000\,\sigma_y \\ \mathbf{r_2} &= 32000\,\sigma_x + 25000\,\sigma_y \end{aligned}$$

Die beiden Gleichungen $(4\,\sigma_x + \sigma_y)\,x_1 + (3\,\sigma_x + 5\,\sigma_y)\,y_1 = 33000\,\sigma_x + 38000\,\sigma_y$
$(4\,\sigma_x + \sigma_y)\,x_2 + (3\,\sigma_x + 5\,\sigma_y)\,y_2 = 32000\,\sigma_x + 25000\,\sigma_y$

werden im Folgenden in moderat illegitimer Schreibweise zusammengefasst:

$$\Rightarrow\quad \underbrace{(4\,\sigma_x + \sigma_y)}_{e_x = 4\,\sigma_x + \sigma_y}\,x + (3\,\sigma_x + 5\,\sigma_y)\,y = 33000\,\sigma_x + 38000\,\sigma_y \underset{\text{bzw.}}{=} 32000\,\sigma_x + 25000\,\sigma_y$$

$$\downarrow\quad \sigma_x = \frac{1}{4}\,e_x - \frac{1}{4}\,\sigma_y$$

$$\Rightarrow\quad e_x\,x + \left(\frac{3}{4}e_x - \frac{3}{4}\sigma_y + 5\sigma_y\right) y = \frac{33000}{4}\,e_x - \frac{33000}{4}\,\sigma_y + 38000\,\sigma_y \underset{\text{bzw.}}{=} \frac{32000}{4}\,e_x - \frac{32000}{4}\,\sigma_y + 25000\,\sigma_y$$

$$e_x\,x + \underbrace{\left(\frac{3}{4}e_x + \frac{17}{4}\sigma_y\right)}_{e_y = \frac{3}{4}e_x + \frac{17}{4}\sigma_y} y = 8250\,e_x + 29750\,\sigma_y \underset{\text{bzw.}}{=} 8000\,e_x + 17000\,\sigma_y$$

$$\downarrow\quad \sigma_y = -\frac{3}{17}\,e_x + \frac{4}{17}\,e_y$$

$$\Rightarrow\quad e_x\,x + e_y\,y = 8250\,e_x - \frac{89250}{17}\,e_x + \frac{119000}{17}\,e_y \underset{\text{bzw.}}{=} 8000\,e_x - \frac{51000}{17}\,e_x - \frac{68000}{17}\,e_y$$

$$e_x\,x + e_y\,y = 3000\,e_x + 7000\,e_y \underset{\text{bzw.}}{=} 5000\,e_x + 4000\,e_y$$

x	y	r_1	r_2
4	3	33000	32000
1	5	38000	25000
1	0,75	8250	8000
0	4,25	29750	17000
1	0	3000	5000
0	1	7000	4000

$\Downarrow$ $\Downarrow$

$x_1 = 3000$ $x_2 = 5000$

$y_1 = 7000$ $y_2 = 4000$

$\Rightarrow$ Die Matrix der quartalsweisen Produktion lautet: $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 3000 & 5000 \\ 7000 & 4000 \end{pmatrix}$

Im ersten Quartal werden somit 3000 ME des ersten Endproduktes E_1 und 7000 ME des zweiten Endproduktes E_2 hergestellt.

Im zweiten Quartal werden dann 5000 ME des ersten Endproduktes E_1 und 4000 ME des zweiten Endproduktes E_2 hergestellt.

Gauß-Algorithmus – Aufgabe 5 von Übungsblatt 15:

$$\underbrace{\begin{pmatrix}9&3\\2&2\end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_1&y_2&y_3\end{pmatrix}}_{B}=\underbrace{\begin{pmatrix}48&21&84\\12&14&32\end{pmatrix}}_{G}$$

G .... Gesamtbedarfsmatrix

B .... Bedarfsmatrix des zweiten Produktionsschritts

A .... Bedarfsmatrix des ersten Produktionsschritts

$$\begin{matrix}9\,x_1+3\,y_1=48\\2\,x_1+2\,y_1=12\end{matrix}\quad\text{und}\quad\begin{matrix}9\,x_2+3\,y_2=21\\2\,x_2+2\,y_2=14\end{matrix}\quad\text{und}\quad\begin{matrix}9\,x_3+3\,y_3=84\\2\,x_3+2\,y_3=32\end{matrix}\quad\left\{\begin{matrix}\mathbf{a}=9\,\sigma_x+2\,\sigma_y\\\mathbf{b}=3\,\sigma_x+2\,\sigma_y\\\mathbf{r_1}=48\,\sigma_x+12\,\sigma_y\\\mathbf{r_2}=21\,\sigma_x+14\,\sigma_y\\\mathbf{r_3}=84\,\sigma_x+32\,\sigma_y\end{matrix}\right.$$

$$\Rightarrow\quad\underbrace{(9\,\sigma_x+2\,\sigma_y)}_{e_x\,=\,9\,\sigma_x+2\,\sigma_y}\,x+(3\,\sigma_x+2\,\sigma_y)\,y=48\,\sigma_x+12\,\sigma_y\underset{\text{bzw.}}{=}21\,\sigma_x+14\,\sigma_y\underset{\text{bzw.}}{=}84\,\sigma_x+32\,\sigma_y$$

$$\downarrow$$

$$\sigma_x=\frac{1}{9}e_x-\frac{2}{9}\sigma_y$$

$$\Rightarrow\quad e_x\,x+\left(\frac{3}{9}e_x-\frac{6}{9}\sigma_y+2\,\sigma_y\right)y=\frac{48}{9}e_x-\frac{96}{9}\sigma_y+12\,\sigma_y\underset{\text{bzw.}}{=}\frac{21}{9}e_x-\frac{42}{9}\sigma_y+14\,\sigma_y\underset{\text{bzw.}}{=}\frac{84}{9}e_x-\frac{168}{9}\sigma_y+32\,\sigma_y$$

$$e_x\,x+\underbrace{\left(\frac{1}{3}e_x+\frac{4}{3}\sigma_y\right)}_{e_y\,=\,\frac{1}{3}e_x+\frac{4}{3}\sigma_y}y=\frac{16}{3}e_x+\frac{4}{3}\sigma_y\underset{\text{bzw.}}{=}\frac{7}{3}e_x+\frac{28}{3}\sigma_y\underset{\text{bzw.}}{=}\frac{28}{3}e_x+\frac{40}{3}\sigma_y$$

$$\downarrow$$

$$\sigma_y=-\frac{1}{4}e_x+\frac{3}{4}e_y$$

$$\Rightarrow\quad e_x\,x+e_y\,y=\frac{16}{3}e_x-\frac{1}{3}e_x+\frac{3}{3}e_y\underset{\text{bzw.}}{=}\frac{7}{3}e_x-\frac{7}{3}e_x+\frac{21}{3}\sigma_y\underset{\text{bzw.}}{=}\frac{28}{3}e_x-\frac{10}{3}e_x+\frac{30}{3}e_y$$

$$e_x\,x+e_y\,y=5\,e_x+e_y\underset{\text{bzw.}}{=}7\,e_y\underset{\text{bzw.}}{=}6\,e_x+10\,e_y$$

x	y	r_1	r_2	r_3
9	3	48	21	84
2	2	12	14	32
1	1/3	16/3	7/3	28/3
0	4/3	4/3	28/3	40/3
1	0	5	0	6
0	1	1	7	10

$$\begin{array}{ccc} \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow \\ x_1 = 5 & x_2 = 0 & x_3 = 6 \\ y_1 = 1 & y_2 = 7 & y_3 = 10 \end{array}$$

$\Rightarrow$ Die Zwischenbedarfsmatrix lautet: $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 6 \\ 1 & 7 & 10 \end{pmatrix}$

Gauß-Algorithmus – Aufgabe 7 von Übungsblatt 15:

Die Bezeichnung der Elemente x_i und y_i folgt im Hinblick auf die anstehende Transposition bereits der transponierten Schreibung.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} 9 & 3 & 7 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}}_{\mathbf{B}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 48 & 36 & 74 \\ 47 & 17 & 39 \end{pmatrix}}_{\mathbf{G}}$$

G .... Gesamtbedarfsmatrix

B .... Bedarfsmatrix des zweiten Produktionsschritts

A .... Bedarfsmatrix des ersten Produktionsschritts

$\mathbf{A\,B} = \mathbf{G} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{B^T\,A^T} = \mathbf{G^T}$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 3 & 2 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}}_{\mathbf{B^T}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A^T}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 48 & 47 \\ 36 & 17 \\ 74 & 39 \end{pmatrix}}_{\mathbf{G^T}}$$

$$\begin{array}{lcl} 9\,x_1 + 2\,y_1 = 48 & \text{und} & 9\,x_2 + 2\,y_2 = 47 \\ 3\,x_1 + 2\,y_1 = 36 & & 3\,x_2 + 2\,y_2 = 17 \\ 7\,x_1 + 4\,y_1 = 74 & & 7\,x_2 + 4\,y_2 = 39 \end{array} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{a} = 9\,\sigma_x + 3\,\sigma_y + 7\,\sigma_z \\ \mathbf{b} = 2\,\sigma_x + 2\,\sigma_y + 4\,\sigma_z \\ \mathbf{r_1} = 48\,\sigma_x + 36\,\sigma_y + 74\,\sigma_z \\ \mathbf{r_2} = 47\,\sigma_x + 17\,\sigma_y + 39\,\sigma_z \end{array} \right.$$

$$\boxed{\mathbf{a}\,x + \mathbf{b}\,y = \mathbf{r_1} \underset{\text{bzw.}}{\mp} \mathbf{r_2}}$$

$$\Rightarrow \underbrace{(9\,\sigma_x + 3\,\sigma_y + 7\,\sigma_z)}_{e_x = 9\,\sigma_x + 3\,\sigma_y + 7\,\sigma_z} x + (2\,\sigma_x + 2\,\sigma_y + 4\,\sigma_z)\,y = 48\,\sigma_x + 36\,\sigma_y + 74\,\sigma_z \underset{\text{bzw.}}{\mp} 47\,\sigma_x + 17\,\sigma_y + 39\,\sigma_z$$

$$\downarrow$$

$$\sigma_x = \frac{1}{9}e_x - \frac{1}{3}\sigma_y - \frac{7}{9}\sigma_z$$

$$\Rightarrow \quad e_x\,x + \left(\frac{2}{9}e_x - \frac{2}{3}\sigma_y - \frac{14}{9}\sigma_z + 2\,\sigma_y + 4\,\sigma_z\right) y = \frac{48}{9}e_x - \frac{48}{3}\sigma_y - \frac{336}{9}\sigma_z + 36\,\sigma_y + 74\,\sigma_z$$

$$\underset{\text{bzw.}}{\mp} \frac{47}{9}e_x - \frac{47}{3}\sigma_y - \frac{329}{9}\sigma_z + 17\,\sigma_y + 39\,\sigma_z$$

$$e_x\,x + \underbrace{\left(\frac{2}{9}e_x + \frac{4}{3}\sigma_y + \frac{22}{9}\sigma_z\right)}_{e_y} y = \frac{16}{3}e_x + 20\,\sigma_y + \frac{110}{3}\sigma_z \underset{\text{bzw.}}{\mp} \frac{47}{9}e_x + \frac{4}{3}\sigma_y + \frac{22}{9}\sigma_z$$

$$e_y = \frac{2}{9}\,e_x + \frac{4}{3}\,\sigma_y + \frac{22}{9}\,\sigma_z$$

$$\downarrow$$

$$\sigma_y = -\,\frac{1}{6}\,e_x + \frac{3}{4}\,e_y - \frac{11}{6}\,\sigma_z$$

$$\Rightarrow \quad e_x\,x + e_y\,y = \frac{16}{3}\,e_x - \frac{20}{6}\,e_x + \frac{60}{4}\,e_y - \frac{220}{6}\,\sigma_z + \frac{110}{3}\,\sigma_z \;\underset{\text{bzw.}}{\top}\; \frac{47}{9}\,e_x - \frac{4}{18}\,e_x + \frac{12}{12}\,e_y - \frac{44}{18}\,\sigma_z + \frac{22}{9}\,\sigma_z$$

$$e_x\,x + e_y\,y = 2\,e_x + 15\,e_y \;\underset{\text{bzw.}}{\top}\; 5\,e_x + e_y$$

x	y	r_1	r_2
9	2	48	47
3	2	36	17
7	4	74	39
1	2/9	16/3	47/9
0	4/3	20	4/3
0	22/9	110/3	22/9
1	0	2	5
0	1	15	1
0	0	0	0

$\Rightarrow$ $x_1 = 2 \quad x_2 = 5$

$y_1 = 15 \quad y_2 = 1$

z_1, z_2 existieren nicht.

$\Rightarrow$ Die Transponierte der Bedarfsmatrix des ersten Produktionsschrittes lautet: $\mathbf{A}^{\mathbf{T}} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 15 & 1 \end{pmatrix}$

Damit lautet die Bedarfsmatrix des ersten Produktionsschrittes: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 15 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$

Eine etwas komplexere Lösung dieser Aufgabe erhält man mit Hilfe eines Vergleichs mit den bisherigen Aufgaben:

Aufgabe 5: Die Zwischenbedarfsmatrix B wurde gesucht.

A	**G**
$\downarrow$	$\downarrow$
E	$\mathbf{B = A^{-1}\,G}$

Aufgabe 7: Jetzt wird die Bedarfsmatrix A des ersten Produktionsschrittes gesucht.

E	**B**
$\downarrow$	$\downarrow$
$\mathbf{G\,B^{-1} = A}$	**G**

⇒ Der Gauß-Algorithmus muss in umgekehrter Reihenfolge durchlaufen werden. Das ist nicht unbedingt einfach, da die beiden ersten Elemente der ersten Zeile 9 und 3 mit dem Vielfachen der zweiten Zeile so addiert werden müssen, dass Ihr Verhältnis dann 48 zu 36 entspricht:

Ziel: 48 : 36 = 4 : 3 = 1,3333...

erste Zeile:	9	3	7					9 : 3 = 3
				+ zweite Zeile	2	2	4	
neue erste Zeile:	11	5	11					11 : 5 = 2,2
				+ zweite Zeile	2	2	4	
neue erste Zeile:	13	7	15					13 : 7 = 1,8571
				+ zweite Zeile	2	2	4	
neue erste Zeile:	15	9	19					15 : 9 = 1,6667
				+ zweite Zeile	2	2	4	
neue erste Zeile:	17	11	23					17 : 11 = 1,5455
				+ zweite Zeile	2	2	4	
neue erste Zeile:	19	13	27					19 : 13 = 1,4615
				+ zweite Zeile	2	2	4	
neue erste Zeile:	21	15	31					21 : 15 = 1,4
				+ zweite Zeile	2	2	4	
neue erste Zeile:	**23**	**17**	**35**					**23 : 17 = 1,3529**
				+ zweite Zeile	2	2	4	
neue erste Zeile:	25	19	39					**25 : 19 = 1,3158**
				+ zweite Zeile	2	2	4	
neue erste Zeile:	27	21	43					27 : 21 = 1,2857

neue erste Zeile:	**23**	**17**	**35**					**23 : 17 = 1,3529**
				$+\frac{1}{2}$ zweite Zeile	1	1	2	
neue erste Zeile:	**24**	**18**	**37**					**24 : 18 = 1,3333...**

(Ein ähnlicher Verhältnisvergleich spielt auch bei der linearen Optimierung eine mathematisch wichtige Rolle.)

	x	y	r_1	r_2	r_3	
	1	0	9	3	7	
	0	1	2	2	4	
neue erste Zeile:	1	15/2	**24**	**18**	**37**	← **alte 1. Zeile + 7,5 × 2. Zeile**
	0	1	2	2	4	
	2	15	48	36	74	← **2 × mittlere 1. Zeile**
neue zweite Zeile:	5	1	47	17	39	← **5 × mittlere 1. Zeile – 36,5 × 2. Zeile**

Gauß-Algorithmus – Aufgabe 8 von Übungsblatt 15:

a) $$\begin{aligned} 9x + 2y + 3z &= 66 \\ 5x + y &= 21 \\ 2x + y + 4z &= 48 \end{aligned} \quad\Rightarrow\quad \begin{pmatrix} 9 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 66 \\ 21 \\ 48 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ $\mathbf{a} = 9\,\sigma_x + 5\,\sigma_y + 2\,\sigma_z$

$\mathbf{b} = 2\,\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$

$\mathbf{c} = 3\,\sigma_x + 4\,\sigma_z$

$\mathbf{r} = 66\,\sigma_x + 21\,\sigma_y + 48\,\sigma_z$

$$\boxed{\mathbf{a}\,x + \mathbf{b}\,y + \mathbf{c}\,z = \mathbf{r}}$$

$$\Rightarrow\quad \underbrace{(9\,\sigma_x + 5\,\sigma_y + 2\,\sigma_z)}_{e_x = 9\,\sigma_x + 5\,\sigma_y + 2\,\sigma_z}\,x + (2\,\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)\,y + (3\,\sigma_x + 4\,\sigma_z)\,z = 66\,\sigma_x + 21\,\sigma_y + 48\,\sigma_z$$

$$\sigma_x = \frac{1}{9}e_x - \frac{5}{9}\sigma_y - \frac{2}{9}\sigma_z$$

$$\Rightarrow\quad e_x\,x + \left(\frac{2}{9}e_x - \frac{10}{9}\sigma_y - \frac{4}{9}\sigma_z + \sigma_y + \sigma_z\right)y + \left(\frac{3}{9}e_x - \frac{15}{9}\sigma_y - \frac{6}{9}\sigma_z + 4\,\sigma_z\right)z$$

$$= \frac{66}{9}e_x - \frac{330}{9}\sigma_y - \frac{132}{9}\sigma_z + 21\,\sigma_y + 48\,\sigma_z$$

$$e_x\,x + \underbrace{\left(\frac{2}{9}e_x - \frac{1}{9}\sigma_y + \frac{5}{9}\sigma_z\right)}_{e_y = \frac{2}{9}e_x - \frac{1}{9}\sigma_y + \frac{5}{9}\sigma_z}y + \left(\frac{1}{3}e_x - \frac{5}{3}\sigma_y + \frac{10}{3}\sigma_z\right)z = \frac{22}{3}e_x - \frac{47}{3}\sigma_y + \frac{100}{3}\sigma_z$$

$$\sigma_y = 2\,e_x - 9\,e_y + 5\,\sigma_z$$

$$\Rightarrow\quad e_x\,x + e_y\,y + \left(\frac{1}{3}e_x - \frac{10}{3}e_x + \frac{45}{3}e_y - \frac{25}{3}\sigma_z + \frac{10}{3}\sigma_z\right)z = \frac{22}{3}e_x - \frac{94}{3}e_x + \frac{423}{3}e_y - \frac{235}{3}\sigma_z + \frac{100}{3}\sigma_z$$

$$e_x\,x + e_y\,y + \underbrace{(-\,3\,e_x + 15\,e_y - 5\,\sigma_z)}_{e_z = -\,3\,e_x + 15\,e_y - 5\,\sigma_z}\,z = -\,24\,e_x + 141\,e_y - 45\,\sigma_z$$

$$\sigma_z = -\frac{3}{5}e_x + 3\,e_y - \frac{1}{5}e_z$$

$$\Rightarrow\quad e_x\,x + e_y\,y + e_z\,z = -\,24\,e_x + 141\,e_y + \frac{135}{5}e_x - 135\,e_y + \frac{45}{5}e_z$$

$$e_x\,x + e_y\,y + e_z\,z = 3\,e_x + 6\,e_y + 9\,e_z$$

x	y	z	r
9	2	3	66
5	1	0	21
2	1	4	48
1	2/9	1/3	22/3
0	– 1/9	– 5/3	47/3
0	5/9	10/3	100/3
1	0	– 3	– 24
0	1	15	141
0	0	– 5	– 45
1	0	0	3
0	1	0	6
0	0	1	9

$\Rightarrow \quad x = 3, \; y = 6, \; z = 9$

b) $$\begin{aligned} 20\,x + 15\,y + 25\,z &= 16 \\ 40\,x + 10\,y + 10\,z &= 16 \\ 12\,x + 25\,y + 15\,z &= 16 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 20 & 15 & 25 \\ 40 & 10 & 10 \\ 12 & 25 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 16 \\ 16 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} \mathbf{a} &= 20\,\sigma_x + 40\,\sigma_y + 12\,\sigma_z \\ \mathbf{b} &= 15\,\sigma_x + 10\,\sigma_y + 25\,\sigma_z \\ \mathbf{c} &= 25\,\sigma_x + 10\,\sigma_y + 15\,\sigma_z \\ \mathbf{r} &= 16\,\sigma_x + 16\,\sigma_y + 16\,\sigma_z \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbf{a}\,x + \mathbf{b}\,y + \mathbf{c}\,z = \mathbf{r}}$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{(20\,\sigma_x + 40\,\sigma_y + 12\,\sigma_z)}_{e_x = 20\,\sigma_x + 40\,\sigma_y + 12\,\sigma_z}\,x + (15\,\sigma_x + 10\,\sigma_y + 25\,\sigma_z)\,y + (25\,\sigma_x + 10\,\sigma_y + 15\,\sigma_z)\,z = 16\,\sigma_x + 16\,\sigma_y + 16\,\sigma_z$$

$$\sigma_x = \frac{1}{20}\,e_x - 2\,\sigma_y - \frac{3}{5}\,\sigma_z = 0{,}05\,e_x - 2\,\sigma_y - 0{,}6\,\sigma_z$$

$$\Rightarrow \quad e_x\,x + (0{,}75\,e_x - 30\,\sigma_y - 9\,\sigma_z + 10\,\sigma_y + 25\,\sigma_z)\,y + (1{,}25\,e_x - 50\,\sigma_y - 15\,\sigma_z + 10\,\sigma_y + 15\,\sigma_z)\,z$$
$$= 0{,}8\,e_x - 32\,\sigma_y - 9{,}6\,\sigma_z + 16\,\sigma_y + 16\,\sigma_z$$

$$e_x\,x + \underbrace{(0{,}75\,e_x - 20\,\sigma_y + 16\,\sigma_z)}_{e_y = 0{,}75\,e_x - 20\,\sigma_y + 16\,\sigma_z}\,y + (1{,}25\,e_x - 40\,\sigma_y)\,z = 0{,}8\,e_x - 16\,\sigma_y + 6{,}4\,\sigma_z$$

$$\downarrow$$
$$\sigma_y$$

$$\sigma_y = \frac{3}{80} e_x - \frac{1}{20} e_y + \frac{4}{5} \sigma_z = 0{,}0375\, e_x - 0{,}05\, e_y + 0{,}8\, \sigma_z$$

$\Rightarrow$ $e_x\, x + e_y\, y + (1{,}25\, e_x - 1{,}5\, e_x + 2\, e_y - 32\, \sigma_z)\, z = 0{,}8\, e_x - 0{,}6\, e_x + 0{,}8\, e_y - 12{,}8\, \sigma_z + 6{,}4\, \sigma_z$

$$e_x\, x + e_y\, y + \underbrace{(-0{,}25\, e_x + 2\, e_y - 32\, \sigma_z)}_{e_z = -0{,}25\, e_x + 2\, e_y - 32\, \sigma_z}\, z = 0{,}2\, e_x + 0{,}8\, e_y - 6{,}4\, \sigma_z$$

$$\downarrow$$

$$\sigma_z = -\frac{1}{128} e_x + \frac{1}{16} e_y - \frac{1}{32} e_z$$
$$= -0{,}0078125\, e_x + 0{,}0625\, e_y - 0{,}03125\, e_z$$

$\Rightarrow$ $e_x\, x + e_y\, y + e_z\, z = 0{,}2\, e_x + 0{,}8\, e_y + 0{,}05\, e_x - 0{,}4\, e_y + 0{,}2\, e_z$

$e_x\, x + e_y\, y + e_z\, z = 0{,}25\, e_x + 0{,}4\, e_y + 0{,}2\, e_z$

x	y	z	r
20	15	25	16
40	10	10	16
12	25	15	16
1	0,75	1,2	0,8
0	– 20	– 40	– 16
0	16	0	6,4
1	0	– 0,25	0,2
0	1	2	0,8
0	0	– 32	– 6,4
1	0	0	0,25
0	1	0	0,4
0	0	1	0,2

$\Rightarrow$ x = 0,25
y = 0,40
z = 0,20

Aufgabe 2:

Inverse Matrizen & Gauß-Algorithmus – Aufgabe 1 von Übungsblatt 15:

a) $3x + 8y = 28$, $6x + 2y = 28$ $\Rightarrow$ $\mathbf{a} = 3\sigma_x + 6\sigma_y$, $\mathbf{b} = 8\sigma_x + 2\sigma_y$, $\mathbf{r_1} = \sigma_x$, $\mathbf{r_2} = \sigma_y$

$\mathbf{a}\,x + \mathbf{b}\,y = \mathbf{r_1} \mp \mathbf{r_2}$ bzw.

x	y	$\mathbf{r_1}$	$\mathbf{r_2}$
3	8	1	0
6	2	0	1
1	8/3	1/3	0
0	– 14	– 2	1
1	0	– 1/21	4/21
0	1	1/7	– 1/14

$\Downarrow$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{42}\begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \underbrace{(3\sigma_x + 6\sigma_y)}_{e_x = 3\sigma_x + 6\sigma_y}\,x + (8\sigma_x + 2\sigma_y)\,y = \sigma_x \mp \sigma_y \text{ bzw.}$$

$$\sigma_x = \frac{1}{3}e_x - 2\sigma_y$$

$$\Rightarrow e_x\,x + \left(\frac{8}{3}e_x - 16\sigma_y + 2\sigma_y\right) y = \frac{1}{3}e_x - 2\sigma_y \mp \sigma_y \text{ bzw.}$$

$$e_x\,x + \underbrace{\left(\frac{8}{3}e_x - 14\sigma_y\right)}_{e_y = \frac{8}{3}e_x - 14\sigma_y} y = \frac{1}{3}e_x - 2\sigma_y \mp \sigma_y \text{ bzw.}$$

$$\sigma_y = \frac{4}{21}e_x - \frac{1}{14}e_y$$

$$\Rightarrow e_x\,x + e_y\,y = \frac{1}{3}e_x - \frac{8}{21}e_x + \frac{2}{14}e_y \mp \frac{4}{21}e_x - \frac{1}{14}e_y \text{ bzw.}$$

$$e_x\,x + e_y\,y = -\frac{1}{21}e_x + \frac{1}{7}e_y \mp \frac{4}{21}e_x - \frac{1}{14}e_y \text{ bzw.}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{-1}\begin{pmatrix} 28 \\ 28 \end{pmatrix} = \frac{1}{42}\begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 28 \\ 28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad x = 4 \quad y = 2$$

b) $4x + 9y = 29$, $5x + 6y = 31$ $\Rightarrow$ $\mathbf{a} = 4\sigma_x + 5\sigma_y$, $\mathbf{b} = 9\sigma_x + 6\sigma_y$, $\mathbf{r_1} = \sigma_x$, $\mathbf{r_2} = \sigma_y$

$\mathbf{a}\,x + \mathbf{b}\,y = \mathbf{r_1} \mp \mathbf{r_2}$ bzw.

$$\Rightarrow \underbrace{(4\sigma_x + 5\sigma_y)}_{e_x = 4\sigma_x + 5\sigma_y}\,x + (9\sigma_x + 6\sigma_y)\,y = \sigma_x \mp \sigma_y \text{ bzw.}$$

$$\sigma_x = \frac{1}{4}e_x - \frac{5}{4}\sigma_y$$

folgende Seite

$$\Rightarrow \quad e_x\, x + \left(\frac{9}{4} e_x - \frac{45}{4}\sigma_y + 6\,\sigma_y\right) y = \frac{1}{4} e_x - \frac{5}{4}\sigma_y \mp \sigma_y \text{ bzw.}$$

$$e_x\, x + \underbrace{\left(\frac{9}{4} e_x - \frac{21}{4}\sigma_y\right)}_{e_y = \frac{9}{4} e_x - \frac{21}{4}\sigma_y} y = \frac{1}{4} e_x - \frac{5}{4}\sigma_y \mp \sigma_y \text{ bzw.}$$

$$\downarrow \quad \sigma_y = \frac{9}{21} e_x - \frac{4}{21} e_y$$

$$\Rightarrow \quad e_x\, x + e_y\, y = \frac{1}{4} e_x - \frac{45}{84} e_x + \frac{20}{84} e_y \mp \frac{9}{21} e_x - \frac{4}{21} e_y \text{ bzw.}$$

$$e_x\, x + e_y\, y = -\frac{6}{21} e_x + \frac{5}{21} e_y \mp \frac{9}{21} e_x - \frac{4}{21} e_y \text{ bzw.}$$

x	y	$\mathbf{r_1}$	$\mathbf{r_2}$
4	9	1	0
5	6	0	1
1	9/4	1/4	0
0	– 21/4	– 5/4	1
1	0	– 6/21	9/21
0	1	5/21	– 4/21

$\Downarrow$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{21}\begin{pmatrix} -6 & 9 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{-1}\begin{pmatrix} 29 \\ 31 \end{pmatrix} = \frac{1}{21}\begin{pmatrix} -6 & 9 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 29 \\ 31 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad x = 5 \qquad y = 1$$

c) $\begin{aligned} 6\,x + 4\,y &= 6 \\ 2\,x + \,y &= 3 \end{aligned}$ $\quad \Rightarrow \quad \mathbf{a} = 6\,\sigma_x + 2\,\sigma_y \qquad \mathbf{a}\,x + \mathbf{b}\,y = \mathbf{r_1} \mp \mathbf{r_2}$ bzw.

$\mathbf{b} = 4\,\sigma_x + \sigma_y$

$\mathbf{r_1} = \sigma_x \qquad \mathbf{r_2} = \sigma_y$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{(6\,\sigma_x + 2\,\sigma_y)}_{e_x = 6\,\sigma_x + 2\,\sigma_y} x + (4\,\sigma_x + \sigma_y)\, y = \sigma_x \mp \sigma_y \text{ bzw.}$$

$$\downarrow \quad \sigma_x = \frac{1}{6} e_x - \frac{1}{3}\sigma_y$$

$$\Rightarrow \quad e_x\, x + \left(\frac{2}{3} e_x - \frac{4}{3}\sigma_y + \sigma_y\right) y = \frac{1}{6} e_x - \frac{1}{3}\sigma_y \mp \sigma_y \text{ bzw.}$$

$$e_x\, x + \underbrace{\left(\frac{2}{3} e_x - \frac{1}{3}\sigma_y\right)}_{e_y = \frac{2}{3} e_x - \frac{1}{3}\sigma_y} y = \frac{1}{6} e_x - \frac{1}{3}\sigma_y \mp \sigma_y \text{ bzw.}$$

$$\downarrow \quad \sigma_y = 2\,e_x - 3\,e_y$$

$$\Rightarrow \quad e_x\, x + e_y\, y = \frac{1}{6} e_x - \frac{2}{3} e_x + \frac{3}{3} e_y \mp 2\,e_x - 3\,e_y \text{ bzw.}$$

$$e_x\, x + e_y\, y = -\frac{1}{2} e_x + 1\,e_y \mp 2\,e_x - 3\,e_y \text{ bzw.}$$

x	y	$\mathbf{r_1}$	$\mathbf{r_2}$
6	4	1	0
2	1	0	1
1	2/3	1/6	0
0	– 1/3	– 1/3	1
1	0	– 1/2	2
0	1	1	– 3

$\Downarrow$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -0{,}5 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{-1}\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}5 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad x = 3 \qquad y = -3$$

d) $\begin{aligned} 5x - 2y &= 6 \\ -2x - 3y &= 28 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \mathbf{a} &= 5\sigma_x - 2\sigma_y \\ \mathbf{b} &= -2\sigma_x - 3\sigma_y \end{aligned} \qquad \mathbf{a}\,x + \mathbf{b}\,y = \mathbf{r_1} \underset{\text{bzw.}}{\mp} \mathbf{r_2}$

$\mathbf{r_1} = \sigma_x \qquad \mathbf{r_2} = \sigma_y$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{(5\sigma_x - 2\sigma_y)}_{e_x = 5\sigma_x - 2\sigma_y}\, x + (-2\sigma_x - 3\sigma_y)\, y = \sigma_x \underset{\text{bzw.}}{\mp} \sigma_y$$

$$e_x = 5\sigma_x - 2\sigma_y \;\Big\downarrow\; \sigma_x = \frac{1}{5}e_x + \frac{2}{5}\sigma_y$$

$$\Rightarrow \quad e_x\, x + \left(-\frac{2}{5}e_x - \frac{4}{5}\sigma_y - 3\sigma_y\right) y = \frac{1}{5}e_x + \frac{2}{5}\sigma_y \underset{\text{bzw.}}{\mp} \sigma_y$$

$$e_x\, x + \underbrace{\left(-\frac{2}{5}e_x - \frac{19}{5}\sigma_y\right)}_{e_y = -\frac{2}{5}e_x - \frac{19}{5}\sigma_y} y = \frac{1}{5}e_x + \frac{2}{5}\sigma_y \underset{\text{bzw.}}{\mp} \sigma_y$$

$$e_y = -\frac{2}{5}e_x - \frac{19}{5}\sigma_y \;\Big\downarrow\; \sigma_y = -\frac{2}{19}e_x - \frac{5}{19}e_y$$

$$\Rightarrow \quad e_x\, x + e_y\, y = \frac{1}{5}e_x - \frac{4}{95}e_x - \frac{10}{95}e_y \underset{\text{bzw.}}{\mp} -\frac{2}{19}e_x - \frac{5}{19}e_y$$

$$e_x\, x + e_y\, y = \frac{3}{19}e_x - \frac{2}{19}e_y \underset{\text{bzw.}}{\mp} -\frac{2}{19}e_x - \frac{5}{19}e_y$$

x	y	$\mathbf{r_1}$	$\mathbf{r_2}$
5	– 2	1	0
– 2	– 3	0	1
1	– 2/5	1/5	0
0	– 19/5	2/5	1
1	0	3/19	– 2/19
0	1	– 2/19	– 5/19

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{19}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{-1}\begin{pmatrix} 6 \\ 28 \end{pmatrix} = \frac{1}{19}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -8 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad x = -2 \qquad y = -8$$

Inverse Matrizen & Gauß-Algorithmus – Aufgabe 2 von Übungsblatt 15:

Das Lineare Gleichungssystem, das dieser Textaufgabe zugrunde liegt, entspricht dem LGS von Aufgabe 1a. Es können deshalb die Ergebnisse dieser Aufgabe übernommen werden:

a) $\begin{aligned} 3x + 8y &= 28 \\ 6x + 2y &= 28 \end{aligned} \qquad \mathbf{a}\,x + \mathbf{b}\,y = \mathbf{r_1} \underset{\text{bzw.}}{\mp} \mathbf{r_2}$

$$\Rightarrow \quad (3\sigma_x + 6\sigma_y)\, x + (8\sigma_x + 2\sigma_y)\, y = \sigma_x \underset{\text{bzw.}}{\mp} \sigma_y$$

$$\Rightarrow \quad e_x\, x + \left(\frac{8}{3}e_x - 14\sigma_y\right) y = \frac{1}{3}e_x - 2\sigma_y \underset{\text{bzw.}}{\mp} \sigma_y$$

$$\Rightarrow \quad e_x\, x + e_y\, y = -\frac{1}{21}e_x + \frac{1}{7}e_y \underset{\text{bzw.}}{\mp} \frac{4}{21}e_x - \frac{1}{14}e_y$$

x	y	$\mathbf{r_1}$	$\mathbf{r_2}$
3	8	1	0
6	2	0	1
1	8/3	1/3	0
0	– 14	– 2	1
1	0	– 1/21	4/21
0	1	1/7	– 1/14

$$\Rightarrow \quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -1/21 & 4/21 \\ 1/7 & -1/14 \end{pmatrix} = \frac{1}{42}\begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{-1}\begin{pmatrix} 28 \\ 28 \end{pmatrix} = \frac{1}{42}\begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 28 \\ 28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad x = 4 \qquad y = 2$$

Es werden 4 ME des ersten Endproduktes E_1 und 2 ME des zweiten Endproduktes E_2 hergestellt, wenn 28 ME des ersten Rohstoffes R_1 und 28 ME des zweiten Rohstoffes R_2 verbraucht werden.

Inverse Matrizen & Gauß-Algorithmus – Aufgabe 3 von Übungsblatt 15:

$$\begin{aligned} 2x + 7y &= 2050 \\ 5x + y &= 1000 \end{aligned} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{aligned} \mathbf{a} &= 2\,\sigma_x + 5\,\sigma_y \\ \mathbf{b} &= 7\,\sigma_x + \sigma_y \end{aligned} \qquad \mathbf{a}\,x + \mathbf{b}\,y = \mathbf{r_1} \mp \mathbf{r_2} \ \text{bzw.}$$

$$\mathbf{r_1} = \sigma_x \qquad \mathbf{r_2} = \sigma_y$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{(2\,\sigma_x + 5\,\sigma_y)}_{e_x = 2\,\sigma_x - 5\,\sigma_y}\,x + (7\,\sigma_x + \sigma_y)\,y = \sigma_x \mp \sigma_y \ \text{bzw.}$$

$$\downarrow \quad \sigma_x = \frac{1}{2}e_x - \frac{5}{2}\sigma_y$$

$$\Rightarrow \quad e_x\,x + \left(\frac{7}{2}e_x - \frac{35}{2}\sigma_y + \sigma_y\right)y = \frac{1}{2}e_x - \frac{5}{2}\sigma_y \mp \sigma_y \ \text{bzw.}$$

$$e_x\,x + \underbrace{\left(\frac{7}{2}e_x - \frac{33}{2}\sigma_y\right)}_{e_y = \frac{7}{2}e_x - \frac{33}{2}\sigma_y}y = \frac{1}{2}e_x - \frac{5}{2}\sigma_y \mp \sigma_y \ \text{bzw.}$$

$$\downarrow \quad \sigma_y = \frac{7}{33}e_x - \frac{2}{33}e_y$$

$$\Rightarrow \quad e_x\,x + e_y\,y = \frac{1}{2}e_x - \frac{35}{66}e_x + \frac{10}{66}e_y \mp \frac{7}{33}e_x - \frac{2}{33}e_y \ \text{bzw.}$$

$$e_x\,x + e_y\,y = -\frac{1}{33}e_x + \frac{5}{33}e_y \mp \frac{7}{33}e_x - \frac{2}{33}e_y \ \text{bzw.}$$

x	y	$\mathbf{r_1}$	$\mathbf{r_2}$
2	7	1	0
5	1	0	1
1	7/2	1/2	0
0	–33/2	–5/2	1
1	0	–1/33	7/33
0	1	5/33	–2/33

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{33}\begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{-1}\begin{pmatrix} 2050 \\ 1000 \end{pmatrix} = \frac{1}{33}\begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2050 \\ 1000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 150 \\ 250 \end{pmatrix}$$

Es werden 150 ME des ersten Endproduktes E_1 und 250 ME des zweiten Endproduktes E_2 hergestellt, wenn 2 050 ME des ersten Rohstoffes R_1 und 1 000 ME des zweiten Rohstoffes R_2 verbraucht werden.

Inverse Matrizen & Gauß-Algorithmus – Aufgabe 4 von Übungsblatt 15:

$$\begin{pmatrix}4&3\\1&5\end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix}x_1&x_2\\y_1&y_2\end{pmatrix}}_{\mathbf{P}}=\underbrace{\begin{array}{c}\begin{array}{cc}\text{1. Quartal}&\text{2. Quartal}\\\downarrow&\downarrow\end{array}\\\begin{pmatrix}33000&32000\\38000&25000\end{pmatrix}\end{array}}_{\mathbf{R}}$$

R .... Matrix des quartalsweisen Rohstoffbedarfs (Rohstoffbedarfsmatrix)

P .... Matrix der quartalsweisen Produktion (Produktionsmatrix)

$$\begin{aligned}4\,x_1+3\,y_1&=33000 &\text{bzw.}\quad 4\,x_2+3\,y_2&=33000\\ x_1+5\,y_1&=38000 & x_2+5\,y_2&=38000\end{aligned}\qquad\Rightarrow\qquad \begin{aligned}\mathbf{a}&=4\,\sigma_x+\sigma_y\\ \mathbf{b}&=3\,\sigma_x+5\,\sigma_y\\ \mathbf{r_1}&=\sigma_x \qquad \mathbf{r_2}=\sigma_y\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\quad \underbrace{(4\,\sigma_x+\sigma_y)}_{e_x\,=\,4\,\sigma_x+\sigma_y}\,x+(3\,\sigma_x+5\,\sigma_y)\,y=\sigma_x\underset{\text{bzw.}}{\mp}\sigma_y$$

$$\downarrow\quad \sigma_x=\frac{1}{4}\,e_x-\frac{1}{4}\,\sigma_y$$

$$\Rightarrow\quad e_x\,x+\left(\frac{3}{4}e_x-\frac{3}{4}\sigma_y+5\sigma_y\right)y=\frac{1}{4}\,e_x-\frac{1}{4}\,\sigma_y\underset{\text{bzw.}}{\mp}\sigma_y$$

$$e_x\,x+\underbrace{\left(\frac{3}{4}e_x+\frac{17}{4}\sigma_y\right)}_{e_y\,=\,\frac{3}{4}\,e_x+\frac{17}{4}\,\sigma_y}y=\frac{1}{4}\,e_x-\frac{1}{4}\,\sigma_y\underset{\text{bzw.}}{\mp}\sigma_y$$

$$\downarrow\quad \sigma_y=-\frac{3}{17}\,e_x+\frac{4}{17}\,e_y$$

$$\Rightarrow\quad e_x\,x+e_y\,y=\frac{1}{4}\,e_x+\frac{3}{68}\,e_x-\frac{4}{68}\,e_y\underset{\text{bzw.}}{\mp}-\frac{3}{17}\,e_x+\frac{4}{17}\,e_y$$

$$e_x\,x+e_y\,y=\frac{5}{17}\,e_x-\frac{1}{17}\,e_y\underset{\text{bzw.}}{\mp}-\frac{3}{17}\,e_x+\frac{4}{17}\,e_y$$

x	y	r_1	r_2
4	3	1	0
1	5	0	1
1	3/4	1/4	0
0	17/4	– 1/4	1
1	0	5/17	– 3/17
0	1	– 1/17	4/17

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{17}\begin{pmatrix}5&-3\\-1&4\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\quad \mathbf{P}=\begin{pmatrix}p_{11}&p_{12}\\p_{21}&p_{22}\end{pmatrix}=\mathbf{A}^{-1}\begin{pmatrix}33000\\38000\end{pmatrix}=\frac{1}{17}\begin{pmatrix}5&-3\\-1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}33000&32000\\38000&25000\end{pmatrix}=\begin{array}{c}\begin{array}{cc}\text{1. Quartal}&\text{2. Quartal}\\\downarrow&\downarrow\end{array}\\\begin{pmatrix}3000&5000\\7000&4000\end{pmatrix}\end{array}$$

Die Matrix der quartalsweisen Produktion lautet: $\mathbf{P}=\begin{pmatrix}3000&5000\\7000&4000\end{pmatrix}$

Im ersten Quartal werden somit 3000 ME des ersten Endproduktes E_1 und 7000 ME des zweiten Endproduktes E_2 hergestellt.

Im zweiten Quartal werden dann 5 000 ME des ersten Endproduktes E_1 und 4 000 ME des zweiten Endproduktes E_2 hergestellt.

Inverse Matrizen & Gauß-Algorithmus – Aufgabe 5 von Übungsblatt 15:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}}_{\mathbf{B}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 48 & 21 & 84 \\ 12 & 14 & 32 \end{pmatrix}}_{\mathbf{G}}$$

G .... Gesamtbedarfsmatrix

B .... Bedarfsmatrix des zweiten Produktionsschritts

A .... Bedarfsmatrix des ersten Produktionsschritts

$9\,x_1 + 3\,y_1 = 48$ und $9\,x_2 + 3\,y_2 = 21$ und $9\,x_3 + 3\,y_3 = 84$

$2\,x_1 + 2\,y_1 = 12$ $\quad$ $2\,x_2 + 2\,y_2 = 14$ $\quad$ $2\,x_3 + 2\,y_3 = 32$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{a} = 9\,\sigma_x + 2\,\sigma_y & \\ \mathbf{b} = 3\,\sigma_x + 2\,\sigma_y & \\ \mathbf{r_1} = \sigma_x & \mathbf{r_2} = \sigma_y \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{(9\,\sigma_x + 2\,\sigma_y)}_{e_x = 9\,\sigma_x + 2\,\sigma_y}\, x + (3\,\sigma_x + 2\,\sigma_y)\, y = \sigma_x \underset{\text{bzw.}}{\mp} \sigma_y$$

$$\sigma_x = \frac{1}{9} e_x - \frac{2}{9} \sigma_y$$

$$\Rightarrow \quad e_x\, x + \left(\frac{3}{9} e_x - \frac{6}{9} \sigma_y + 2\,\sigma_y \right) y = \frac{1}{9} e_x - \frac{2}{9} \sigma_y \underset{\text{bzw.}}{\mp} \sigma_y$$

$$e_x\, x + \underbrace{\left(\frac{1}{3} e_x + \frac{4}{3} \sigma_y \right)}_{e_y = \frac{1}{3} e_x + \frac{4}{3} \sigma_y} y = \frac{1}{9} e_x - \frac{2}{9} \sigma_y \underset{\text{bzw.}}{\mp} \sigma_y$$

$$\sigma_y = -\frac{1}{4} e_x + \frac{3}{4} e_y$$

$$\Rightarrow \quad e_x\, x + e_y\, y = \frac{1}{9} e_x + \frac{2}{36} e_x - \frac{6}{36} e_y \underset{\text{bzw.}}{\mp} -\frac{1}{4} e_x + \frac{3}{4} e_y$$

$$e_x\, x + e_y\, y = \frac{1}{6} e_x - \frac{1}{6} e_y \underset{\text{bzw.}}{\mp} -\frac{1}{4} e_x + \frac{3}{4} e_y$$

x	y	$\mathbf{r_1}$	$\mathbf{r_2}$
9	3	1	0
2	2	0	1
1	1/3	1/9	0
0	4/3	– 2/9	1
1	0	1/6	– 1/4
0	1	– 1/6	3/4

$\Downarrow$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{G} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 48 & 21 & 84 \\ 12 & 14 & 32 \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 48 & 21 & 84 \\ 12 & 14 & 32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 6 \\ 1 & 7 & 10 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Die Zwischenbedarfsmatrix lautet: $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 6 \\ 1 & 7 & 10 \end{pmatrix}$

Inverse Matrizen & Gauß-Algorithmus – Aufgabe 7 von Übungsblatt 15:

Zur Lösung dieser Aufgabe wird die Inverse einer Rechteckmatrix benötigt. Eine solche Inverse kann mit Hilfe des Gauß-Algorithmus nur sehr schwer und konzeptuell recht umständlich ermittelt werden.

Allerdings ist es relativ leicht möglich, eine linksseitige Inverse mit Hilfe des äußeren Produkts in Analogie zum Vorgehen von Übungsblatt 15 zu berechnen (siehe Anhang).

Inverse Matrizen & Gauß-Algorithmus – Aufgabe 8 von Übungsblatt 15:

a)
$$\begin{aligned} 9\,x + 2\,y + 3\,z &= 66 \\ 5\,x + y \phantom{{}+ 3\,z} &= 21 \\ 2\,x + y + 4\,z &= 48 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{a} = 9\,\sigma_x + 5\,\sigma_y + 2\,\sigma_z$$
$$\mathbf{b} = 2\,\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$
$$\mathbf{c} = 3\,\sigma_x + 4\,\sigma_z$$
$$\mathbf{r_1} = \sigma_x \qquad \mathbf{r_2} = \sigma_y \qquad \mathbf{r_3} = \sigma_z$$

$$\boxed{\mathbf{a}\,x + \mathbf{b}\,y + \mathbf{c}\,z = \mathbf{r_1} \underset{\text{bzw.}}{\mp} \mathbf{r_2} \underset{\text{bzw.}}{\mp} \mathbf{r_3}}$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{(9\,\sigma_x + 5\,\sigma_y + 2\,\sigma_z)}_{e_x = 9\,\sigma_x + 5\,\sigma_y + 2\,\sigma_z}\,x + (2\,\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)\,y + (3\,\sigma_x + 4\,\sigma_z)\,z = \sigma_x \underset{\text{bzw.}}{\mp} \sigma_y \underset{\text{bzw.}}{\mp} \sigma_z$$

$$\downarrow$$

$$\sigma_x = \frac{1}{9}\,e_x - \frac{5}{9}\,\sigma_y - \frac{2}{9}\,\sigma_z$$

$$\Rightarrow \quad e_x\,x + \left(\frac{2}{9}e_x - \frac{10}{9}\sigma_y - \frac{4}{9}\sigma_z + \sigma_y + \sigma_z\right) y + \left(\frac{3}{9}e_x - \frac{15}{9}\sigma_y - \frac{6}{9}\sigma_z + 4\,\sigma_z\right) z = \frac{1}{9}\,e_x - \frac{5}{9}\,\sigma_y - \frac{2}{9}\,\sigma_z \underset{\text{bzw.}}{\mp} \sigma_y \underset{\text{bzw.}}{\mp} \sigma_z$$

$$e_x\,x + \underbrace{\left(\frac{2}{9}e_x - \frac{1}{9}\sigma_y + \frac{5}{9}\sigma_z\right)}_{e_y = \frac{2}{9}\,e_x - \frac{1}{9}\,\sigma_y + \frac{5}{9}\,\sigma_z} y + \left(\frac{1}{3}e_x - \frac{5}{3}\sigma_y + \frac{10}{3}\sigma_z\right) z = \frac{1}{9}\,e_x - \frac{5}{9}\,\sigma_y - \frac{2}{9}\,\sigma_z \underset{\text{bzw.}}{\mp} \sigma_y \underset{\text{bzw.}}{\mp} \sigma_z$$

$$\downarrow$$

$$\sigma_y = 2\,e_x - 9\,e_y + 5\,\sigma_z$$

$$\Rightarrow \quad e_x\,x + e_y\,y + \left(\frac{1}{3}e_x - \frac{10}{3}e_x + \frac{45}{3}e_y - \frac{25}{3}\sigma_z + \frac{10}{3}\sigma_z\right) z = \frac{1}{9}\,e_x - \frac{10}{9}\,e_x + \frac{45}{9}\,e_y - \frac{25}{9}\,\sigma_z - \frac{2}{9}\,\sigma_z \underset{\text{bzw.}}{\mp} 2\,e_x - 9\,e_y + 5\,\sigma_z \underset{\text{bzw.}}{\mp} \sigma_z$$

$$e_x\,x + e_y\,y + \underbrace{(-\,3\,e_x + 15\,e_y - 5\,\sigma_z)}_{e_z = -\,3\,e_x + 15\,e_y - 5\,\sigma_z}\,z = -\,e_x + 5\,e_y - 3\,\sigma_z \underset{\text{bzw.}}{\mp} 2\,e_x - 9\,e_y + 5\,\sigma_z \underset{\text{bzw.}}{\mp} \sigma_z$$

$$\downarrow$$

$$\sigma_z = -\,\frac{3}{5}\,e_x + 3\,e_y - \frac{1}{5}\,e_z$$

$$\Rightarrow \quad e_x\,x + e_y\,y + e_z\,z = -\,e_x + 5\,e_y + \frac{9}{5}\,e_x - 9\,e_y + \frac{3}{5}\,e_z \underset{\text{bzw.}}{\mp} 2\,e_x - 9\,e_y - 3\,e_x + 15\,e_y - e_z \underset{\text{bzw.}}{\mp} -\,\frac{3}{5}\,e_x + 3\,e_y - \frac{1}{5}\,e_z$$

$$\Rightarrow \quad e_x\,x + e_y\,y + e_z\,z = \frac{4}{5}\,e_x - 4\,e_y + \frac{3}{5}\,e_z \underset{\text{bzw.}}{\mp} -\,e_x + 6\,e_y - e_z \underset{\text{bzw.}}{\mp} -\,\frac{3}{5}\,e_x + 3\,e_y - \frac{1}{5}\,e_z$$

x	y	z	$\mathbf{r_1}$	$\mathbf{r_2}$	$\mathbf{r_3}$
9	2	3	1	0	0
5	1	0	0	1	0
2	1	4	0	0	1
1	2/9	1/3	1/9	0	0
0	– 1/9	– 5/3	– 5/9	1	0
0	5/9	10/3	– 2/9	0	1
1	0	– 3	– 1	2	0
0	1	15	5	– 9	0
0	0	– 5	– 3	5	1
1	0	0	4/5	– 1	– 3/5
0	1	0	– 4	6	3
0	0	1	3/5	– 1	– 1/5

$$\Rightarrow \quad \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -5 & -3 \\ -20 & 30 & 15 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{-1}\begin{pmatrix} 66 \\ 21 \\ 48 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -5 & -3 \\ -20 & 30 & 15 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 66 \\ 21 \\ 48 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad x = 3 \quad y = 6 \quad y = 9$$

b) $20\,x + 15\,y + 25\,z = 16$
$40\,x + 10\,y + 10\,z = 16$
$12\,x + 25\,y + 15\,z = 16$

$\Rightarrow$ $\mathbf{a} = 20\,\sigma_x + 40\,\sigma_y + 12\,\sigma_z$
$\mathbf{b} = 15\,\sigma_x + 10\,\sigma_y + 25\,\sigma_z$
$\mathbf{c} = 25\,\sigma_x + 10\,\sigma_y + 15\,\sigma_z$
$\mathbf{r_1} = \sigma_x \qquad \mathbf{r_2} = \sigma_y \qquad \mathbf{r_3} = \sigma_z$

$$\boxed{\mathbf{a}\,x + \mathbf{b}\,y + \mathbf{c}\,z = \mathbf{r_1} \underset{\text{bzw.}}{\mp} \mathbf{r_2} \underset{\text{bzw.}}{\mp} \mathbf{r_3}}$$

$$\Rightarrow \underbrace{(20\,\sigma_x + 40\,\sigma_y + 12\,\sigma_z)}_{e_x = 20\,\sigma_x + 40\,\sigma_y + 12\,\sigma_z}\,x + (15\,\sigma_x + 10\,\sigma_y + 25\,\sigma_z)\,y + (25\,\sigma_x + 10\,\sigma_y + 15\,\sigma_z)\,z = \sigma_x \underset{\text{bzw.}}{\mp} \sigma_y \underset{\text{bzw.}}{\mp} \sigma_z$$

$$\downarrow$$

$$\sigma_x = \frac{1}{20}\,e_x - 2\,\sigma_y - \frac{3}{5}\,\sigma_z = 0{,}05\,e_x - 2\,\sigma_y - 0{,}6\,\sigma_z$$

$$\Rightarrow e_x\,x + (0{,}75\,e_x - 30\,\sigma_y - 9\,\sigma_z + 10\,\sigma_y + 25\,\sigma_z)\,y + (1{,}25\,e_x - 50\,\sigma_y - 15\,\sigma_z + 10\,\sigma_y + 15\,\sigma_z)\,z$$
$$= 0{,}05\,e_x - 2\,\sigma_y - 0{,}6\,\sigma_z \underset{\text{bzw.}}{\mp} \sigma_y \underset{\text{bzw.}}{\mp} \sigma_z$$

$$e_x\,x + \underbrace{(0{,}75\,e_x - 20\,\sigma_y + 16\,\sigma_z)}_{e_y = 0{,}75\,e_x - 20\,\sigma_y + 16\,\sigma_z}\,y + (1{,}25\,e_x - 40\,\sigma_y)\,z = 0{,}05\,e_x - 2\,\sigma_y - 0{,}6\,\sigma_z \underset{\text{bzw.}}{\mp} \sigma_y \underset{\text{bzw.}}{\mp} \sigma_z$$

$$\downarrow$$

$$\sigma_y$$

$$\sigma_y = \frac{3}{80}\,e_x - \frac{1}{20}\,e_y + \frac{4}{5}\,\sigma_z = 0{,}0375\,e_x - 0{,}05\,e_y + 0{,}8\,\sigma_z$$

$$\Rightarrow\quad e_x\,x + e_y\,y + (1{,}25\,e_x - 1{,}5\,e_x + 2\,e_y - 32\,\sigma_z)\,z = 0{,}05\,e_x - 0{,}075\,e_x + 0{,}1\,e_y - 1{,}6\,\sigma_z - 0{,}6\,\sigma_z \underset{\text{bzw.}}{\mp} 0{,}0375\,e_x - 0{,}05\,e_y + 0{,}8\,\sigma_z \underset{\text{bzw.}}{\mp} \sigma_z$$

$$e_x\,x + e_y\,y + \underbrace{(-\,0{,}25\,e_x + 2\,e_y - 32\,\sigma_z)}_{e_z = -\,0{,}25\,e_x + 2\,e_y - 32\,\sigma_z}\,z = -\,0{,}025\,e_x + 0{,}1\,e_y - 2{,}2\,\sigma_z \underset{\text{bzw.}}{\mp} 0{,}0375\,e_x - 0{,}05\,e_y + 0{,}8\,\sigma_z \underset{\text{bzw.}}{\mp} \sigma_z$$

$$\sigma_z = -\,\frac{1}{128}\,e_x + \frac{1}{16}\,e_y - \frac{1}{32}\,e_z = -\,0{,}0078125\,e_x + 0{,}0625\,e_y - 0{,}03125\,e_z$$

$$\Rightarrow\quad e_x\,x + e_y\,y + e_z\,z = -\,0{,}025\,e_x + 0{,}1\,e_y + 0{,}0171875\,e_x - 0{,}1375\,e_y + 0{,}06875\,e_z \underset{\text{bzw.}}{\mp} 0{,}0375\,e_x - 0{,}05\,e_y - 0{,}00625\,e_x + 0{,}05\,e_y - 0{,}025\,e_z \underset{\text{bzw.}}{\mp} -\,0{,}0078125\,e_x + 0{,}0625\,e_y - 0{,}03125\,e_z$$

$$e_x\,x + e_y\,y + e_z\,z = -\,0{,}0078125\,e_x - 0{,}0375\,e_y + 0{,}06875\,e_z \underset{\text{bzw.}}{\mp} 0{,}03125\,e_x - 0{,}025\,e_z \underset{\text{bzw.}}{\mp} -\,0{,}0078125\,e_x + 0{,}0625\,e_y - 0{,}03125\,e_z$$

$$= -\,\frac{1}{128}\,e_x - \frac{3}{80}\,e_y + \frac{11}{160}\,e_z \underset{\text{bzw.}}{\mp} \frac{1}{32}\,e_x - \frac{1}{40}\,e_z \underset{\text{bzw.}}{\mp} -\,\frac{1}{128}\,e_x + \frac{1}{16}\,e_y - \frac{1}{32}\,e_z$$

x	y	z	**r_1**	**r_2**	**r_3**
20	15	25	1	0	0
40	10	10	0	1	0
12	25	15	0	0	1
1	0,75	1,2	0,05	0	0
0	– 20	– 40	– 2	1	0
0	16	0	– 0,6	0	1
1	0	– 0,25	– 0,025	0,0375	0
0	1	2	0,1	– 0,05	0
0	0	– 32	– 2,2	0,8	1
1	0	0	– 0,0078125	0,03125	– 0,0078125
0	1	0	– 0,0375	0	0,0625
0	0	1	0,06875	– 0,025	– 0,03125

$$\Rightarrow \quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -0{,}0078125 & 0{,}03125 & -0{,}0078125 \\ -0{,}0375 & 0 & 0{,}0625 \\ 0{,}06875 & -0{,}025 & -0{,}03125 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{128} & \frac{1}{32} & -\frac{1}{128} \\ -\frac{3}{80} & 0 & \frac{1}{16} \\ \frac{11}{160} & -\frac{1}{40} & -\frac{1}{32} \end{pmatrix}$$

Probe:

$$\begin{array}{ccc|ccc} & & & -\frac{1}{128} & \frac{1}{32} & -\frac{1}{128} \\ & & & -\frac{3}{80} & 0 & \frac{1}{16} \\ & & & \frac{11}{160} & -\frac{1}{40} & -\frac{1}{32} \\ \hline 20 & 15 & 25 & 1 & 0 & 0 \\ 40 & 10 & 10 & 0 & 1 & 0 \\ 12 & 25 & 15 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \begin{pmatrix} 16 \\ 16 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{128} & \frac{1}{32} & -\frac{1}{128} \\ -\frac{3}{80} & 0 & \frac{1}{16} \\ \frac{11}{160} & -\frac{1}{40} & -\frac{1}{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 16 \\ 16 \\ 16 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{3}{5} & 0 & 1 \\ \frac{11}{10} & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{summierender Vektor}}$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}25 \\ 0{,}40 \\ 0{,}20 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \qquad x = 0{,}25 \qquad y = 0{,}4 \qquad y = 0{,}2$

Anhang:

Linksseitige Inverse von Rechteckmatrizen – Alternative Lösung von Aufgabe 7 des Übungsblatts 15:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} 9 & 3 & 7 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}}_{\mathbf{B}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 48 & 36 & 74 \\ 47 & 17 & 39 \end{pmatrix}}_{\mathbf{G}}$$

Die Bezeichnung der Elemente x_i und y_i folgt im Hinblick auf die anstehende Transposition bereits der transponierten Schreibung.

G .... Gesamtbedarfsmatrix

B .... Bedarfsmatrix des zweiten Produktionsschritts

A .... Bedarfsmatrix des ersten Produktionsschritts

$\mathbf{A}\,\mathbf{B} = \mathbf{G} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{B}^\mathbf{T}\,\mathbf{A}^\mathbf{T} = \mathbf{G}^\mathbf{T}$

$$\Rightarrow \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 3 & 2 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}}_{\mathbf{B}^\mathbf{T}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}^\mathbf{T}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 48 & 47 \\ 36 & 17 \\ 74 & 39 \end{pmatrix}}_{\mathbf{G}^\mathbf{T}}$$

Mit Hilfe des äußeren Produktes lässt sich eine linksseitige Inverse der Rechteckmatrix $\mathbf{B}^\mathbf{T}$ konstruieren:

$$\mathbf{B}^\mathbf{T} = \begin{pmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \\ a_z & b_z \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \left(\mathbf{B}^\mathbf{T}\right)^{-1} = \frac{1}{\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}} \begin{pmatrix} \sigma_x \wedge \mathbf{b} & \sigma_y \wedge \mathbf{b} & \sigma_z \wedge \mathbf{b} \\ \mathbf{a}\wedge\sigma_x & \mathbf{a}\wedge\sigma_y & \mathbf{a}\wedge\sigma_z \end{pmatrix}$$

$9\,x_1 + 2\,y_1 = 48$	und	$9\,x_2 + 2\,y_2 = 47$	$\Rightarrow$	$\mathbf{a} = 9\,\sigma_x + 3\,\sigma_y + 7\,\sigma_z$		
$3\,x_1 + 2\,y_1 = 36$		$3\,x_2 + 2\,y_2 = 17$		$\mathbf{b} = 2\,\sigma_x + 2\,\sigma_y + 4\,\sigma_z$		
$7\,x_1 + 4\,y_1 = 74$		$7\,x_2 + 4\,y_2 = 39$		$\mathbf{r_1} = \sigma_x$	$\mathbf{r_2} = \sigma_y$	$\mathbf{r_3} = \sigma_z$

$\Rightarrow \qquad \mathbf{a}\wedge\mathbf{b} = 12\,\sigma_x\sigma_y - 2\,\sigma_y\sigma_z - 22\,\sigma_z\sigma_x$

$$\frac{1}{\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}} = (\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})^{-1} = \frac{\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}}{(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})^2} = \frac{1}{-144-4-484}\,(12\,\sigma_x\sigma_y - 2\,\sigma_y\sigma_z - 22\,\sigma_z\sigma_x)$$

$$= \frac{1}{316}\,(-6\,\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + 11\,\sigma_z\sigma_x)$$

$\Rightarrow \qquad \sigma_x \wedge \mathbf{b} = 2\,\sigma_x\sigma_y - 4\,\sigma_z\sigma_x$

$$\frac{1}{\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}}(\sigma_x\wedge\mathbf{b}) = \frac{1}{316}\,(-6\,\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + 11\,\sigma_z\sigma_x)\,(2\,\sigma_x\sigma_y - 4\,\sigma_z\sigma_x)$$

$$= \frac{1}{316}\,(12 + 24\,\sigma_y\sigma_z + 2\,\sigma_z\sigma_x + 4\,\sigma_x\sigma_y - 22\,\sigma_y\sigma_z + 44)$$

$$= \frac{1}{316}\,(56 + 4\,\sigma_x\sigma_y + 2\,\sigma_y\sigma_z + 2\,\sigma_z\sigma_x) = \frac{1}{158}\,(28 + 2\,\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x)$$

$$\Rightarrow \quad \sigma_y \wedge \mathbf{b} = -2\,\sigma_x\sigma_y + 4\,\sigma_y\sigma_z$$

$$\frac{1}{\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}}(\sigma_y \wedge \mathbf{b}) = \frac{1}{316}\,(-6\,\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + 11\,\sigma_z\sigma_x)\,(-2\,\sigma_x\sigma_y + 4\,\sigma_y\sigma_z)$$

$$= \frac{1}{316}\,(-12 + 24\,\sigma_z\sigma_x - 2\,\sigma_z\sigma_x - 4 + 22\,\sigma_y\sigma_z + 44\,\sigma_x\sigma_y)$$

$$= \frac{1}{316}\,(-16 + 44\,\sigma_x\sigma_y + 22\,\sigma_y\sigma_z + 22\,\sigma_z\sigma_x) = \frac{1}{158}\,(-8 + 22\,\sigma_x\sigma_y + 11\,\sigma_y\sigma_z + 11\,\sigma_z\sigma_x)$$

$$\Rightarrow \quad \sigma_z \wedge \mathbf{b} = -2\,\sigma_y\sigma_z + 2\,\sigma_z\sigma_x$$

$$\frac{1}{\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}}(\sigma_x \wedge \mathbf{b}) = \frac{1}{316}\,(-6\,\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + 11\,\sigma_z\sigma_x)\,(-2\,\sigma_y\sigma_z + 2\,\sigma_z\sigma_x)$$

$$= \frac{1}{316}\,(-12\,\sigma_z\sigma_x - 12\,\sigma_y\sigma_z + 2 - 2\,\sigma_x\sigma_y - 22\,\sigma_x\sigma_y - 22)$$

$$= \frac{1}{316}\,(-20 - 24\,\sigma_x\sigma_y - 12\,\sigma_y\sigma_z - 12\,\sigma_z\sigma_x) = \frac{1}{158}\,(-10 - 12\,\sigma_x\sigma_y - 6\,\sigma_y\sigma_z - 6\,\sigma_z\sigma_x)$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{a} \wedge \sigma_x = -3\,\sigma_x\sigma_y + 7\,\sigma_z\sigma_x$$

$$\frac{1}{\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}}(\mathbf{a} \wedge \sigma_x) = \frac{1}{316}\,(-6\,\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + 11\,\sigma_z\sigma_x)\,(-3\,\sigma_x\sigma_y + 7\,\sigma_z\sigma_x)$$

$$= \frac{1}{316}\,(-18 - 42\,\sigma_y\sigma_z - 3\,\sigma_z\sigma_x - 7\,\sigma_x\sigma_y + 33\,\sigma_y\sigma_z - 77)$$

$$= \frac{1}{316}\,(-95 - 7\,\sigma_x\sigma_y - 9\,\sigma_y\sigma_z - 3\,\sigma_z\sigma_x)$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{a} \wedge \sigma_y = 9\,\sigma_x\sigma_y - 7\,\sigma_y\sigma_z$$

$$\frac{1}{\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}}(\mathbf{a} \wedge \sigma_y) = \frac{1}{316}\,(-6\,\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + 11\,\sigma_z\sigma_x)\,(9\,\sigma_x\sigma_y - 7\,\sigma_y\sigma_z)$$

$$= \frac{1}{316}\,(54 - 42\,\sigma_z\sigma_x + 9\,\sigma_z\sigma_x + 7 - 99\,\sigma_y\sigma_z - 77\,\sigma_x\sigma_y)$$

$$= \frac{1}{316}\,(61 - 77\,\sigma_x\sigma_y - 99\,\sigma_y\sigma_z - 33\,\sigma_z\sigma_x)$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{a} \wedge \sigma_z = 3\,\sigma_y\sigma_z - 9\,\sigma_z\sigma_x$$

$$\frac{1}{\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}}(\mathbf{a} \wedge \sigma_z) = \frac{1}{316}\,(-6\,\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + 11\,\sigma_z\sigma_x)\,(3\,\sigma_y\sigma_z - 9\,\sigma_z\sigma_x)$$

$$= \frac{1}{316}\,(18\,\sigma_z\sigma_x + 54\,\sigma_y\sigma_z - 3 + 9\,\sigma_x\sigma_y + 33\,\sigma_x\sigma_y + 99)$$

$$= \frac{1}{316}\,(96 + 42\,\sigma_x\sigma_y + 54\,\sigma_y\sigma_z + 18\,\sigma_z\sigma_x) = \frac{1}{158}\,(48 + 21\,\sigma_x\sigma_y + 27\,\sigma_y\sigma_z + 9\,\sigma_z\sigma_x)$$

Die linksseitige Inverse der Rechteckmatrix $\mathbf{B^T}$ lautet somit:

$$\left(\mathbf{B^T}\right)^{-1} = \frac{1}{\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}}\begin{pmatrix} \sigma_x \wedge \mathbf{b} & \sigma_y \wedge \mathbf{b} & \sigma_z \wedge \mathbf{b} \\ \mathbf{a}\wedge\sigma_x & \mathbf{a}\wedge\sigma_y & \mathbf{a}\wedge\sigma_z \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{316}\begin{pmatrix} 28 + 2\,\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x & -8 + 22\,\sigma_x\sigma_y + 11\,\sigma_y\sigma_z + 11\,\sigma_z\sigma_x & -10 - 12\,\sigma_x\sigma_y - 6\,\sigma_y\sigma_z - 6\,\sigma_z\sigma_x \\ -95 - 7\,\sigma_x\sigma_y - 9\sigma_y\sigma_z - 3\sigma_z\sigma_x & 61 - 77\,\sigma_x\sigma_y - 99\sigma_y\sigma_z - 33\sigma_z\sigma_x & 96 + 42\sigma_x\sigma_y + 54\sigma_y\sigma_z + 18\sigma_z\sigma_x \end{pmatrix}$$

Die Inverse der Rechteckmatrix $\mathbf{B^T}$ besitzt somit Elemente mit bivektoriellen Anteilen. Diese sind mit Hilfe des Gauß-Algorithmus nur schwer zu ermitteln.

$$\mathbf{A\,B} = \mathbf{G} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B^T\,A^T} = \mathbf{G^T} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A^T} = \left(\mathbf{B^T}\right)^{-1}\mathbf{G^T} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A} = \left[\left(\mathbf{B^T}\right)^{-1}\mathbf{G^T}\right]^{\mathbf{T}}$$

Die Elemente der Transponierten der Bedarfsmatrix des ersten Produktionsschrittes $\mathbf{A^T} = \left(\mathbf{B^T}\right)^{-1}\mathbf{G^T}$ ergeben sich somit zu:

$$\Rightarrow \quad x_1 = \frac{48}{158}\,(28 + 2\,\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x) + \frac{36}{158}\,(-8 + 22\,\sigma_x\sigma_y + 11\,\sigma_y\sigma_z + 11\,\sigma_z\sigma_x) + \frac{74}{158}\,(-10 - 12\,\sigma_x\sigma_y - 6\,\sigma_y\sigma_z - 6\,\sigma_z\sigma_x) = 2$$

$$y_1 = \frac{48}{316}\,(-95 - 7\,\sigma_x\sigma_y - 9\,\sigma_y\sigma_z - 3\,\sigma_z\sigma_x) + \frac{36}{316}\,(61 - 77\,\sigma_x\sigma_y - 99\,\sigma_y\sigma_z - 33\,\sigma_z\sigma_x) + \frac{74}{316}\,(96 + 42\,\sigma_x\sigma_y + 54\,\sigma_y\sigma_z + 18\,\sigma_z\sigma_x) = 15$$

$$x_2 = \frac{47}{158}\,(28 + 2\,\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x) + \frac{17}{158}\,(-8 + 22\,\sigma_x\sigma_y + 11\,\sigma_y\sigma_z + 11\,\sigma_z\sigma_x) + \frac{39}{158}\,(-10 - 12\,\sigma_x\sigma_y - 6\,\sigma_y\sigma_z - 6\,\sigma_z\sigma_x) = 5$$

$$y_2 = \frac{47}{316}\,(-95 - 7\,\sigma_x\sigma_y - 9\,\sigma_y\sigma_z - 3\,\sigma_z\sigma_x) + \frac{17}{316}\,(61 - 77\,\sigma_x\sigma_y - 99\,\sigma_y\sigma_z - 33\,\sigma_z\sigma_x) + \frac{39}{316}\,(96 + 42\,\sigma_x\sigma_y + 54\,\sigma_y\sigma_z + 18\,\sigma_z\sigma_x) = 1$$

$\Rightarrow$ Die Transponierte der Bedarfsmatrix des ersten Produktionsschrittes lautet: $\quad \mathbf{A^T} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 15 & 1 \end{pmatrix}$

Damit lautet die Bedarfsmatrix des ersten Produktionsschrittes: $\quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 15 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$