Warum der Apfel vom Baum fällt
- Die allgemeine Relativitätstheorie im Unterricht -

Holger Göbel

Helmut-Schmidt-Universität / Universitaet der Bundeswehr Hamburg, Professur für Elektronik
holger.goebel@hsu-hh.de

Kurzfassung

Obwohl sie zu den bekanntesten und am besten überprüften Theorien der Physik gehört, wird der allgemeinen Relativitätstheorie weder in der Schule noch an Universitäten der ihr angemessene Raum zugebilligt. Dies liegt nicht zuletzt an der komplexen Mathematik, obwohl es durchaus interessante Ansätze gibt, um die wesentlichen Aussagen der allgemeinen Relativitätstheorie anschaulich zu vermitteln. So lassen sich sowohl die Krümmung der Raumzeit als auch die Bewegung eines Körpers auf einer Linie extremaler Länge mit einfachen Mitteln illustrieren. Dabei taucht allerdings die Frage auf, woher denn ein Körper weiß, dass die Richtung, in die er sich bewegt, eine Linie extremaler Länge ist. Zur Beantwortung dieser Frage wird in dem Beitrag eine Vorgehensweise gewählt, in der von dem Konzept des minimalen Wegs ausgegangen wird, wie es aus der geometrischen Optik bekannt ist. Es wird dann zum einen gezeigt, dass ein solcher kürzester Weg stets ein Weg stationärer Phase ist und zum anderen, dass die sogenannten Wirkung eines sich bewegenden Teilchens der Phase der aus der Quantentheorie bekannten Wellenfunktion entspricht, die wiederum ein Maß für die Wahrscheinlichkeit ist, das Teilchen an einem bestimmten Ort anzutreffen. Damit lässt sich dann anschaulich zeigen, dass ein Teilchen in der Raumzeit nur den Weg wählen kann, dessen Länge extremal ist, da sich alle anderen Wege durch Interferenz gegenseitig auslöschen.

1. Einleitung

Auch wenn die mathematische Beschreibung der allgemeinen Relativitätstheorie anspruchsvoll ist, lassen sich ihre wesentlichen Aussagen auf einfache Weise geometrisch veranschaulichen. Der Effekt der Gravitation wird beispielsweise darauf zurückgeführt, dass die anziehende Masse die Raumzeit krümmt und die angezogene Masse sich in der gekrümmten Raumzeit auf einer Kurve extremaler Länge, einer sogenannten geodätischen Kurve bewegt, wie in Abb. 1 für den Fall eines Apfels vom Baum dargestellt ist [1].

Woher weiß aber nun der Apfel überhaupt, dass die Richtung, in die er sich bewegt, eine Linie extremaler Länge ist. Zur Beantwortung dieser Frage nähern wir uns dem Problem von einer anderen Seite und betrachten dazu statt des Apfels zunächst einen Lichtstrahl, der zwischen zwei Punkten verläuft. Von dem Lichtstrahl wissen wir, dass er zwei Punkte im Raum stets durch eine Kurve minimaler Länge miteinander verbindet. Der Lichtstrahl lässt sich dabei durch eine Wellengleichung beschreiben, die im einfachsten Fall die Form

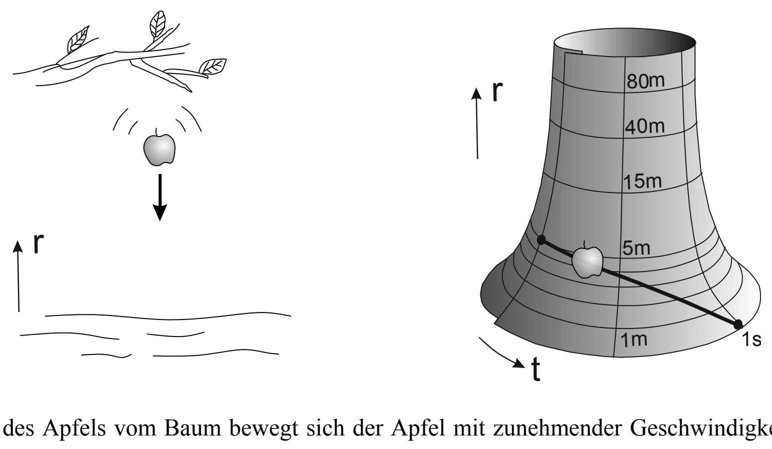

Abb. 1: Beim Fall des Apfels vom Baum bewegt sich der Apfel mit zunehmender Geschwindigkeit Richtung Boden (links). In der Darstellung in der gekrümmten Raumzeit bewegt sich der Apfel entlang einer geodätischen Kurve (rechts).

$$A = a\sin(kx - \omega t) \qquad \{1\}$$

hat. In dieser Gleichung ist *A(x,t)* der von der Zeit *t* und dem Ort *x* abhängige Momentanwert, *a* die Amplitude, *ω* die Frequenz der Schwingung und *k* die sogenannte Wellenzahl. Das Argument der Sinusfunktion wird auch als Phase *φ* der Schwingung bezeichnet, so dass wir {1} auch in der Form

$$A = a\sin(\varphi) \qquad \{2\}$$

darstellen können.

2. Das Prinzip des kürzesten Weges

Wir wollen nun zeigen, warum die Lichtwelle auf ihrem Weg zwischen zwei beliebigen Punkten stets den Weg minimaler Länge wählt. Der Grund für dieses Verhalten liegt in der Eigenschaft von Wellen, sich gegenseitig zu beeinflussen, also zu interferieren. Um dies zu veranschaulichen, betrachten wir eine Lampe an einer Stelle x_0, die Licht in alle Richtungen ausstrahlt (Abb. 2). In einem beliebigen Punkt x_1 kommen nun nach dem oben Gesagten nur diejenigen Lichtstrahlen an, die den kürzesten Weg 1 genommen haben, aber nicht die Strahlen, die den längeren Weg 2 genommen haben.

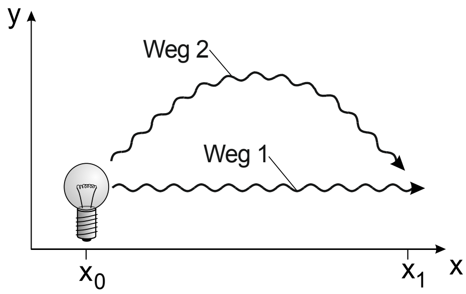

Abb. 2: Die Ausbreitung einer Lichtwelle zwischen zwei Punkten erfolgt stets entlang der kürzesten Verbindungslinie (Weg 1).

Dies lässt sich erklären, indem wir zunächst die Lichtstrahlen untersuchen, die Weg 1 entlanglaufen (Abb. 3, oben), wobei wir die Bahn des Strahls leicht um Δy variieren. Dabei stellen wir fest, dass benachbarte Lichtstrahlen praktisch die gleiche Weglänge zurücklegen und daher keine Phasenverschiebung $\Delta\varphi$ zueinander aufweisen. Dies bedeutet, dass die Lichtstrahlen konstruktiv interferieren, und wir in dem Aufpunkt x_1 die Summe der benachbarten Strahlen empfangen.

Für Weg 2 stellt sich die Situation vollkommen anders dar (Abb. 3, unten). Hier ändert sich die Weglänge des Lichts deutlich, wenn wir den Strahl in y-Richtung auslenken. Benachbarte Lichtstrahlen, die sich um Δy unterscheiden, haben dann wegen der größeren Wegänderung sehr große Phasenunterschiede, so dass sich in der Umgebung von Weg 2 im Mittel die einzelnen Strahlen gegenseitig auslöschen und daher praktisch keine Welle den Aufpunkt erreicht.

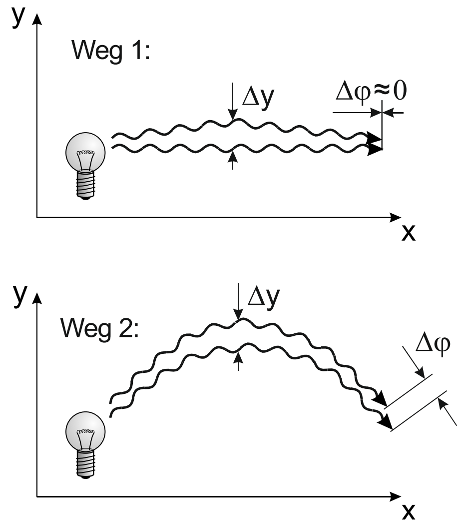

Abb. 3: Die Ausbreitung von Lichtstrahlen entlang des kürzesten Weges (Weg 1, oben) und eines beliebigen Weges (Weg 2, unten).

Das Prinzip des kürzesten Weges hat seine Begründung also in der Tatsache, dass nur in der Umgebung des kürzesten Weges (Weg 1) benachbarte Strahlen praktisch keinen Phasenunterschied $\Delta\varphi$ aufweisen und konstruktiv interferieren, während für alle anderen Wege die Wegänderung und damit die Phasenänderung $\Delta\varphi$ zwischen benachbarten Wegen sehr groß ist, so dass sich diese Strahlen letztlich auslöschen (Abb. 4).

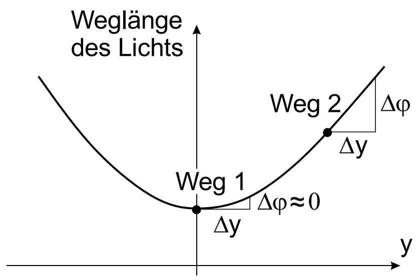

Abb. 4: Nur in der Umgebung des kürzesten Weges 1 ist die Längenänderung und damit die Phasenänderung zwischen benachbarten Lichtstrahlen praktisch null. In der Umgebung des längeren Weges 2 ändert sich die Phase zwischen benachbarten Wegen sehr stark und benachbarte Lichtstrahlen löschen sich aus.

Diese Erklärung ist für Lichtwellen einleuchtend, scheint aber für unseren Apfel nicht zu greifen, da der Apfel ein massebehaftetes Objekt und keine Welle ist. Tatsächlich werden wir jedoch im Folgenden zeigen, dass auch Teilchen Welleneigenschaften haben und daher ebenfalls Interferenzerscheinungen auftreten, die schließlich dazu führen, dass ein Teilchen – ähnlich wie ein Lichtstrahl - genau einem bestimmten Weg folgt.

3. Teilchen und Wellen

In der klassischen Physik unterscheidet man zwischen Wellen, d.h. räumlich und zeitlich periodischen Vorgängen, wie Wasserwellen oder Lichtwellen einerseits und Teilchen, d.h. massebehafteten räumlich begrenzten Körpern andererseits. Spätestens seit Einsteins Erklärung des Photoeffekts im Jahre 1905 weiß man jedoch, dass Licht nicht nur Phänomene zeigt, wie wir sie von Wellen kennen, wie beispielsweise Interferenz oder Beugung, sondern dass Licht auch Teilcheneigenschaften hat, wobei die Lichtteilchen als Photonen bezeichnet werden. Daraus entwickelte sich Anfang des 20. Jahrhunderts die Quantenmechanik, deren Aussage ist, dass auch Materie Welleneigenschaften hat. Im Folgenden zeigen wir nun einige einfache Gedankenexperimente, welche diese Aussage verdeutlichen [2]. Zunächst betrachten wir eine Anordnung, bestehend aus einem Doppelspalt, hinter dem ein Detektor angebracht ist (Abb. 5). Aus einer Quelle werden nun makroskopische Teilchen, z.B. Kugeln, einzeln und nacheinander in Richtung des Spaltes geschossen, wo sie zufällig auftreffen und – sofern sie durch einen der Spalte gelangen – von dem Detektor registriert werden.

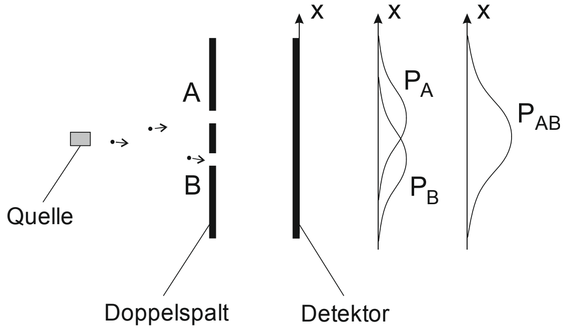

Abb. 5: Teilchen beim Durchlaufen einer Anordnung mit einem Doppelspalt. Die Einzelwahrscheinlichkeiten P_A bzw. P_B für das Auftreffen eines Teilchens, wenn nur ein Spalt geöffnet ist, addieren sich zu der Wahrscheinlichkeit, P_{AB}, wenn beide Spalte geöffnet sind.

Öffnet man nun Spalt A, während Spalt B geschlossen bleibt, erhält man die Verteilung P_A, wenn man die Häufigkeit des Auftreffens der Kugeln über dem Ort x misst. Entsprechend ergibt sich die Verteilung P_B bei Öffnen des Spaltes B. Öffnet man beide Spalte gleichzeitig, ergibt sich eine Verteilung P_{AB}, die der Summe aus den beiden Verteilungen P_A und P_B entspricht. Nun variieren wir das Experiment, indem wir Wellen auf den Doppelspalt zulaufen lassen (Abb. 6). Messen wir die Intensität I der Welle mit einem Detektor über dem Ort x, erhalten wir die Verteilungen I_A bzw. I_B, wenn Spalt A bzw. Spalt B geöffnet ist. Öffnen wir nun beide Spalte gleichzeitig, erhalten wir ein Muster I_{AB}, was sich dadurch erklären lässt, dass die beiden durch die Spalte laufenden Wellen miteinander interferieren.

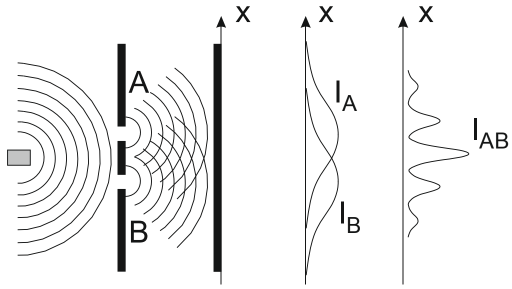

Abb. 6: Wellen beim Durchlaufen einer Anordnung mit einem Doppelspalt. Abhängig davon, ob nur ein Spalt oder beide geöffnet sind, erhält man die Einzelintensitäten I_A bzw. I_B oder die Gesamtintensität I_{AB}.

In einem letzten Experiment verwenden wir nun Elektronen, die wir aus einer Quelle einzeln und nacheinander auf den Doppelspalt schießen (Abb. 7). Das überraschende Ergebnis ist, dass wir eine Verteilung P_A bzw. P_B erhalten, wenn nur ein Spalt geöffnet ist, jedoch ein komplexes Interferenzmuster P_{AB}, wenn beide Spalte gleichzeitig geöffnet sind. Das ist insofern verwunderlich, da sich ja stets nur ein Elektron gleichzeitig in der Anordnung befand, so dass nicht beispielsweise zwei Teilchen miteinander Interferieren konnten. Die Erklärung der Quantenmechanik ist, dass jedem Teilchen, also auch dem Elektron, eine sogenannte Wahrscheinlichkeitswelle $\Psi(x,t)$ zugeordnet werden kann, deren Amplitude an einem bestimmten Ort ein Maß für die Wahrscheinlichkeit ist, das Teilchen an diesem Ort anzutreffen. Diese Wahrscheinlichkeitswelle können wir im einfachsten Fall beschreiben durch

$$\Psi(x,t) = a\sin(kx - \omega t) \quad , \qquad \{3\}$$

wobei k die Wellenzahl und ω die Frequenz der Welle ist. Diese Welle interferiert nun, wenn beide Spalte geöffnet sind und erzeugt Interferenzmuster mit Minima und Maxima, auch wenn nur ein Elektron in der Anordnung ist. Schießt man nun mehrere Elektronen hintereinander auf den Doppelspalt, werden die Elektronen an den Stellen, an denen die Wahrscheinlichkeitswelle ein Maximum hat, häufiger auftreffen, während an den Stellen, wo sich die Wahrscheinlichkeitswellen gegenseitig auslöschen, keine Elektronen zu finden sein werden.

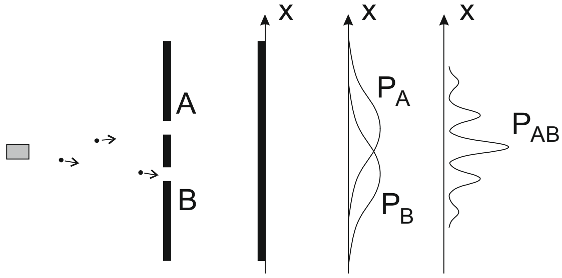

Abb. 7: Elektronen beim Durchlaufen einer Anordnung mit einem Doppelspalt. Obwohl Elektronen Teilchencharakter aufweisen, ergibt sich für die Auftreffwahrscheinlichkeit wenn beide Spalte offen sind ein Interferenzmuster, was auf Welleneigenschaften schließen lässt.

Diese Wahrscheinlichkeitswellen sind die Lösungen der Schrödinger-Gleichung, einer Grundgleichung der Quantenmechanik, die Erwin Schrödinger im Jahr 1926 aufgestellt hat. Man kann nun zeigen, dass die Größen k und ω der Wahrscheinlichkeitswelle von der Energie E und dem Impuls p des Teilchens abhängen. Betrachten wir beispielsweise Licht, so kennen wir den Zusammenhang zwischen dessen Frequenz ω und der Energie E sowie zwischen der Wellenzahl k und dem Impuls p. So ist

$$E=\hbar\omega \quad \text{und} \quad p=\hbar k\,, \qquad \{4\}$$

mit dem sogenannten reduzierten Planck'schen Wirkungsquantum $\hbar$. Diese Beziehungen gelten nun nicht nur für Licht, sondern für beliebige Teilchen, wie Luis-Victor de Broglie im Jahre 1924 postulierte. Dabei sind allerdings die Wellenlängen makroskopischer Teilchen so klein, dass deren Welleneigenschaft in der Regel nicht beobachtet werden kann. Mit {4} erhalten wir damit aus {3} die Beziehung

$$\Psi = a\sin\left[\frac{1}{\hbar}\left(px-Et\right)\right] \,. \qquad \{5\}$$

Den Ausdruck $px - Et$ in der Wellenfunktion bezeichnet man auch als die sogenannte Wirkung S (siehe Anhang), so dass wir {5} auch in der Form

$$\Psi = a\sin\left(\frac{S}{\hbar}\right) \qquad \{6\}$$

darstellen können. Damit entspricht die Wirkung S bis auf den konstanten Faktor $\hbar$ der Phase der Wellenfunktion Ψ.

4. Der Fall des Apfels

Wir zeigen nun am Beispiel des Apfels, dass Vorgänge in der Natur tatsächlich stets so ablaufen, dass die Wirkung S gemäß {A2} ein Minimum annimmt. Dazu berechnen wir in jedem Punkt der Bahnkurve des fallenden Apfels die Differenz aus kinetischer und potentieller Energie und summieren diese auf. Zur Vereinfachung der Rechnung diskretisieren wir dazu die Bahnkurve und berechnen die kinetische und die potentielle Energie an den einzelnen Stützstellen, wobei wir für die Masse des Apfels m = 0,1 kg annehmen. Gemäß {A1} gilt $E_{pot} = m\,g\,r$ und $E_{kin} = \frac{1}{2}\,m\,v^2$, wobei die Geschwindigkeit $v = \Delta r\,/\,\Delta t$ ist. Der Weg A in Abb. 8 entspricht dem sich tatsächlich ergebenden parabelförmigen Verlauf $r(t)$, die Wege B und C erhalten wir, indem wir eine Stützstelle um δ verschieben. Angegeben sind jeweils die Energien an den Bahnpunkten sowie die sich insgesamt ergebende Wirkung S [1]. Man sieht, dass die Wirkung S für den sich tatsächlich einstellenden Weg A ein Minimum aufweist (Abb. 9). Dies bedeutet, dass sich in unmittelbarer Umgebung von Weg A die Wirkung praktisch nicht ändert, während sie sich in Umgebung der Wege B und C stark ändert. Vergleicht man dieses Resultat mit der Gleichung {2} für die Lichtwelle, erkennt man, dass die

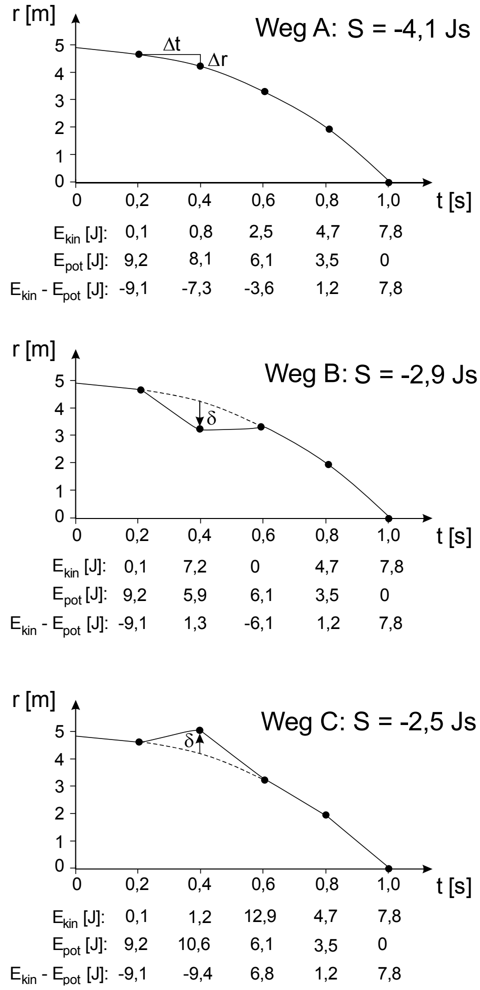

Abb. 8: Die Wirkung S hat für die sich tatsächliche einstellende Bahnkurve des fallenden Apfels ein Minimum (oben). Wählt man einen anderen Weg, steigt die Wirkung jeweils an (mitte und unten).

Wirkung S für die Wahrscheinlichkeitswelle Ψ offensichtlich die gleiche Bedeutung hat wie die Phase φ für eine Lichtwelle: Entlang eines Weges, bei dem die Wirkung S ein Minimum aufweist, ändert sich die Phase benachbarter Wahrscheinlichkeitswellen nicht, so dass diese konstruktiv interferieren.

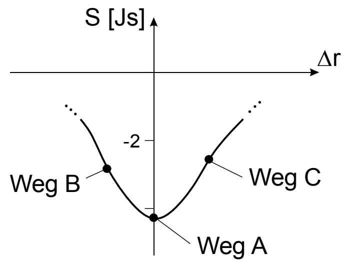

Abb. 9: Wirkungen für verschiedene Wege des fallenden Apfels. Für den sich tatsächlich einstellenden Weg A ist die Wirkung S minimal. Für die längeren Wege B und C nimmt die Wirkung größere Werte an.

Entlang aller anderen Wege, ändert sich die Wirkung - und damit die Phase der Wahrscheinlichkeitswellen - bei Variation des Weges sehr stark und die Wahrscheinlichkeitswellen löschen sich gegenseitig aus. Ähnlich wie die Lichtwelle im Raum testet also auch der Apfel alle Wege in der Raumzeit; wegen der Interferenz löschen sich jedoch alle Wege bis auf einen, nämlich den mit der minimalen Wirkung, aus (Abb. 10).

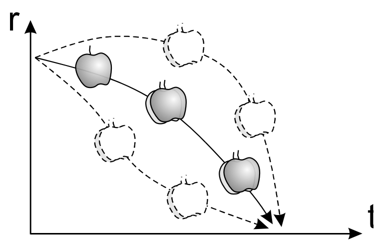

Abb. 10: Beim Fall des Apfels testet dieser alle Wege. Nur bei dem Weg mit der minimalen Wirkung interferieren die Wahrscheinlichkeitswellen konstruktiv; alle anderen Wege löschen sich aus.

5. Anhang: Das Prinzip der kleinsten Wirkung

In der Natur gibt es eine Reihe grundlegender Prinzipien, wie beispielsweise die Energie- oder Impulserhaltung oder das oben genannte Prinzip des kürzesten Weges. Mit letzterem eng verwandt ist das Prinzip der kleinsten Wirkung, was besagt, dass die Bewegung eines Körpers stets so abläuft, dass die Differenz zwischen kinetischer und potentieller Energie, aufsummiert über die Zeit, die sogenannte Wirkung *S*, ein Minimum annimmt [3]. Für die Energien gilt

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2 \quad \text{sowie} \quad E_{pot} = m g r \ . \qquad \{A1\}$$

Integrieren wir die Differenz zwischen den beiden Energien über die Zeit auf, erhalten wir für die Wirkung

$$S = \int E_{kin} - E_{pot} \, dt \ . \qquad \{A2\}$$

Wir schreiben nun {A2} um, indem wir $E_{pot} = E - E_{kin}$ setzen und erhalten

$$S = \int 2E_{kin} - E \, dt \ , \qquad \{A3\}$$

In dem Ausdruck für die kinetische Energie nach {A1} drücken wir $m\,v$ durch den Impuls p aus, so dass

$$E_{kin} = \frac{1}{2} p v \ . \qquad \{A4\}$$

Damit wird die Wirkung {A2}

$$S = \int p v - E \, dt = p r - E t \ , \qquad \{A5\}$$

wobei wir vereinfachend angenommen haben, dass es sich um ein freies Teilchen handelt, so dass sowohl die Energie als auch der Impuls konstant sind. Mit der Definition der Wirkung nach {A2} erhalten wir also aus der Gleichung {5} für die Wahrscheinlichkeitswelle schließlich die Beziehung {6}

$$\Psi = a \sin\left(\frac{S}{\hbar}\right) \ . \qquad \{A6\}$$

6. Literatur

[1] H. Göbel, Gravitation und Relativität, De Gruyter Studium, Oldenbourg Wissenschaftsverlag, München, 2014)

[2] R. Feynman, Feynman-Vorlesungen über Physik, Band 3, Quantenmechanik. Oldenbourg, 2010.

[3] R. Feynman, Feynman-Vorlesungen über Physik, Band 2, Elektromagnetismus und Struktur der Materie. Oldenbourg, 2010.