

Lineare Algebra in physikdidaktischer Ausprägung

Martin Erik Horn

Hochschule für Wirtschaft und Recht Berlin / Berlin School of Economics and Law
FB 1 – Wirtschaftswissenschaften, Facheinheit Quantitative Methoden
Badensche Str. 52, Fach Nr. 63, D – 10825 Berlin, Germany
mail@martinerikhorn.de

Kurzfassung

Die mathematische Sprache der Geometrischen Algebra wurde von David Hestenes und anderen Didaktikern mit Blick auf physikalische Modellierungsprozesse entwickelt und unter Rückgriff auf physikalische Ansätze didaktisch aufbearbeitet. Historisch ist die Geometrische Algebra ein physikdidaktisch motiviertes Konstrukt. Diese Bindung geht so weit, dass einige Wissenschaftler sogar von einer physikalischen Mathematik sprechen.

Es zeigt sich jedoch, dass diese physikalisch motivierte Mathematik einen von der Physik abgehobenen Wert besitzen muss, da sie in den letzten Jahren immer stärker auch in physikfernen Gebieten erfolgreich angewendet wird.

Ein solcher Versuch, die Geometrische Algebra als physikalisch motivierte mathematische Sprache von der Physik zu entkoppeln, wird insbesondere im Bereich der Linearen Algebra erfolgreich sein: Die Formulierung abstrakter Zusammenhänge durch Lineare Gleichungssysteme ist konzeptuelle Grundlage zahlreicher, auch physikferner Wissenschaften. In diesem Beitrag wird eine solche auf der Geometrischen Algebra aufbauende Lineare Algebra, die physikdidaktisch motiviert physikfremd agiert, vorgestellt und diskutiert.

1. Physik und Mathematik

Die historische Entwicklung von Physik und Mathematik ist eng miteinander verknüpft. Immer wieder waren es mathematische Ideen, die die Physik weiterbrachten. Und immer wieder waren es physikalische Ideen, die die Mathematik zur Entwicklung neuer konzeptueller Herangehensweisen motivierten.

Ein besonderes Beispiel für die enge Verquickung von Physik und Mathematik stellt die Geometrische Algebra dar. Diese mathematische Sprache wurde von Cartan, Riesz und in den letzten Jahrzehnten mit Nachdruck von David Hestenes mit Blick auf physikalische Modellierungsprozesse entwickelt und unter Rückgriff auf physikalische Ansätze didaktisch aufbearbeitet. Historisch ist die Geometrische Algebra ein physikdidaktisch motiviertes Konstrukt.

So betont David Hestenes immer wieder, dass die Geometrische Algebra eine allumfassende mathematische Sprache der Physik („a unified mathematical language for the whole of physics that facilitates learning and enhances physical insight“ [1]) sei, die das Verständnis physikalischer Zusammenhänge dramatisch erleichtere.

Diese physikorientierte Umgestaltung mathematischer Konzepte wirkt selbstredend auf die Mathematik zurück. Die Bindung zwischen diesen beiden Wissenschaften geht so weit, dass einige Wissen-

schaftler sogar von einer physikalischen Mathematik [2, Abs. 2] sprechen, die als komplementäres Spiegelbild zur mathematischen Physik agiert.

Es zeigt sich jedoch, dass diese physikalisch motivierte Mathematik einen von der Physik abgehobenen Wert besitzen muss, da sie in den letzten Jahren immer stärker auch in physikfernen Gebieten erfolgreich angewendet wird.

Ein solcher Versuch, die Geometrische Algebra als physikalisch motivierte mathematische Sprache von der Physik zu entkoppeln, wird insbesondere im Bereich der Linearen Algebra erfolgreich sein: Die Formulierung abstrakter Zusammenhänge durch Lineare Gleichungssysteme ist konzeptuelle Grundlage zahlreicher, auch physikferner Wissenschaften.

Dazu bringt die Physik des 20. Jahrhunderts eine konzeptionelle Grundidee mit, die sich auf die Darstellung und Analyse von Linearen Gleichungssystemen (LGS) direkt übertragen lässt: Die Idee der Geometrisierung algebraischer Beziehungen. Der theoretische Kern der Relativitätstheorie weist auf diese Idee, wenn die Zeit als nicht-geometrische Größe durch Zuordnung einer raumzeitlichen Dimension in ein geometrisches Konstrukt überführt wird. Aus der skalaren Sichtweise Newtons auf die Zeit wird die vektorartige Darstellung der Zeit im Sinne Minkowskis.

2. Konventionelle Interpretation Linearer Gleichungssysteme

Lineare Gleichungssysteme bestehen im allgemeinen Fall aus n linearen Gleichungen. Im schulischen Kontext beschränkt man sich üblicherweise auf zwei- oder dreidimensionale Lineare Gleichungssysteme

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 z &= r_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z &= r_2 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z &= r_3 \end{aligned} \quad \{1\}$$

um eine bessere graphische Übersichtlichkeit zu gewährleisten. Im zweidimensionalen Fall (mit $a_3 = b_3 = c_1 = c_2 = c_3 = r_3 = 0$) werden die verbleibenden ersten beiden Gleichungen geometrisch *zeilenweise* interpretiert und können als Geraden in einem Koordinatensystem eingezeichnet werden.

Sofern ein eindeutiger Schnittpunkt beider Geraden existiert, repräsentieren die Koordinaten x_s und y_s dieses Schnittpunkts sodann die Lösungswerte des Linearen Gleichungssystems (siehe Abbildung 1, wobei die blaue Gerade die erste und die rote Gerade die zweite Gleichung darstellt).

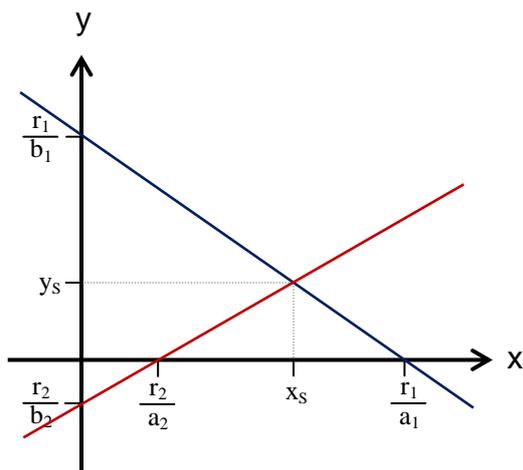


Abb.1: Graphische Lösung eines zweidimensionalen Linearen Gleichungssystems.

Hier besteht die zeichnerisch einfache und gut nachvollziehbare Darstellungsmöglichkeit. Auch lassen sich die Fälle einer nicht existierenden Lösung (parallele Geraden) oder von unendlich vielen gleichberechtigten Lösungen (deckungsgleiche Geraden) graphisch leicht diskutieren.

Nicht so einfach wird die Darstellung einer zeilenweisen Interpretation jedoch bereits im dreidimensionalen Fall. Die drei Zeilen von Gl. {1} werden in diesem Fall durch schräg zueinander stehende Ebenen repräsentiert.

Zwei schräg zueinander stehende Ebenen besitzen eine gemeinsame Schnittgerade (siehe Abbildung 2). Die Koordinaten des Schnittpunkts dieser Schnittlinie mit der Ebene, die die dritte Gleichung des LGS

repräsentiert, stellen sodann die Lösungswerte des Linearen Gleichungssystems dar.

Schon die graphische Darstellung dieser dritten Ebene kann zu einer gewissen Unübersichtlichkeit führen, die eine zeichnerische Interpretation des LGS {1} deutlich erschwert.

Dazu tritt aber auch eine rechnerische Unübersichtlichkeit, wenn das Lineare Gleichungssystem {1} algebraisch gelöst werden soll. Die schrittweise Substitution der einzelnen Variablen x , y und z kann auf rechnerisch verwirrende Zwischenresultate führen und ist nicht immer leicht nachvollziehbar.

Auch eine konzeptuell planvolle Lösungsstrategie wie das Gauß-Verfahren [3] bedarf einer sorgfältigen Interpretation.

Alternativ lassen sich Lineare Gleichungssysteme auch als Matrixgleichungen

$$\mathbf{A} \vec{x} = \vec{r} \quad \{2\}$$

schreiben und mit Hilfe inverser Matrizen

$$\vec{x} = \mathbf{A}^{-1} \vec{r} \quad \{3\}$$

lösen. Im dreidimensionalen Fall {1} müsste somit die zur Koeffizientenmatrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \quad \{4\}$$

inverse (3×3) -Matrix \mathbf{A}^{-1} ermittelt werden. In mehr als drei Dimensionen werden diese Lösungsverfahren allesamt recht unanschaulich, so dass sich Lehrende in diesem Fall oft auf ein pures Einüben des algebraischen Formalismus zurückziehen. Das ist bedauerlich, denn damit werden auch didaktische Chancen vergeben.

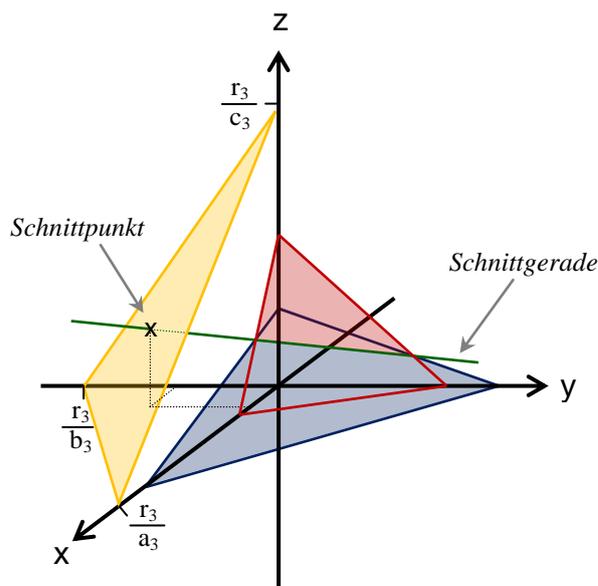


Abb.2: Graphische Lösung eines dreidimensionalen Linearen Gleichungssystems.

3. Alternative Interpretation Linearer Gleichungssysteme

Um bei der Diskussion Linearer Gleichungssysteme den didaktischen Handlungsspielraum zu erweitern, ist es sinnvoll, neben die zeilenweise Interpretation auch eine *spaltenorientierte* Interpretation zu setzen.

Dabei werden die Koeffizienten Linearer Gleichungssysteme spaltenweise zu Vektoren zusammengefasst. Anstelle einer einzigen Koeffizientenmatrix {4} treten im dreidimensionalen Fall die drei Koeffizientenvektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \quad \{5\}$$

Zusammen mit dem Ergebnisvektor

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} \quad \{6\}$$

ergibt sich dann anstelle von {2} die Vektorgleichung

$$\vec{a} x + \vec{b} y + \vec{c} z = \vec{r} \quad \{7\}$$

Hier werden die Koordinaten x , y und z des Lösungsvektors mathematisch als Koeffizienten gesehen, die graphisch durch Längenvergleich ermittelt werden können.

Im zweidimensionalen Fall (mit $a_3 = b_3 = r_3 = 0$ und $\vec{c} = 0$) könnte beispielsweise eine Lösung mit den Werten $x = 2$ und $y = 3$ der in Abbildung 3 gezeigten Realisierung entsprechen. Der Lösungswert für x ist dabei durch das Längenverhältnis der Parallelogrammseite $x \vec{a}$ und des Koeffizientenvektors \vec{a} festgelegt.

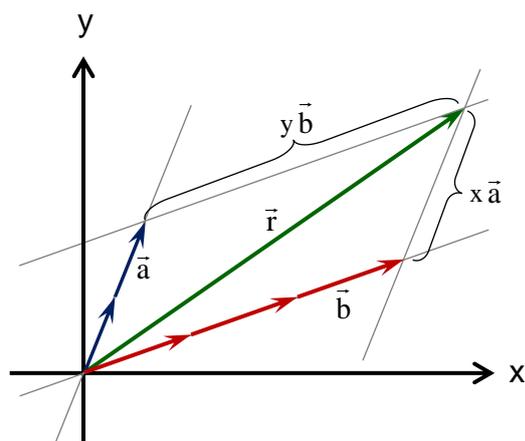


Abb.3: Alternative graphische Lösung eines zweidimensionalen linearen Gleichungssystems.

In analoger Art und Weise gelingt die graphische Bestimmung der Lösungswerte im dreidimensionalen

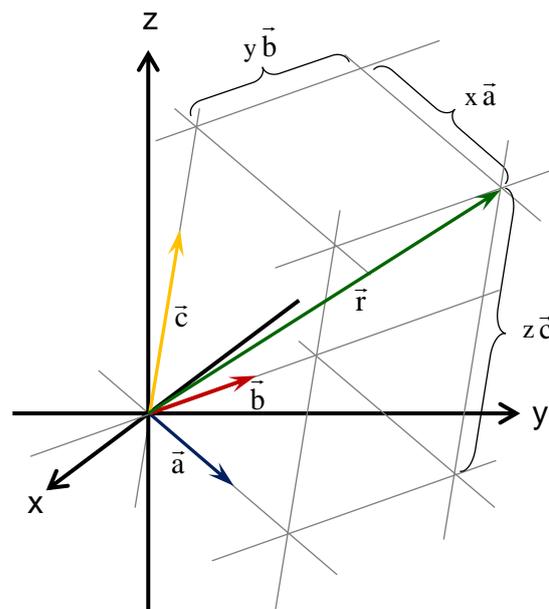


Abb.4: Alternative graphische Lösung eines dreidimensionalen linearen Gleichungssystems.

len Fall durch Längenvergleich der entsprechenden Seiten des von den Koeffizientenvektoren aufgespannten Parallelepeds (siehe Abbildung 4).

In höher-dimensionalen linearen Gleichungssystemen, die aus einer beliebigen Anzahl n an linearen Gleichungen bestehen, spannen die n Koeffizientenvektoren ein n -dimensionales Hyper-Parallelepiped auf. Hier ist eine zeichnerische Darstellung recht schwierig. Die geometrische Deutung ist jedoch ähnlich leicht nachvollziehbar und kann mit Hilfe der Geometrischen Algebra in stringenter, einfach durchschaubarer Weise in eine algebraische Darstellung übersetzt werden.

4. Geometrisierung Linearer Gleichungen

In der Geometrischen Algebra¹ werden die Basisvektoren des dreidimensionalen Raums durch die Pauli-Matrizen² σ_x , σ_y und σ_z beschrieben. Die grundlegenden algebraischen Eigenschaften der Pauli-Matrizen spiegeln das geometrische Verhalten von Basisvektoren wider. So bildet das Vertauschungsverhalten der Pauli-Matrizen

$$\sigma_x \sigma_y = -\sigma_y \sigma_x \quad \{8\}$$

$$\sigma_y \sigma_z = -\sigma_z \sigma_y \quad \{9\}$$

$$\sigma_z \sigma_x = -\sigma_x \sigma_z \quad \{10\}$$

die Anti-Kommutativität orthogonaler Basisvektoren

¹ Ausführliche Einführungen in die Geometrische Algebra in Lehrbuchform finden sich beispielsweise in [4], [5], [6], [7], [8].

² Historisch bedeutsam sind hier insbesondere die Darstellungen von Cartan [9] und Riesz [10] zur Spinortheorie als Vorläufer der zahlreichen Arbeiten von Hestenes wie z.B. [11].

algebraisch zuverlässig ab. Darüber hinaus sind die Basisvektoren normiert.

$$\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = 1 \quad \{11\}$$

Die Pauli-Matrix σ_x repräsentiert somit einen Schritt der Länge eins in x-Richtung, σ_y repräsentiert einen Schritt der Länge eins in y-Richtung und σ_z repräsentiert einen Schritt der Länge eins in z-Richtung,

Diese enge Verzahnung von algebraischer und geometrischer Deutung ist der eigentliche Kernpunkt der Geometrischen Algebra. Dieser Kernpunkt knüpft an das Bemühen der modernen Physik an, physikalische Beziehungen, die getrennt in algebraischen Formulierungen vorliegen, durch geometrische Einbettung so zu verknüpfen, dass der gemeinsame Strukturkern sichtbar wird.

Die Suche nach einer einzigen Weltformel folgt diesem Prinzip: Alle bekannten physikalischen Formeln sollten so zu verbinden sein, dass sie durch eine einzige Formel wiedergegeben werden können.

Genau dies führen wir jetzt für die drei getrennten linearen Gleichungen {1} durch. Sie werden durch geometrische Zuordnung zu einer einzigen Gleichung verbunden. Der ersten Gleichung wird die x-Richtung zugeordnet, indem alle Terme mit dem entsprechenden Basisvektor σ_x multipliziert werden. Die zweite Gleichung wird mit σ_y multipliziert und die dritte Gleichung mit σ_z :

$$\begin{aligned} (a_1 x + b_1 y + c_1 z) \sigma_x &= r_1 \sigma_x \\ (a_2 x + b_2 y + c_2 z) \sigma_y &= r_2 \sigma_y \\ (a_3 x + b_3 y + c_3 z) \sigma_z &= r_3 \sigma_z \end{aligned} \quad \{12\}$$

Die Gleichungen {12} stellen geometrisch nun keine drei getrennten Gleichungen mehr dar, sondern nur noch eine einzige Gleichung {13}, die räumlich eingebettet ist:

$$\begin{aligned} a_1 x \sigma_x + b_1 y \sigma_x + c_1 z \sigma_x \\ + a_2 x \sigma_y + b_2 y \sigma_y + c_2 z \sigma_y \\ + a_3 x \sigma_z + b_3 y \sigma_z + c_3 z \sigma_z \\ = r_1 \sigma_x + r_2 \sigma_y + r_3 \sigma_z \end{aligned} \quad \{13\}$$

Diese Gleichung {13} stellt das geometrisch-algebraische Analogon zur Vektorgleichung {7} dar.

An die Stelle der Spaltenvektoren {5} und {6} treten mithin die „Pauli-Vektoren“ als folgende Linearkombinationen der Pauli-Matrizen:

$$\mathbf{a} = a_1 \sigma_x + a_2 \sigma_y + a_3 \sigma_z \quad \{14\}$$

$$\mathbf{b} = b_1 \sigma_x + b_2 \sigma_y + b_3 \sigma_z \quad \{15\}$$

$$\mathbf{c} = c_1 \sigma_x + c_2 \sigma_y + c_3 \sigma_z \quad \{16\}$$

und

$$\mathbf{r} = r_1 \sigma_x + r_2 \sigma_y + r_3 \sigma_z \quad \{17\}$$

Gleichung {13} lautet damit kompakt

$$\mathbf{a} x + \mathbf{b} y + \mathbf{c} z = \mathbf{r} \quad \{18\}$$

Diese Formulierung erbringt einen enormen konzeptuellen Gewinn gegenüber der Darstellung von Vektoren als Spaltenvektoren, da geometrische Eigenschaften nun direkt algebraisch kodiert vorliegen.

So zerfällt das Produkt zweier Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{b}

$$\mathbf{a} \mathbf{b} = \mathbf{a} \bullet \mathbf{b} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \quad \{19\}$$

in zwei geometrisch bedeutsame Anteile. Der Ausdruck $\mathbf{a} \bullet \mathbf{b}$ ist kommutativ

$$\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = \frac{1}{2} (\mathbf{a} \mathbf{b} + \mathbf{b} \mathbf{a}) \quad \{20\}$$

und wird inneres Produkt genannt. Er beschreibt die Multiplikation parallel liegender Komponenten der beiden Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} und ist eng mit dem Kosinus des von \mathbf{a} und \mathbf{b} eingeschlossenen Winkels verbunden.

Werden zwei senkrecht zueinander stehende Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{a}_\perp mit Hilfe des inneren Produktes {20} miteinander multipliziert, so ergibt sich Null:

$$\mathbf{a} \bullet \mathbf{a}_\perp = 0 \quad \{21\}$$

Der Ausdruck $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ ist antikommutativ

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \frac{1}{2} (\mathbf{a} \mathbf{b} - \mathbf{b} \mathbf{a}) \quad \{22\}$$

und wird äußeres Produkt genannt. Er beschreibt die Multiplikation senkrecht liegender Komponenten der beiden Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} und führt auf einen flächenartigen Bivektor, dessen Flächeninhalt unter anderem durch den Sinus des eingeschlossenen Winkels bestimmt wird.

Werden zwei parallel zueinander liegende Vektoren \mathbf{a} und $\mathbf{a}_\parallel = x \mathbf{a}$ mit Hilfe des äußeren Produktes {22} miteinander multipliziert, so ergibt sich Null:

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{a}_\parallel = \mathbf{a} \wedge (x \mathbf{a}) = 0 \quad \{23\}$$

In analoger Art und Weise werden innere und äußere Produkte höherdimensionaler Multivektoren definiert, wobei hier auf die Ausführungen in den in Fußnote¹ aufgeführten Büchern verwiesen wird.

Darüber hinaus sind sowohl das geometrische Produkt wie auch das äußere Produkt mehrerer Vektoren assoziativ.

$$(\mathbf{a} \mathbf{b}) \mathbf{c} = \mathbf{a} (\mathbf{b} \mathbf{c}) = \mathbf{a} \mathbf{b} \mathbf{c} \quad \{24\}$$

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \mathbf{c} = \mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} \quad \{25\}$$

Der geometrischen Interpretation von Gleichung {25} kommt bei der Lösung Linearer Gleichungssysteme noch eine entscheidende Bedeutung zu, die in den folgenden Abschnitten diskutiert wird.

Da diese Beziehungen historisch vor allem unter Rückgriff auf physikalische Erklärungsschemata eingeführt und diskutiert wurden, kann hier mit recht von einer physikdidaktisch motivierten Mathematik gesprochen werden.

Vor allem zu Beginn des vergangenen Jahrhunderts, als im Kontext der aufkommenden Quantentheorie physikalische Größen mit Hilfe des Matrizenkalküls erörtert wurden, spielte die Pauli-Algebra und deren höher-dimensionale Verallgemeinerungen (wie z.B. die Dirac-Algebra) eine tragende Rolle im Entwicklungsprozess neuer mathematisch-physikalischer Ideen.

5. Lösung Linearer Gleichungssysteme

Um nun eine Lösung eines Linearen Gleichungssystems zu ermitteln, sollte eine Vorgehensweise gefunden werden, die die Anzahl der Unbekannten sukzessive reduziert, bis in der letztendlichen Lösungsgleichung nur noch eine Unbekannte verbleibt.

Im dreidimensionalen Fall {18} bedeutet dies beispielsweise, dass versucht wird, zuerst die Variable x im Linearen Gleichungssystem {18} zu eliminieren. Da x als Skalar mit dem Koeffizientenvektor \mathbf{a} verknüpft ist, bietet sich an, den gesamten Vektor $\mathbf{a}x$ in {18} zu eliminieren, indem die Anti-Kommutativität des äußeren Produktes {23} genutzt wird.

Die linksseitige äußere Multiplikation von \mathbf{a} mit dem gesamten Gleichungssystem {18} führt dazu, dass der Term $\mathbf{a}x$ entfällt:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \wedge (\mathbf{a}x + \mathbf{b}y + \mathbf{c}z) &= \mathbf{a} \wedge \mathbf{r} \\ \mathbf{a} \wedge \mathbf{a}x + \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}y + \mathbf{a} \wedge \mathbf{c}z &= \mathbf{a} \wedge \mathbf{r} \\ \Rightarrow \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}y + \mathbf{a} \wedge \mathbf{c}z &= \mathbf{a} \wedge \mathbf{r} \end{aligned} \quad \{26\}$$

In einem zweiten Schritt kann dann beispielsweise der Term, der die Variable z enthält, durch eine rechtsseitige äußere Multiplikation mit \mathbf{c} zum Verschwinden gebracht werden:

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}y + \mathbf{a} \wedge \mathbf{c}z) \wedge \mathbf{c} &= \mathbf{a} \wedge \mathbf{r} \wedge \mathbf{c} \\ \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}y + \mathbf{a} \wedge \mathbf{c} \wedge \mathbf{c}z &= \mathbf{a} \wedge \mathbf{r} \wedge \mathbf{c} \\ \Rightarrow \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}y &= \mathbf{a} \wedge \mathbf{r} \wedge \mathbf{c} \end{aligned} \quad \{27\}$$

Diese Gleichung muss nun nur noch linksseitig mit der Inversen des Trivektors $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$ multipliziert werden, um einen Lösungswert für y zu erhalten.

$$y = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c})^{-1} (\mathbf{a} \wedge \mathbf{r} \wedge \mathbf{c}) \quad \{28\}$$

Da im dreidimensionalen Raum nur ein einziges trivektorielles Basiselement $\sigma_x \sigma_y \sigma_z$ existiert (und sich somit in $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$ und $\mathbf{a} \wedge \mathbf{r} \wedge \mathbf{c}$ gegenseitig kompensiert), entspricht die Lösungsgleichung {28} dem im vorangegangenen Abschnitt diskutierten Längenvergleich. Er wird in {28} jedoch als Volumenvergleich formuliert.

Das Volumen des durch die Vektoren \mathbf{a} , \mathbf{r} und \mathbf{c} aufgespannten Parallelepipeds (siehe Abbildung 5) wird mit dem Volumen des durch alle Koeffizientenvektoren \mathbf{a} , \mathbf{b} und \mathbf{c} aufgespannten Parallelepipeds verglichen.

In analoger Weise können mit Hilfe des äußeren Produkts die restlichen Lösungswerte des Linearen Gleichungssystems {18} bestimmt werden.

$$x = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c})^{-1} (\mathbf{r} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) \quad \{29\}$$

$$z = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c})^{-1} (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{r}) \quad \{30\}$$

Diese Gleichungen können auch memotechnisch leicht zugänglich gelernt werden. Im zweiten Faktor wird lediglich der Koeffizientenvektor der zu ermittelnden Variablen durch den Ergebnisvektor \mathbf{r} ersetzt.

Ähnlich einfach verhält sich die Bestimmung der Lösungswerte eines höher-dimensionalen Linearen

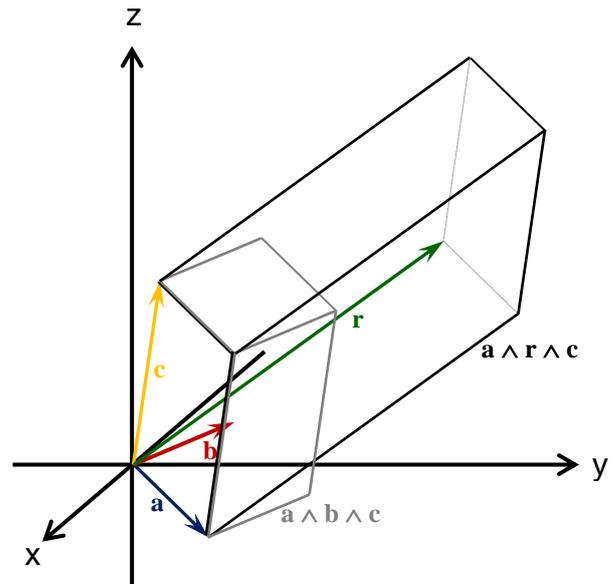


Abb.5: Vergleich der durch die Koeffizientenvektoren und den Ergebnisvektor aufgespannten Parallelepipede.

Gleichungssystems aus n Gleichungen, die auf den Volumenvergleich n -dimensionaler Hyper-Parallelepipede führen. Die Lösungsgleichungen lauten:

$$\begin{aligned} x_1 &= (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \dots \wedge \mathbf{e}_n)^{-1} (\mathbf{r} \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_4 \dots \mathbf{e}_{n-1} \wedge \mathbf{e}_n) \\ x_2 &= (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \dots \wedge \mathbf{e}_n)^{-1} (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{r} \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_4 \dots \mathbf{e}_{n-1} \wedge \mathbf{e}_n) \\ x_3 &= (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \dots \wedge \mathbf{e}_n)^{-1} (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{r} \wedge \mathbf{e}_4 \dots \mathbf{e}_{n-1} \wedge \mathbf{e}_n) \\ x_4 &= (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \dots \wedge \mathbf{e}_n)^{-1} (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{r} \dots \mathbf{e}_{n-1} \wedge \mathbf{e}_n) \\ &\vdots \\ x_i &= (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \dots \wedge \mathbf{e}_n)^{-1} (\mathbf{e}_1 \wedge \dots \mathbf{e}_{i-1} \wedge \mathbf{r} \wedge \mathbf{e}_{i+1} \dots \wedge \mathbf{e}_n) \\ &\vdots \\ x_n &= (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \dots \wedge \mathbf{e}_n)^{-1} (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_4 \dots \wedge \mathbf{r}) \end{aligned} \quad \{31\}$$

6. Bestimmung inverser Matrizen

Wie in Abschnitt 2 ausgeführt, können Lineare Gleichungssysteme auch mit Hilfe der Inversen der Koeffizientenmatrix \mathbf{A}^{-1} gelöst werden, indem diese Inverse mit dem Ergebnisvektor im Sinne von Gleichung {3} multipliziert wird. Darüber hinaus stellen inverse Matrizen auch bei der Lösung anderer Matrixgleichungen ein wichtiges mathematisches Hilfsmittel dar.

Umso erfreulicher ist es, dass inverse Matrizen in dieser physikorientierten Geometrischen Algebra leicht im dreidimensionalen Fall mit Hilfe der Gleichungen {28}, {29} und {30} bzw. allgemein mit Hilfe der Gleichungen {31} bestimmt werden können, da die Definition inverser Matrizen über

$$\mathbf{A} \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E} \quad \{32\}$$

auf insgesamt n Lineare Gleichungssysteme führt. Diese Gleichungssysteme erhält man, wenn die Einheitsmatrix \mathbf{E} als spaltenweise Komposition der n Basisvektoren interpretiert wird.

Im dreidimensionalen Fall bedeutet dies, dass die erste Spalte durch den Basisvektor in x -Richtung σ_x ausgedrückt wird. Die zweite Spalte der Einheitsmatrix \mathbf{E} beschreibt einen Einheitsschritt in y -Richtung und wird durch σ_y beschrieben, während die dritte Spalte von \mathbf{E} dem Basisvektor σ_z entspricht.

Im Falkschen Schema {33} wird diese Aufteilung der Definitionsgleichung {32} von (3×3) -Matrizen in drei verschiedene Lineare Gleichungssysteme besonders übersichtlich sichtbar.

$$\begin{array}{ccc|ccc}
 \mathbf{A} & & & \mathbf{A}^{-1} & = & \mathbf{E} \\
 & & & \begin{array}{ccc} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{array} & & \\
 \hline
 a_1 & b_1 & c_1 & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
 a_2 & b_2 & c_2 & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\
 a_3 & b_3 & c_3 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\
 \hline
 & & & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\
 & & & 1\sigma_x + 0\sigma_y + 0\sigma_z = \sigma_x & 0\sigma_x + 1\sigma_y + 0\sigma_z = \sigma_y & 0\sigma_x + 0\sigma_y + 1\sigma_z = \sigma_z
 \end{array} \quad \{33\}$$

Damit ergeben sich die drei separaten Linearen Gleichungssysteme, die im Falkschen Schema {33} auch farblich getrennt hervorgehoben werden:

$$\mathbf{a} s_{11} + \mathbf{b} s_{21} + \mathbf{c} s_{31} = \sigma_x \quad \{34\}$$

$$\mathbf{a} s_{12} + \mathbf{b} s_{22} + \mathbf{c} s_{32} = \sigma_y \quad \{35\}$$

$$\mathbf{a} s_{13} + \mathbf{b} s_{23} + \mathbf{c} s_{33} = \sigma_z \quad \{36\}$$

Sie können vollständig unabhängig voneinander gelöst werden, indem die Gleichungen {28}, {29} und {30} entsprechend umformuliert werden. Damit lauten die neun Elemente der inversen (3×3) -Matrix \mathbf{A}^{-1} :

$$s_{11} = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c})^{-1} (\sigma_x \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) \quad \{37\}$$

$$s_{21} = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c})^{-1} (\mathbf{a} \wedge \sigma_x \wedge \mathbf{c}) \quad \{38\}$$

$$s_{31} = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c})^{-1} (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \sigma_x) \quad \{39\}$$

$$s_{12} = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c})^{-1} (\sigma_y \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) \quad \{40\}$$

$$s_{22} = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c})^{-1} (\mathbf{a} \wedge \sigma_y \wedge \mathbf{c}) \quad \{41\}$$

$$s_{32} = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c})^{-1} (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \sigma_y) \quad \{42\}$$

$$s_{13} = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c})^{-1} (\sigma_z \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) \quad \{43\}$$

$$s_{23} = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c})^{-1} (\mathbf{a} \wedge \sigma_z \wedge \mathbf{c}) \quad \{44\}$$

$$s_{33} = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c})^{-1} (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \sigma_z) \quad \{45\}$$

In vollständig analoger Art und Weise können mit dieser Strategie durch entsprechende Umformung der Gleichungen {31} und Interpretation der n -di-

mensionalen Einheitsmatrix als Komposition von n Basisvektoren auch Inverse höher-dimensionaler Matrizen ermittelt werden.

Die höher-dimensionalen Basisvektoren werden dabei als verallgemeinerte Pauli-Matrizen aufgefasst, deren mögliche Matrizenrepräsentation mit Hilfe der direkten Multiplikation (im Sinne des Zehfuß-Kronecker-Produkts [12], [13], [14]) ermittelt werden können.

7. Determinanten

Die Vorgehensweise bei der Ermittlung inverser Matrizen kann nun mit der konventionellen Methode zur Bestimmung inverser Matrizen mit Hilfe der Cramerschen Regel verglichen werden. Dabei werden Unterdeterminanten verwendet, die im dreidimensionalen Fall {46} folgendermaßen strukturiert zur Inversen zusammengefasst werden:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{pmatrix} +\det \mathbf{A}_{11} & -\det \mathbf{A}_{21} & +\det \mathbf{A}_{31} \\ -\det \mathbf{A}_{12} & +\det \mathbf{A}_{22} & -\det \mathbf{A}_{32} \\ +\det \mathbf{A}_{13} & -\det \mathbf{A}_{23} & +\det \mathbf{A}_{33} \end{pmatrix} \quad \{46\}$$

In geometrisch-algebraischer Schreibung der Gleichungen {37} bis {45} lautet die Inverse

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}} \begin{pmatrix} \sigma_x \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} & \sigma_y \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} & \sigma_z \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} \\ \mathbf{a} \wedge \sigma_x \wedge \mathbf{c} & \mathbf{a} \wedge \sigma_y \wedge \mathbf{c} & \mathbf{a} \wedge \sigma_z \wedge \mathbf{c} \\ \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \sigma_x & \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \sigma_y & \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \sigma_z \end{pmatrix} \quad \{47\}$$

Der Zusammenhang zwischen Determinanten und Parallelepiped (Abb. 5) ist offensichtlich. So erhält die in vielen Lehrbüchern oft nur rein algebraisch dargestellte Determinantenberechnung eine geometrisch leicht zugängliche Deutung.

Die Determinante der (3×3) -Matrix \mathbf{A} von Gl. {4} entspricht dem orientierten Rauminhalt des von den Koeffizientenvektoren \mathbf{a} , \mathbf{b} und \mathbf{c} aufgespannten Parallelepipeds. Sie ist ein Skalar und stellt den um die Basiseinheiten reduzierten Trivektor

$$\det \mathbf{A} = -(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) \sigma_x \sigma_y \sigma_z \quad \{48\}$$

dar. Entsprechend können die neun Unterdeterminanten \mathbf{A}_{ij} der konventionellen Darstellung {46} geometrisch jeweils als alternierend orientierter Rauminhalt der durch einen Basisvektor und zwei Koeffizientenvektoren aufgespannten Parallelepipede

$$\det \mathbf{A}_{11} = -(\sigma_x \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) \sigma_x \sigma_y \sigma_z \quad \{49\}$$

$$\det \mathbf{A}_{12} = +(\mathbf{a} \wedge \sigma_x \wedge \mathbf{c}) \sigma_x \sigma_y \sigma_z \quad \{50\}$$

$$\det \mathbf{A}_{13} = -(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \sigma_x) \sigma_x \sigma_y \sigma_z \quad \{51\}$$

$$\det \mathbf{A}_{21} = +(\sigma_y \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) \sigma_x \sigma_y \sigma_z \quad \{52\}$$

$$\det \mathbf{A}_{22} = -(\mathbf{a} \wedge \sigma_y \wedge \mathbf{c}) \sigma_x \sigma_y \sigma_z \quad \{53\}$$

$$\det \mathbf{A}_{23} = +(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \sigma_y) \sigma_x \sigma_y \sigma_z \quad \{54\}$$

$$\det \mathbf{A}_{31} = -(\sigma_z \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) \sigma_x \sigma_y \sigma_z \quad \{55\}$$

$$\det \mathbf{A}_{32} = +(\mathbf{a} \wedge \sigma_z \wedge \mathbf{c}) \sigma_x \sigma_y \sigma_z \quad \{56\}$$

$$\det \mathbf{A}_{33} = -(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \sigma_z) \sigma_x \sigma_y \sigma_z \quad \{57\}$$

gedeutet werden. Die schachbrettmusterartige Vorzeichenzuordnung der Adjunkten ergibt sich dabei zwanglos als Artefakt der Anti-Kommutativität des äußeren Produkts {22}.

In analoger Art und Weise kann gezeigt werden, dass sich die Inversen höher-dimensionaler Matrizen durch die entsprechenden orientierten Hyper-Volumina der dann n-dimensionalen Hyper-Parallelepipede berechnen und geometrisch deuten lassen.

8. Matrixgleichungen & Ausblick auf Tensoren

Ist in einer Matrixgleichung

$$\mathbf{A} \mathbf{B} = \mathbf{C} \quad \{58\}$$

die unbekannte ($n \times \ell$)-Matrix \mathbf{B} zu ermitteln, kann diese Gleichung {58} in insgesamt ℓ Lineare Gleichungssysteme zerlegt werden. Die Darstellung im Falkschen Schema gestattet dabei analog zur Darstellung {33} eine direkte spaltenweise Zuordnung der ℓ Ergebnisvektoren.

Die n Lösungswerte jedes Linearen Gleichungssystems können sodann wieder mit Hilfe der Gleichungen {31} berechnet werden.

Ähnlich kann vorgegangen werden, wenn in Gl. {58} die unbekannte ($m \times n$)-Matrix \mathbf{A} zu berechnen wäre. Dabei führt die Transposition {59} auf eine veränderte Reihenfolge der Matrizen, so dass die ($n \times m$)-Matrix \mathbf{A}^T in

$$\mathbf{B}^T \mathbf{A}^T = \mathbf{C}^T \quad \{59\}$$

bei spaltenweiser Zerlegung auf insgesamt m Lineare Gleichungssysteme führt. Jedes dieser Gleichungssysteme liefert wieder n Lösungswerte.

Dieser Zugang zur Linearen Algebra besticht nicht nur durch seine klare konzeptuelle Grundstruktur, die geometrisch und didaktisch durch die Möglichkeit einer einfachen Veranschaulichung überzeugt. Er überzeugt auch durch die problemlose Zugänglichkeit für Lernende ohne eine allzu umfassende mathematische Vorbildung.

Ausgefeilte mathematische Vorkenntnisse sind nicht notwendig³, so dass die Lineare Algebra in dieser Darstellung sowohl im schulischen Bereich der Sek. II wie auch in hochschulischen Einstiegsveranstaltungen eingeführt und diskutiert werden kann. Eine solche hochschulische Umsetzung wird im folgenden Abschnitt vorgestellt.

Darüber hinaus überzeugt jedoch auch die Anschlussfähigkeit an die moderne mathematische Physik, in der die Tensorrechnung eine wesentliche Rolle spielt. Hier heben Doran und Lasenby [6, Abs. 4.4] insbesondere hervor, dass die in der Geometrischen Algebra mögliche koordinatenfreie Darstellung zu einer erheblichen konzeptuellen Vereinfachung führt.

³ „An alternative treatment is to axiomatically introduce the wedge product, and then demonstrate that this can be used directly to solve linear systems. This ... does not require sophisticated math skills to understand.“ [15]

9. Wirtschaftsmathematische Umsetzung

Zahlreiche ökonomische Beziehungen können durch lineare Gleichungen ausgedrückt oder angenähert werden. Deshalb stellt die Wirtschaftsmathematik eines der Fachgebiete dar, in der eine moderne, physikalisch motivierte, jedoch von der Physik emanzipierte Fassung der Linearen Algebra eine tiefer gehende Wirkung zu entfalten vermag.

Ein solcher Versuch, die Geometrische Algebra als mathematische Sprache auch in diesem relativ physikfernen Bereich ein- und didaktisch umzusetzen, wurde im Wirtschaftsmathematik-Kurs an der Hochschule für Wirtschaft und Recht (HWR Berlin) vom Autor unternommen.

An der HWR Berlin wird die Wirtschaftsmathematik als Poolveranstaltung für die Anfangssemester der wirtschaftswissenschaftlichen Studiengänge in seminaristischer Form als kombinierte Vorlesungs-, Übungs- und Seminarveranstaltung mit hohen Eigenaktivitätsanteilen der Studierenden durchgeführt. Im Modellstudienplan ist die Kursbelegung für Studierende im ersten Semester vorgesehen.

Traditionell wird dieser Kurs an der HWR Berlin sowohl auf Deutsch wie auch auf Englisch angeboten. Die Kursinhalte (siehe Abb. 6) sind identisch.

Modul Wirtschaftsmathematik

Lerngebiet Quantitative Methoden

Lehrmethode Seminaristischer Unterricht

Lehrinhalte

- Lineare Funktionen, mehrdimensionale lineare Modelle, Matrizenrechnung,
- Lineare Gleichungssysteme einschließlich Lösungsverfahren und ökonomischen Anwendungen,
- Zins- und Rentenrechnung,
- Differentialrechnung für Funktionen mit einer und mehreren Veränderlichen,
- Optimierung mit ökonomischen Anwendungen.

Abb.6: Modulbeschreibung des Wirtschaftsmathematik-kurses (LV-Nr. 200601) der HWR Berlin. Der englischsprachige Kurs „Mathematics for Business and Economics“ (LV-Nr. 200691) ist inhaltsgleich.

Da die Lehrinhalte des deutsch- und englischsprachigen Kurses inhaltlich identisch [16] sind, erfolgt auch die Kursdurchführung durch diejenigen Lehrenden, die beide Kurse unterrichten, zumeist parallel. Im Wintersemester 2014/2015 war eine vollständig parallele Kursdurchführung jedoch nicht sinnvoll.

Zum einen standen bis zur Klausur für den englischsprachigen Kurs mehr Termine zur Verfügung als für den deutschsprachigen Kurs, so dass inhaltlich ein größeres Spektrum abgedeckt und Themenbereiche vertieft bearbeitet werden konnten.

Zum anderen wurde der englischsprachige Kurs in diesem Semester von einem hohen Anteil an Austauschstudentinnen und Austauschstudenten belegt. Diese Studierenden anderer Hochschulen, die für ein oder mehrere Semester an der HWR Berlin vorwiegend englischsprachig studieren, sind aus höheren Semestern und hatten die Wirtschafts- und Finanzmathematik zumeist bereits an ihren Heimathochschulen belegt.

So wiesen etwa die Hälfte der Kursteilnehmerinnen und Kursteilnehmer bereits zu Kursbeginn fundierte Kenntnisse der eigentlich erst neu zu vermittelten Themenbereiche auf.

Dies führte zu dem, dass die Eigenübungsphasen, in denen Studierende selbständig problemorientiert Aufgaben bearbeiteten, im Vergleich zum deutschsprachigen Kurs zeitlich deutlich weniger Ressourcen beanspruchten. Auch die Studierenden der ersten Semester profitierten von diesem positiven Lernklima, da die Austauschstudenten der höheren Semester hier in den Gruppenarbeitsphasen ihr bereits vorhandenes Wissen weitergeben konnten.

Aufgrund dieser sehr effektiven Durchführung der Eigenübungsphasen wurden weitere zeitliche Reserven eröffnet. Das führte dazu, dass im englischsprachigen Kurs zusätzlich zu den konventionellen Kursinhalten eine Behandlung der Linearen Algebra aus geometrisch-algebraischer Perspektive erfolgen konnte.

Diese zusätzliche Schwerpunktsetzung hatte auch den Vorteil, dass Austauschstudierende, die die Kursinhalte bereits vor Kursbeginn relativ gut beherrschten, zusätzlich motiviert wurden, indem ein tatsächlich auch für sie originär neuer mathematischer Ansatz eingeführt und diskutiert wurde.

Die Erörterung der Geometrischen Algebra erfolgte dabei in drei Phasen. Zum einen wurden die Grundlagen der Geometrischen Algebra unabhängig von wirtschaftlichen und ökonomischen Anwendungen eingeführt. Dieser 6 x 45 Minuten lange Einstiegsteil orientierte sich an der ursprünglich physikalisch motivierten Behandlung der geometrischen Struktur des Raumes und der damit verbundenen Symmetrioperationen von Reflexion und Rotation (siehe die als Anhang beigefügten OHP-Folien [17]).

Zentrale Rolle spielte dabei insbesondere die geometrische Interpretation von innerem $\{20\}$ und äußerem Produkt $\{22\}$, auf die im zweiten Teil die Lösung Linearer Gleichungssysteme aufbaut. Darüber hinaus wurden auch die Division durch Vektoren sowie das Sandwich-Produkt vertieft erörtert.

Im zweiten Kurskomplex zur Geometrischen Algebra, der einen Kurstermin im Umfang von 4 x 45 Minuten umfasste, wurde nach einer kurzen Wiederholung der Grundlagen als Schwerpunkt die Lösung Linearer Gleichungssysteme aus zwei und aus drei linearen Gleichungen behandelt (siehe die als Anhang beigefügten OHP-Folien [18]).

Neben einer vertieften Diskussion der geometrischen Bedeutung von Determinanten wurde ausführlich auf wirtschaftliche Anwendungsbeispiele aus dem Bereich der Materialverflechtung eingegangen.

Dieser Anwendungsbereich war zuvor im Rahmen der konventionellen Behandlung wirtschaftsmathematischer Fragestellungen im Kurs erörtert worden, so dass die Studierenden hier das lehrbuchfixierte traditionelle Vorgehen mit der moderneren physikdidaktisch motivierten Themenaufarbeitung und Problemlösung vergleichen konnten.

Abschließend wurde in einem dritten und leider nur relativ kurzen Teil von 2 x 45 Minuten diskutiert, wie mit Hilfe des direkten Produktes von Zehfuss und Kronecker auch höher-dimensionale Lineare Gleichungssysteme gelöst werden konnten.

Hier bietet sich bei einer zeitlich großzügigeren Planung insbesondere auch an, vertieft auf die Input-Output-Analyse einzugehen, die als weiteres Anwendungsbeispiel einen Vergleich von traditionellem und physikdidaktisch motiviertem Vorgehen ermöglicht (siehe die als Anhang beigefügten OHP-Folien [19]).

10. Erfahrungen und Ausblick

Das grundlegende Ziel, wirtschaftsmathematische Fragestellungen im Kontext der Linearen Algebra unter Bezug auf die physikdidaktisch motivierte Geometrische Algebra in einer Anfängervorlesung einzuführen, vertieft zu diskutieren und auf wirtschaftliche Themenfelder anzuwenden, wurde erreicht und von den Studierenden auch gut aufgenommen.

Das Lernklima im Kurs, das Engagement der Studierenden wie auch die Rückmeldungen nach Kursdurchführung waren durchgängig positiv. Zwar mag die Kurszusammensetzung aufgrund des hohen Anteils an Austauschstudierenden aus höheren Semestern nicht der üblichen Teilnehmerstruktur entsprechen. Dennoch kann davon ausgegangen werden, dass eine solche Kursdurchführung bei entsprechender Verfügbarkeit zeitlicher Ressourcen auch mit leistungsschwächeren Studenten gelingt.

Zu diesem Zweck scheint es sinnvoll, die hier noch sehr enge Anlehnung an einen physikalisch geprägten Einstieg didaktisch weiter zu reduzieren, inhaltlich weiter zu vereinfachen und noch stärker von der physikalischen Ideenprägung zu entkoppeln.

Für das Sommersemester 2015 ist deshalb geplant, eine solche didaktisch reduzierte Version der modernen Linearen Algebra auf geometrisch-algebraischer Grundlage in einem deutschsprachigen Kurs mit tendenziell mathematisch eher zurückhaltenden Studierenden zu erproben.

Ein Fazit kann aber jetzt schon gezogen werden: Die physikalisch und physikdidaktisch motivierte Mathematik der Geometrischen Algebra kann auch außerhalb der Physik erfolgreich als mathematisches Instrument eingesetzt werden.

11. Literatur

- [1] Hestenes, David (2003): Oersted Medal Lecture 2002: Reforming the Mathematical Language of Physics. In: American Journal of Physics, Vol. 71, No. 2, S. 104–121.
- [2] Parra Serra, Josep Manel (2009): Clifford Algebra and the Didactics of Mathematics. In: Advances in Applied Clifford Algebras, No. 3/4, Vol. 19, S. 819–834.
- [3] Horn, Martin Erik (2016): Physikdidaktische Interpretation des Gaußschen Algorithmus. In Vorbereitung.
- [4] Snygg, John (1997): Clifford Algebra. A Computational Tool for Physicists. Oxford University Press, New York, Oxford.
- [5] Hestenes, David (2002): New Foundations for Classical Mechanics. Zweite Auflage. Kluwer Academic Publishers, New York, Boston.
- [6] Doran, Chris; Lasenby, Anthony (2003): Geometric Algebra for Physicists. Cambridge University Press, Cambridge.
- [7] Vince, John (2008): Geometric Algebra for Computer Graphics. Springer-Verlag, London, Berlin.
- [8] Horn, Martin Erik (2012): Pauli-Algebra und S_3 -Permutationsalgebra – Eine algebraische und geometrische Einführung. Elektronische Veröffentlichung unter www.bookboon.com/de, Ventus Publishing ApS, London.
- [9] Cartan, Élie (1981): The Theory of Spinors. Unabridged republication of the complete English translation first published in 1966. Dover Publications, New York.
- [10] Riesz, Marcel (1958): Clifford Numbers and Spinors. Chapters I – IV, Lecture Series No. 38, Lectures delivered October 1957 – January 1958. The Institute for Fluid Dynamics and Applied Mathematics, University of Maryland, College Park.
- [11] Hestenes, David (1967): Real Spinor Fields. In: Journal of Mathematical Physics, No. 4, Vol. 8, S. 798–808.
- [12] Steeb, Willi-Hans (1991): Kronecker Product of Matrices and Applications. Bibliographisches Institut/Wissenschaftsverlag, Mannheim, Wien, Zürich.
- [13] Henderson, Harold V.; Pukelsheim, Friedrich; Searle, Shayle Robert (1983): On the History of the Kronecker Product. In: Linear and Multilinear Algebra, No. 2, Vol. 14, S. 113–120.
- [14] Horn, Martin Erik (2011): Geometrische Algebra in höheren Dimensionen. In: Helmuth Grötzebauch, Volkhard Nordmeier (Hrsg.): PhyDid B – Didaktik der Physik, Beiträge zur DPG-Frühjahrstagung des Fachverbands Didaktik der Physik in Münster, Beitrag 18.5.
- [15] Wikipedia (2014): Comparison of Vector Algebra and Geometric Algebra. Internetdownload am 23. Nov. 2014 unter der URL: http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Comparison_of_vector_algebra_and_geometric_algebra&oldid=621214227
- [16] HWR Berlin (2014): Elektronisches Vorlesungsverzeichnis der Hochschule für Wirtschaft und Recht Berlin, Sommersemester 2014. Internetdownload am 23. Nov. 2014 unter der URL: <https://campus4u.hwr-berlin.de>

Dem Beitrag beigefügte Dateien

- [17] Horn, Martin Erik (2014): Modern Linear Algebra. A Geometric Algebra crash course. Part I: Basics & Introduction. OHP-Folien des Kurses „Mathematics for Business and Economics“ (Stand: 31. Dez. 2014), LV-Nr. 200 691.01, Hochschule für Wirtschaft und Recht Berlin / Berlin School of Economics and Law, Wintersemester 2014/2015.
- [18] Horn, Martin Erik (2014): Modern Linear Algebra. A Geometric Algebra crash course. Part II: Solving Systems of Linear Equations. OHP-Folien des Kurses „Mathematics for Business and Economics“ (Stand: 31. Dez. 2014), LV-Nr. 200 691.01, Hochschule für Wirtschaft und Recht Berlin / Berlin School of Economics and Law, Wintersemester 2014/2015.
- [19] Horn, Martin Erik (2015): Modern Linear Algebra. A Geometric Algebra crash course. Part III: The Direct Product & Solving Higher-Dimensional Systems of Linear Equations. OHP-Folien des Kurses „Mathematics for Business and Economics“ (Stand: 28. Jan. 2015), LV-Nr. 200 691.01, Hochschule für Wirtschaft und Recht Berlin / Berlin School of Economics and Law, Wintersemester 2014/2015.