

# Berechnung und Messung der Sonnenscheindauer auf beliebigen Dachschrägen

Tran Ngoc Chat\*, Adrian Weber\*

\*Universität Siegen, Didaktik der Physik, Adolf-Reichwein-Straße 2, 57068 Siegen  
tran@physik.uni-siegen.de, weber@physik.uni-siegen.de

## Kurzfassung

In diesem Artikel werden Aufbau und Durchführung eines Demonstrationsversuchs vorgestellt, mit dem die Sonnenscheindauer für beliebige Orte quantitativ und auf einfache Weise gemessen werden kann. Insbesondere kann durch eine geeignete Erweiterung die Sonnenscheindauer für beliebig ausgerichtete Dachflächen ermittelt werden. So können Lernende selbstständig auf experimentelle Weise die Einflüsse auf die Sonnenscheindauer untersuchen, ohne dabei auf die komplizierte sphärische Geometrie zurückgreifen zu müssen. Die anhand des Versuches gewonnenen Erkenntnisse können schließlich mit theoretischen Berechnungen verglichen werden und liefern sehr gute Übereinstimmungen.

## 1. Einleitung

Aus der Alltagserfahrung ist bekannt, dass nicht jede Hausfläche gleichermaßen von der Sonne beschienen wird. Für die Dachflächen ist dieses Phänomen von besonderem Interesse, da die Effizienz einer dort installierten Solaranlage unmittelbar von der Sonnenscheindauer bzw. der empfangenen Sonneneinstrahlung abhängt. Um die Sonnenscheindauer auf einer Dachfläche zu ermitteln, muss neben der Ausrichtung des Hauses der Neigungswinkel des Daches in Betracht gezogen werden. Der geographische Breitengrad und das Datum sind ebenfalls von entscheidender Bedeutung. Prinzipiell sind in der Oberstufe die mathematischen Voraussetzungen zur Berechnung gegeben, da durch die analytische Geometrie die benötigten Werkzeuge bereitgestellt werden. Jedoch ist die Herleitung der gesuchten Formel aufgrund der vielen notwendigen Rechenschritte ziemlich komplex, sodass sie im normalen Unterricht nicht eingebracht werden kann. Um die mathematischen Schwierigkeiten zu umgehen, kann im Schulunterricht ein geeigneter Versuchsaufbau verwendet werden, der es ermöglicht, die Sonnenscheindauer durch direkte Messung zu ermitteln. Zum Problem der Sonnenscheindauer auf dem Erdboden sind in der Literatur bereits viele Ideen zur praktischen Umsetzung vorhanden (siehe z.B. [1] oder [2]), das spezielle Problem der Sonnenscheindauer auf Dachschrägen wird in der fachdidaktischen Literatur hingegen kaum betrachtet. Aus diesem Grund wird hier ein neu entwickelter Versuch zur quantitativen Messung und dessen Durchführung vorgestellt.

## 2. Die Theorie zur Berechnung der Sonnenscheindauer auf einer Dachschräge

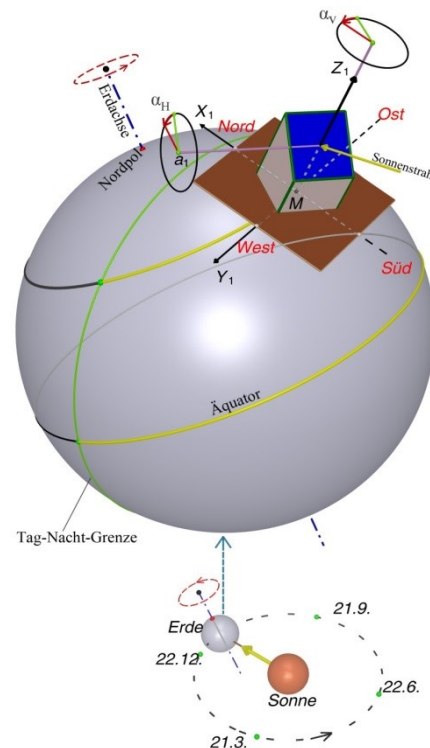


Abb.1: Beschreibung der räumlichen Lage der blauen Dachfläche mit Hilfe des horizontalen Drehwinkels  $\alpha_H$  und des vertikalen Drehwinkels  $\alpha_V$  (oberer Teil des Bildes), sowie die Richtung der einfallenden Sonnenstrahlung bedingt durch die Lage der Erde zur Sonne (unterer Teil des Bildes).

Um die Sonnenscheindauer auf einer Dachfläche an einem bestimmten Datum zu berechnen, ist es nötig, die genaue räumliche Lage des Daches zu erfassen. Dazu ist die Angabe von drei Winkeln erforderlich (siehe Abb. 1): der geographische Breitengrad  $\varphi$ , die Neigung des Daches, welche durch den Drehwinkel  $\alpha_H$  um die horizontale Achse  $a_1$  angegeben wird, sowie die Ausrichtung des Hauses, beschrieben durch den Drehwinkel  $\alpha_V$  um die Achse  $M_{Z_1}$ . Der Drehwinkel  $\alpha_V$  gibt somit die Stellung der Achse  $a_1$  bezüglich  $M_{y_1}$  an.

Es kann gezeigt werden, dass das Dach beschienen wird, wenn für die Uhrzeit  $t$  die folgenden Ungleichungen erfüllt sind (Herleitung siehe [1]).

$$a \cdot \cos(\omega \cdot (t - T_M)) + b \cdot \sin(\omega \cdot (t - T_M)) + c \geq 0 \quad \{1\}$$

$$\sin\alpha \cdot \cos\varphi \cdot \cos(\omega \cdot (t - T_M)) - \cos\alpha \cdot \sin\varphi \geq 0 \quad \{2\}$$

Die erste Ungleichung gibt an, zu welchen Zeitpunkten die betrachtete Dachfläche zur Sonne hin ausgerichtet ist, Ungleichung {2} gibt Auskunft darüber, ob der Erdboden von der Sonne beschienen wird. Beide Ungleichungen sind zu berücksichtigen, da sonst der Fall auftreten könnte, dass das Dach zur Sonne zeigt, der Erdboden aber nicht beschienen wird.

Die Parameter  $a$ ,  $b$  und  $c$  beschreiben die räumliche Lage der Dachfläche und können wie folgt beschrieben werden:

$$\begin{cases} a = \sin\alpha \cdot (\sin\varphi \cdot \sin\alpha_H \cdot \cos\alpha_V + \cos\varphi \cdot \cos\alpha_H) \\ b = \sin\alpha \cdot \sin\alpha_H \cdot \sin\alpha_V \\ c = \cos\alpha \cdot (\cos\varphi \cdot \sin\alpha_H \cdot \cos\alpha_V - \sin\varphi \cdot \cos\alpha_H) \end{cases} \quad \{3\}$$

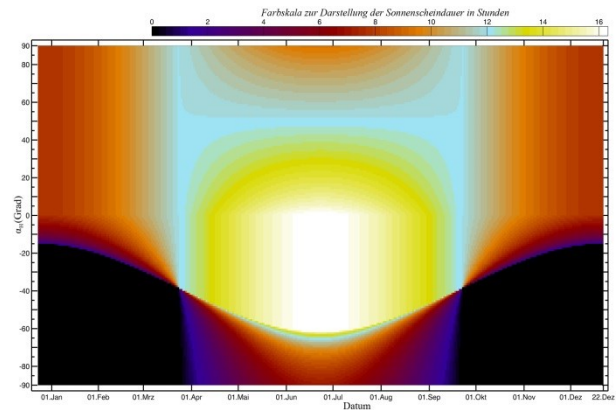
Dabei ist  $\varphi$  der geografische Breitengrad des betrachteten Hauses,  $\omega = 2\pi/24h$  die Winkelgeschwindigkeit der Erde und  $T_M$  ist der Zeitpunkt des astronomischen Mittags ( $\approx 12:00$  Uhr)<sup>1</sup>, wenn die Sonne am höchsten steht bzw. am Himmelsmeridian beobachtet wird.  $\alpha$  bezeichnet den Winkel zwischen der Erdachse und einem in Richtung Erdmittelpunkt laufenden Sonnenstrahl. Dieser wird berechnet mit

$$\alpha = \arccos\left(\sin 23,5^\circ \cdot \cos\left(n \cdot \frac{360^\circ}{365}\right)\right) \quad \{4\}$$

$n$  gibt die Tage vom 22.12. bis zum betrachteten Datum an. Werden die vier Parameter des Datums  $n$ , des Ortes  $\varphi$  und der Ausrichtung des betrachteten Daches  $\alpha_H$  und  $\alpha_V$  vorgegeben, so kann der Gültigkeitsbereich  $T_A \leq t \leq T_U$  der Ungleichungen {1}

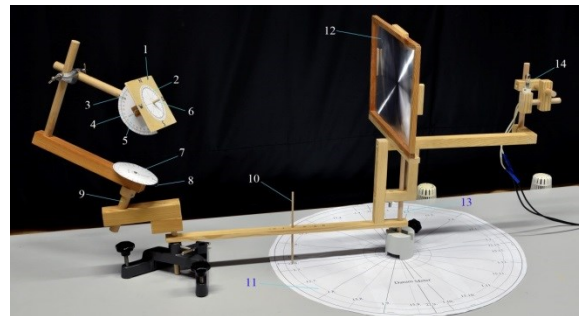
und {2} mit Hilfe der Formeln {3} und {4} bestimmt werden.  $T_A$  und  $T_U$  bezeichnen die Zeitpunkte des Sonnenaufgangs und des Sonnenuntergangs auf dem betrachteten Dach. Die Sonnenscheindauer  $T$  wird nach  $T = T_U - T_A$  berechnet.

Werden zwei der Parameter festgelegt, ist es möglich die Sonnenscheindauer in Abhängigkeit von den anderen zwei Parametern mit Hilfe einer Farbskala darzustellen. Abbildung 2 zeigt exemplarisch die Sonnenscheindauer in Abhängigkeit vom Datum und dem Neigungswinkel des Daches  $\alpha_H$  bei festgelegtem Breitengrad  $\varphi = 51^\circ$  (Siegen) und  $\alpha_V = 0^\circ$ .



**Abb. 2:** Darstellung des Verlaufes der Sonnenscheindauer auf einer Dachschräge in Abhängigkeit vom Datum und dem horizontalen Drehwinkel des Daches ( $\alpha_H$ ) als Farbskala.

### 3. Versuchsaufbau



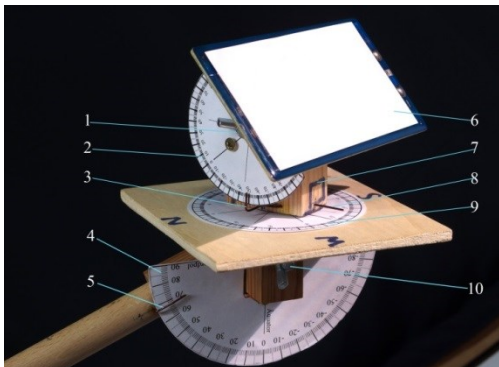
**Abb. 3:** Versuchsaufbau zur Bestimmung der Sonnenscheindauer auf der Erdoberfläche.

Abbildung 3 zeigt den Versuchsaufbau zur Bestimmung der Sonnenscheindauer auf der Erdoberfläche. Es wurden die astronomischen Gegebenheiten der Problemstellung in ein mechanisches Modell übersetzt, welches es erlaubt, alle zuvor beschriebenen Parameter zu variieren und abzulesen. Mit einer Lampe (Abb. 3-14) und einer Fresnellinse (Abb. 3-12) werden parallele Lichtstrahlen erzeugt, um so das auf die Erde einfallende Licht der Sonne zu simulieren. Dieses fällt auf die Holzplatte (Abb. 3-1), welche den Erdboden darstellt. Um den Jahresverlauf zu simulieren kann die Erde um die „Sonne“ herum gedreht werden (Achse Abb.3-13), wobei die Exzentrizität der Bahn vernachlässigt und ein gleichmäßiger Umlauf unterstellt wird. Mit Hilfe

<sup>1</sup> Wegen der Zeitgleichung und der diskret eingeteilten Zeitzone stimmt der astronomische Mittag nicht immer mit dem Mittag des allgemeinen Sprachgebrauchs überein (12:00 Uhr). Der Einfachheit halber wird der astronomische Mittag hier als 12:00 Uhr angenommen, wodurch sich die Sonnenaufgangs- und Sonnenuntergangszeiten leicht verschieben. Die Sonnenscheindauer und die täglich eingestrahelte Sonnenenergie bleiben jedoch unbeeinflusst.

einer gleichmäßig eingeteilten Skala (Abb. 3-11) kann über den Zeiger (Abb. 3-10) das Datum abgelesen werden. Es ist darauf zu achten, dass die Ausrichtung der Erdachse im Raum bei der Rotation um die Sonne unverändert bleibt.

Der Erdboden ist drehbar um seine Achse (Abb. 3-9) gelagert. Unterstellt man eine Periodendauer von 24 Stunden für einen Tag, so kann über eine gleichmäßig eingeteilte Skala (Abb. 3-7) die Uhrzeit ermittelt werden. Um die Uhrzeit einzustellen, wird der Erdboden um die Erdachse gedreht, bis der Schatten des Holzstabes auf den Winkel  $\alpha_V = 0^\circ$  fällt, was dem Höchststand der Sonne entspricht. Die Skala für die Uhrzeit kann nun auf 12 Uhr eingestellt werden. Streng genommen muss dieser Schritt nicht durchgeführt werden um die Sonnenscheindauer zu bestimmen, da die Differenz von Sonnenaufgangs- und Sonnenuntergangszeit gemessen wird. Aus didaktischen Gründen sollte trotzdem die korrekte Mittagszeit eingestellt werden. Die Erdachse ist um  $23,5^\circ$  geneigt um die Schiefe der Ekliptik darzustellen.

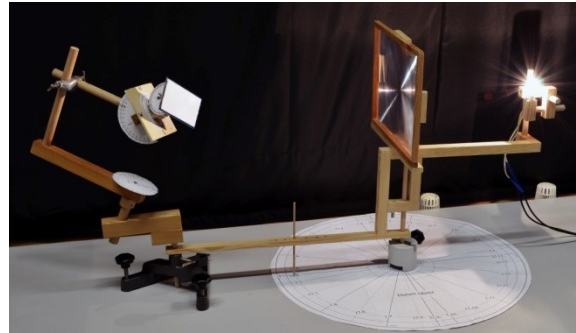


**Abb. 4:** Erweiterung des Versuchsaufbaus zur Ermittlung der Sonnenscheindauer auf einer Dachfläche.

Der Erdboden kann um eine weitere Achse (Abb. 3-5 bzw. Abb. 4-10) gedreht werden, um die geographische Breite eines betrachteten Ortes zu variieren. An der zugehörigen Skala (Abb. 3-4 bzw. Abb. 4-4) kann der genaue Wert abgelesen werden. Mittig auf dem Erdboden ist eine weitere Skala angebracht, auf der neben einer Winkeleinteilung die Himmelsrichtungen (Nord, Ost, Süd, West) aufgetragen sind. Dort lässt sich der Winkel  $\alpha_V$  ablesen. In der Mitte ist ein Holzstab angebracht, dessen Schattenwurf es ermöglicht die Richtung der einfallenden Sonnenstrahlung zu bestimmen.

Um die Sonnenscheindauer auf einer beliebigen Dachschräge zu messen, kann das Modell eines Hauses (Abb. 4-7) mit einem verstellbaren Dach (Abb. 4-6) auf dem Holzstab montiert werden. Das Dach kann um die horizontale Achse (Abb. 4-1) gedreht und dessen Neigungswinkel  $\alpha_H$  anhand einer Skala (Abb. 4-2) abgelesen werden. Die Ausrichtung des drehbar gelagerten Hauses wird über den Winkel  $\alpha_V$  beschrieben und kann an der Skala (Abb. 4-9) abgelesen werden.

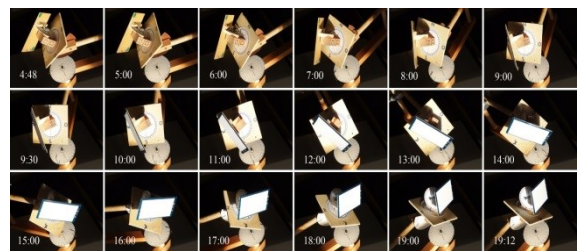
Der Sonnenaufgangs- bzw. Sonnenuntergangspunkt auf der Dachschräge kann nun anhand der Beleuchtung der Dachfläche bestimmt werden (Abb. 5).



**Abb. 5:** Versuchsaufbau zur Ermittlung der Sonnenscheindauer auf einer Dachfläche

Obwohl die allgemeine Formel für die theoretische Berechnung der Sonnenscheindauer auf einer beliebigen Dachschräge sehr kompliziert ist, kann man diese mit Hilfe des oben geschilderten Versuches durch Messung leicht nachvollziehen. Der Ablauf einer Beispielmessung ist in Abb. 6 dargestellt, dazu wurde eine Serienaufnahme vom „Sonnenaufgang“ um 4:48 bis zum „Sonnenuntergang“ um 19:12 auf dem Erdboden erstellt. Ob die Dachfläche Sonnenstrahlung empfängt, ist anhand der Beleuchtung erkennbar, die Uhrzeiten können an der entsprechenden Skala abgelesen werden. Für eine exemplarische Messung (siehe Abb. 6) wurden folgende Parameter gewählt:

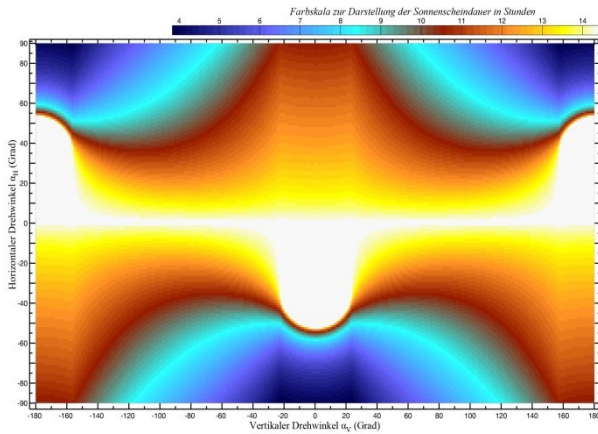
- Ausrichtung des Hauses:  $\alpha_V = -110^\circ$ ,
- Neigung der Dachfläche:  $\alpha_H = -60^\circ$ ,
- Datum: 14.8.,
- geografischer Breitengrad:  $\varphi = 51^\circ$ .



**Abb. 6:** Messbeispiel der Sonnenscheindauer auf einer Dachfläche mit  $\alpha_V = -110^\circ$  und  $\alpha_H = -60^\circ$ , am 14.8. und für die geografische Breite  $\varphi = 51^\circ$ .

Es ist erkennbar, dass das Dach und der Erdboden gleichzeitig von 9:30 Uhr bis 19:12 Uhr von der Sonne beschienen werden, somit beträgt die Sonnenscheindauer 9 Stunden 42 Minuten. Dies kommt dem mit Hilfe der Formeln (1) und (2) berechneten Ergebnis von 9 Stunden 40 Minuten sehr nahe, was durch einen Blick auf Abb. 7 überprüft werden kann.





**Abb. 7:** Die Sonnenscheindauer in Abhängigkeit von den Drehwinkeln  $\alpha_H$  und  $\alpha_V$  einer Dachschräge am 14.8. mit dem geografischen Breitengrad  $\varphi = 51^\circ$ .

#### 4. Untersuchung der Sonnenscheindauer von Dachschrägen mit nördlicher bzw. südlicher Ausrichtung in Deutschland

Die Beleuchtungsmerkmale einer Dachschräge hängen ab von dem geografischen Ort, an dem das Haus steht. Die Dachschrägen in Deutschland und allen geographischen Bereichen mit vergleichbarem Breitengrad haben identische Eigenschaften.

Betrachtet man nun Dächer mit  $\alpha_V = 0$  in Deutschland (geographische Breitengrad  $\varphi = 51^\circ$ ), so können die Dächer entweder nach Süden ( $\alpha_H > 0^\circ$ ) oder nach Norden ( $\alpha_H < 0^\circ$ ) ausgerichtet werden. Anhand der theoretischen Berechnung (Abb. 2) lassen sich einige interessante Eigenschaften ablesen: Die Sonnenscheindauer für die nach Süden orientierten Dächer ( $\alpha_H > 0^\circ$ ) ist im Winterhalbjahr vom 21.09. bis 21.03. unabhängig vom Neigungswinkel  $\alpha_H$  und sie erreicht das mögliche Maximum der Sonnenscheindauer. Sie entspricht also exakt der Sonnenscheindauer auf der Erdoberfläche (Die Sonnenscheindauer auf der Erdoberfläche entspricht einer Dachfläche mit dem Neigungswinkel  $\alpha_H = 0$ ). In diesem Zeitraum ist die Sonnenscheindauer für die nach Norden orientierten Dächer ( $\alpha_H < 0^\circ$ ) geringer als für die nach Süden orientierten Dächer. Im Sommerhalbjahr vom 22.03. bis 20.09. ist das Verhalten umgekehrt. Die nach Norden orientierten Dächer mit  $0 > \alpha_H > -39^\circ$  haben eine größere Sonnenscheindauer als die nach Süden orientierten Dächer.

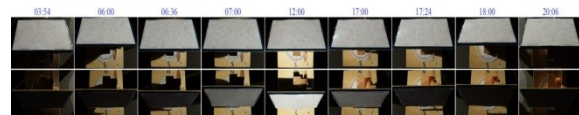
Diese aus der Theorie gewonnenen Erkenntnisse können mit Hilfe des vorgestellten Modells auch auf experimentelle Weise gewonnen werden:

In den Abbildungen 8 und 9 ist der Helligkeitsverlauf vom Sonnenaufgang bis zum Sonnenuntergang sowohl auf dem Erdboden als auch auf einer nach Süden (unten) bzw. nach Norden (oben) ausgerichteten Dachfläche am 01.07. bzw. am 01.02. zu sehen. Im Winter, am 01.02. (Abb. 8), erhält die nördlich ausgerichtete Dachfläche keinerlei Sonnenstrahlung, während die südlich ausgerichtete Dachfläche zwischen 07:36 Uhr und 16:24 Uhr beleuchtet wird.

Dort und auf dem Erdboden beträgt die Sonnenscheindauer  $T'_2 = 8,8$  (Stunden). Im Gegensatz dazu ist anhand von Abb. 9 ersichtlich, dass die nördlich ausgerichtete Dachfläche mit  $\alpha_H = -35^\circ$  sowie der Erdboden im Sommer am 01.07. zwischen 03:54 Uhr und 20:06 Uhr immer beleuchtet werden. Die Sonnenscheindauer beträgt somit jeweils  $T_1 = 17,2$  (Stunden). Im Vergleich dazu wird die südlich ausgerichtete Dachfläche mit  $\alpha_H = 70^\circ$  von 06:36 Uhr bis 17:24 Uhr beleuchtet, sodass die Sonnenscheindauer dort nur  $T_2 = 10,8$  (Stunden) beträgt.



**Abb. 8:** Helligkeitsverlauf zweier Dachflächen in Deutschland am 01.02. für  $\alpha_H = -35^\circ$  (oben) und  $\alpha_H = 70^\circ$  (unten).



**Abb. 9:** Helligkeitsverlauf zweier Dachflächen in Deutschland am 01.07. für  $\alpha_H = -35^\circ$  (oben) und  $\alpha_H = 70^\circ$  (unten).

#### 5. Diskussion des Modells

In Abbildung 6 ist auffällig, dass zum Zeitpunkt des Sonnenuntergangs auf dem Erdboden die Dachfläche noch immer beschienen wird, obwohl dieser Fall im Alltag nicht möglich ist. Dieser Umstand kann genutzt werden um eine in vertiefende Diskussion des Modells und der zugrundeliegenden Theorie einzusteigen:

Aus mathematischer Sicht tritt dieser Fall ein, wenn Ungleichung {1} im Gegensatz zu Ungleichung {2}, erfüllt ist. Dies bedeutet, dass das Dach zur Sonne zeigt, der Erdboden jedoch von ihr abgewandt ist. Im extremsten Fall würde das implizieren, dass die Dachfläche eines Hauses auf der Sonne abgewandten Seite der Erde, zur Sonne zeigt – dazu müsste das Haus auf dem Kopf stehen, was natürlich absurd ist. Warum diese Situation trotzdem eintritt, wird bei genauerer Betrachtung des Modells deutlich: Bedingt durch die Bauart können die Größenverhältnisse nicht realistisch dargestellt werden - wie es in astronomischen Modellen häufig der Fall ist. Der Abstand des Daches vom Erdboden liegt im Modell etwa in derselben Größenordnung wie der Abstand des Erdbodens vom Erdmittelpunkt. Das würde somit einer Höhe des Daches von etwa 6000km entsprechen. In dieser Höhe würde sich der Sonnenuntergangspunkt auf einer Dachfläche tatsächlich signifikant von dem des Erdbodens unterscheiden!

## 6. Literatur

- [1] Tran, Ngoc Chat; Kraus, Simon F. (2012): Eine Näherungsrechnung zu Sonnenscheindauer und Sonnenenergie. In: *Astronomie + Raumfahrt im Unterricht* 49. Jahrgang, Heft 2, S. 18 – 22
- [2] Lotze, Karl-Heinz (2005): Die Sonnenschein-Formel Teil I: Die Herleitung der Sonnenschein-Formel. *MNU* 58. Jahrgang, Heft 4, S. 223 – 227
- [3] Lotze, Karl-Heinz (2005): Die Sonnenschein-Formel Teil II: Anwendungen der Sonnenscheinformel. *MNU* 58. Jahrgang, Heft 6, S. 344 – 350
- [4] Kraus, Simon F.; Tran, Ngoc Chat (2012): Ein Demonstrationsversuch zum Tagbogen der Sonne. In: *Astronomie + Raumfahrt im Unterricht* 49. Jahrgang, Heft 2, S. 23 - 25