

## Hologramme mit GeoGebra

Roger Erb

Goethe-Universität, Max-von-Laue Straße 1, 60438 Frankfurt  
roger.erb@physik.uni-frankfurt.de

### Kurzfassung

Holografie ist ein Thema aus der Optik, bei dem zum einen grundlegende Ideen der Beugung zur Anwendung kommen und das zum anderen das Interesse von Schülerinnen und Schüler weckt. Allerdings sind Hologramme experimentell nur mit großem Aufwand zu erstellen, und ihre Wirkungsweise ist nicht leicht zu verstehen. Daher wird als erster Schritt die Verwendung computererzeugter Fresnel'scher Zonenmuster empfohlen. Hierfür kann die Mathematiksoftware GeoGebra verwendet werden.

### 1. Einleitung

Die Inhalte der Beugungsoptik bleiben im Physikunterricht oft auf wenige Beispiele beschränkt, die den Eindruck vermitteln, Beugung trete nur an besonders hergestellten Apparaturen auf, die darüber hinaus mit der Lebenswelt der Schülerinnen und Schüler nichts zu tun haben. Dagegen können die Auswirkungen der Beugung durchaus anhand von Alltagssituationen deutlich werden: So zeigt etwa eine Kerzenflamme hinter einem schmalen Spalt, gebildet durch zwei Finger, Fraunhofer'sche Beugung. In den Alltag von Schülerinnen und Schülern tritt die Beugung aber auch bei der Betrachtung von Hologrammen. Ihr beeindruckender Effekt einer dreidimensionalen Darstellung ist im Laserlicht oder ganz ohne gesonderte Apparatur bei Weißlichthologrammen erlebbar. Anders als bei einfachen Beugungsphänomenen kann ein Hologramm jedoch nur mit erheblichem Aufwand selbst erstellt werden und muss daher in der Regel gekauft werden. Außerdem ist die beugende Struktur selbst der Beobachtung nicht zugänglich.

Trotz dieser Schwierigkeiten gab das Interesse, das Hologramme hervorrufen können, für Horn und Mikelskis Anlass zu einem umfangreichen Projekt über ihren Einsatz im Physikunterricht. Mit einer Befragung von 166 Schülerinnen und Schülern der Jahrgangsstufen acht bis zehn ermittelten sie dabei auch die Vorstellungen im Zusammenhang mit dem Begriff „Hologramm“. Demnach haben 2/3 der Schülerinnen und Schüler keine Kenntnisse über die Bedeutung des Begriffs „Hologramm“, lediglich 10 % der Schülerinnen und Schüler gaben an, ein echtes Hologramm gesehen zu haben, und 20 % dagegen erinnerten filmische Szenen (Horn & Mikelskis, 2001). Kern des Projekts war die Entwicklung eines Konzepts für das Thema Holografie im Physikunterricht. Für die Darstellung der Wirkungsweise eines Hologramms wurde dafür eigens eine Simulation programmiert. Diese erklärt das Entstehen des virtuellen und des reellen Bildes durch die Darstellung von Wellenfronten (Horn & Mikelskis, 2003).

Einen anderen Weg gingen Dittmann und Schneider, die schon 1988 Hologramme für einfache Objekte mit dem Computer berechneten, großformatig ausdruckten und abfotografierten (Dittmann & Schnei-

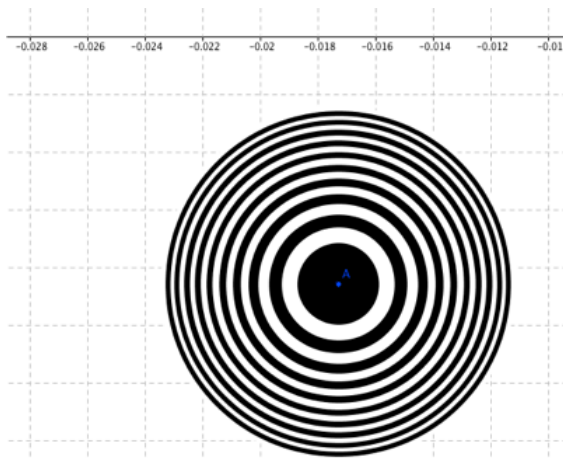


Abb. 1: Fresnel'sche Zonenplatte

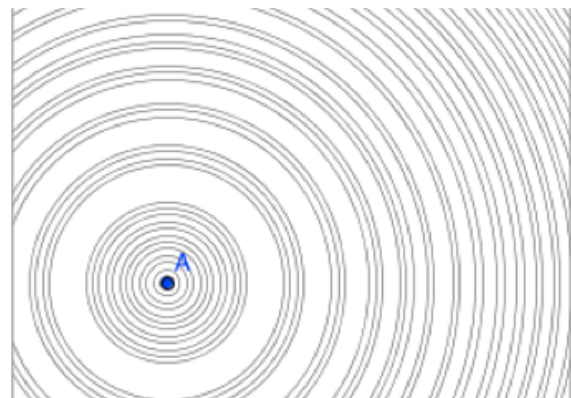


Abb. 2: Aus einzelnen Ringen zusammengesetzte Fresnelzonen

der, 2003). Das so erhaltene Filmmaterial konnte als Hologramm verwendet werden. Andere Vorschläge für einen Unterricht zu Hologrammen lieferten zuvor Pientka (1973) und Koppelman (1986).

Der eigenen Herstellung echter Hologramme ist der Nachteil zu eigen, sehr aufwändig zu sein. Bei dem Verfahren von Dittmann und Schneider dagegen ist der Weg über die eigens erstellte Programmierung für Schülerinnen und Schüler nur schwer nachvollziehbar.

## 2. Fresnel'sche Zonenplatte als Hologramm

Allerdings ist die eine holografische Abbildung erzeugende Beugungsstruktur für einfache Objekte durchaus nachvollziehbar: Ein Bildpunkt wird in der geometrischen Optik z. B. durch eine Sammellinse erzeugt, in der Beugungsoptik dagegen durch das konzentrische Ringmuster einer Fresnel'schen Zonenplatte. Mehrere Objektpunkte werden durch eine entsprechende Zahl von Ringmustern abgebildet, wobei sich die laterale Position der Objektpunkte in der Lage der Ringmuster wiederfindet und der Abstand längs der optischen Achse in den Radien des Ringmuster.

Dies ergibt schon eine qualitative Betrachtung: Ein Bildpunkt ist die Stelle im Raum, an die mehr Licht von einem Objektpunkt gelangt, als an benachbarte Stellen. Für einen Punkt, der durch eine weite Blende beleuchtet wird, wird die Intensität berechnet, indem (im Wellenmodell) die Amplituden der Lichtwellen oder (im Zeigermodell, Erb 2012) die Zeiger für die Lichtwege aus der gesamten Blendenöffnung in diesem Bildpunkt phasenrichtig addiert werden. Die Summe der Phasenzeiger ergibt die so genannte Vibrationskurve im Fall einer kreisförmigen oder eine Cornuspirale im Falle einer spaltförmigen Öffnung. Dabei zeigt sich, dass ein Teil der Lichtwege konstruktiv interferiert, Lichtwege aus anderen Teilen der Öffnung dagegen destruktiv beitragen. Ein passendes Fresnelzonenmuster dunkelt nun gerade diese Lichtwege ab und erzeugt daher in der Bildweite (und an einigen anderen Stellen) einen hellen Bildpunkt des leuchtenden Objektpunktes.

Bei Beleuchtung mit einem parallelen Lichtbündel entsteht der Bildpunkt in der Brennweite  $f$  der Zonenplatte. Die Radien der Zonenbegrenzungen berechnen sich in diesem Fall zu

$$r = \sqrt{2n \lambda f}, \quad \{1\}$$

mit der Lichtwellenlänge  $\lambda$  und der Zonennummer  $n$ . Für eine Brennweite von  $f = 3$  m bei Verwendung von Licht der Wellenlänge  $\lambda = 630$  nm ergibt sich so beispielsweise als Radius für die innerste Zone  $r = 1$  mm.

## 3. Einsatz von GeoGebra

Derartige Ringmuster lassen sich auf einfache Weise mit einer Dynamischen-Geometrie-Software, wie etwa GeoGebra, erstellen (Abb. 1). Hierfür werden

abwechselnd weiße und schwarze Kreisflächen mit den berechneten Radien erstellt und konzentrisch überlagert. Grundsätzlich kann die innerste Zone durchsichtig oder abdeckend sein; im vorliegenden Beispiel ist sie dunkel, um zu verdeutlichen, dass nicht das Licht, das schon nach der Ausbreitung gemäß der geometrischen Optik zum Bildpunkt gelangt, entscheidend für die Helligkeit ist.

Durch die Art der Konstruktion als eingefärbte Flächen ist jedoch die Erstellung eines Ringmusters für mehrere eng benachbarte Bildpunkte nicht möglich, da sich dann die Ringmuster gegenseitig verdecken. Für diesen Fall ist es erforderlich, dass jeder Ring aus einzelnen Kreislinien zusammengesetzt wird. Abb. 2 zeigt dies für eine zunächst noch zu geringe Zahl von Kreislinien. Bei Erhöhung der Liniendichte ergibt sich so ein durchgehend gefärbter Kreisring. In GeoGebra kann dies algebraisch durch zwei geschachtelte Folgen bewirkt werden:

$$\text{Folge}[\text{Folge}[\text{Kreis}[A, \sqrt{2n \lambda f} + i / D], i, 0, (\sqrt{(2n + 1) \lambda f} - \sqrt{2n \lambda f}) D], n, 0, m]$$

Durch diese Eingabe werden  $m$  Zonen mit dem Laufindex  $n$  gezeichnet. Der Radius der  $n$ -ten Fresnelzone ist dabei

$$r = \sqrt{2n \lambda f}. \quad (\text{vgl. } \{1\})$$

(Allgemein gilt die Berechnung für Objektpunkte im Abstand  $g$  und Bildpunkte im Abstand  $b$ ; bei Beleuchtung mit einem parallelen Lichtbündel vereinfacht sich die Beziehung wie hier dargestellt.) Gezeichnet werden pro Zone Striche (Laufindex  $i$ ), deren Anzahl das Produkt aus Breite der Zone

$$(\sqrt{(2n + 1) \lambda f} - \sqrt{2n \lambda f}) \quad \{2\}$$

multipliziert mit der Strichdichte  $D$  (Einheit: 1/m) ist.

Ein so berechnetes Ringmuster für drei Bildpunkte zeigt Abb. 3, wobei die unteren beiden Ringmuster für dieselbe Bildweite und das dritte für eine etwas größere berechnet worden sind.

## 4. Überprüfung im Experiment

Die Richtigkeit der Kalkulation zeigt sich, wenn man die Ringmuster im durch die Koordinatenachsen festgelegten Maßstab mit einem Tintenstrahl-

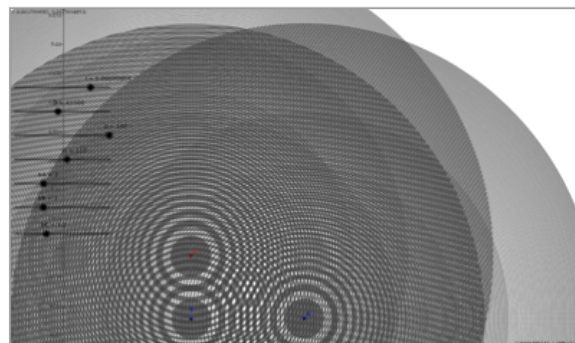
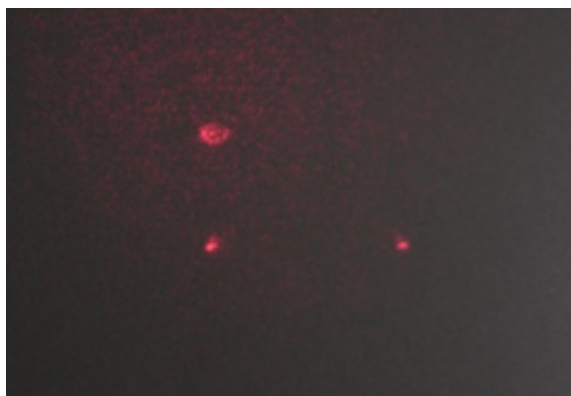


Abb. 3: Drei überlagerte Zonenmuster ergeben ein einfaches Hologramm.



**Abb. 4:** Reelles Bild des Hologramms aus Abb. 3.

drucker auf Folie ausdruckt und dieses Hologramm mit einem breiten, parallelen Laserlichtbündel beleuchtet. Abb. 4 zeigt ein Foto des Schirmbildes in der Bildweite der unteren Punkte. Sie sind scharf abgebildet, während der dritte Bildpunkt unscharf ist.

Alternativ kann man mit dem ausgedruckten Muster auch das virtuelle Bild beobachten, so wie schon von Dittmann und Schneider vorgeschlagen (1988). Hierfür hält man die Folie direkt vor ein Auge und beobachtet eine (nahezu) punktförmige Lichtquelle, beispielsweise eine kleine Glühlampe in einigen Metern Abstand. Mit etwas Übung erkennt man neben der Glühlampe drei Bildpunkte, die sich beim leichten Verschieben der Folie relativ zur Lampe bewegen. Dabei behalten zwei der Punkte ihren Abstand zueinander bei. Der dritte jedoch bewegt sich auch relativ zu den beiden anderen – er erscheint näher und ist damit ein Beleg für die dreidimensionale Abbildung.

Die erforderliche Auflösung des gedruckten Musters liegt an der Grenze dessen, was man von einem

Tintenstrahldrucker erwarten kann. Die Qualität des Hologramms wird außerdem durch die aufgeraute Oberfläche der Folien vermindert. Ein besseres Ergebnis erhält man hingegen, wenn man das Muster vergrößert auf Papier ausdruckt und mit einem Diafilm fotografiert (vgl. Dittmann & Schneider 1988). Durch das Dia lässt sich die holografische Abbildung deutlich einfacher beobachten.

Die mit GeoGebra erstellten Modelle können unter <http://tube.geogebra.org/search/perform/search/rephysik> heruntergeladen werden.

- [1] Koppelman, G. (1986): Veranschaulichung der Grundlagen der Holographie mit Moiré-Modellversuchen. In: Praxis der Naturwissenschaften Physik, 35. Jg., Heft 1, 5 – 12.
- [2] Pientka, H. (1973): Erzeugung von Gitterabbildungen durch kohärente Beleuchtung von Lochblenden-Anordnungen als Propädeutik zum Holographiebegriff. In: Praxis der Naturwissenschaften Physik, 22. Jg., Heft 6, 141 – 143.
- [3] Dittmann, H., Schneider, W. (1988): Computergenerierte Interferenzmuster als Zugang zur Holografie. In: Physik und Didaktik 3, 199-206.
- [4] Horn, M. E., Mikelskis, H. F. (2003): Das Potsdamer Holographie-Simulationsprogramm – Eine didaktische Gebrauchsanleitung –. In: DPG Fachausschuss Didaktik, Vorträge auf der Tagung in Augsburg 2003.
- [5] Horn, M. E., Mikelskis, H. F. (2001): Schüler-vorstellungen zur Holographie. In: DPG Fachausschuss Didaktik, Vorträge auf der Tagung in Bremen 2001.
- [6] Erb, R. (2012): Das Zeigermodell in der Optik. In: Praxis der Naturwissenschaften – Physik in der Schule 61, Heft 4, 18-24.