

## Schülerinnen und Schüler verstehen das 1-Liter-Auto

- Umwandlung von Fasern in Balken wird mit dem Herstellen erlebbar und mit dem Hooke'schen Gesetz sowie dem Hebelgesetz verstehbar -

Hans-Otto Carmesin\*, Christiane Matthies<sup>+</sup>, Hannes Michaelsen\*\*, Kristin Voßberg<sup>++</sup>

\*Gymnasium Athenaeum, Harsefelder Straße 40, 21680 Stade sowie Studienseminar Stade, Bahnhofstraße 5, 21682 Stade sowie Fachbereich 1, Institut für Physik, Universität Bremen, 28334 Bremen, <sup>+</sup>Airbus Stade, Airbus-Straße 2, 21684 Stade, <sup>\*\*</sup>Gymnasium Athenaeum, Harsefelder Straße 40, 21680 Stade, <sup>++</sup>Gymnasium Athenaeum, Harsefelder Straße 40, 21680 Stade  
Hans-Otto.Carmesin@t-online.de, christiane.matthies@airbus.com

### Kurzfassung

Leichtbau ist ein Schlüsselbeitrag zur Energiewende. Wir berichten über ein innovatives, anspruchsvolles, umfassendes, progressives und mehrfach erprobtes Konzept für die letzten beiden Klassenstufen des Gymnasiums.

### 1. Einleitung

Wir präsentieren den Kontext CFK-Leichtbau für den Physikunterricht, Technikunterricht oder fürs Seminarfach. Das Beispiel 1-Liter-Auto sowie Anwendungen aus dem Flugzeugbau stellen Bezüge zur Lebenswelt der Lernenden her. Der Kontext CFK-Leichtbau ist relevant für die energetische Wende sowie für die Umwelt, auch ist er von genereller Bedeutung für das Verständnis von Festigkeit. Zudem kann der Kontext in vereinfachter Form beim Hebelgesetz und beim Hooke'schen Gesetz angewendet werden. Die Schülerinnen und Schüler haben CFK-Teile hergestellt, Biegeversuche durchgeführt, die Balkentheorie gelernt und bei Konstruktionswettbewerben wichtige Konstruktionsprinzipien selbst entdeckt. Die Lerngruppe wird durch Zusammenlegen einer Klasse des Fachgymnasiums Technik und eines Seminarfachkurses des allgemeinbildenden Gymnasiums etabliert. Im Rahmen einer Schüler-Ingenieur-Akademie stehen der Lerngruppe zwei Jahre lang zwei Wochenstunden zur Verfügung. Die Firma Airbus Stade ist einer von 12 externen Partnern der Schüler-Ingenieur-Akademie. Wir berichten über Erfahrungen aus drei Durchgängen.



Abb.1: Aufnahme einer Biegelinie für einen CFK-Streifen

### 2. Ablauf

Im ersten Semester besuchten die Lernenden die externen Partner. Dabei besuchten wir auch die Ausbildungswerkstatt bei Airbus in Stade. Dort stellte jeder Lernende innerhalb von vier Stunden ein CFK-Leichtbauteil her, beispielsweise eine Bücherstütze. Das Teil musste allerdings zum Aushärten

bei hoher Temperatur und hohem Druck noch in einen Autoklaven und stand daher erst in der Folgewoche zur Verfügung. Hierbei sammelten die Schülerinnen und Schüler erste praktische Erfahrungen mit dem Werkstoff und dem Herstellungsverfahren.

Im zweiten Semester fertigten die Lernenden eine Facharbeit an. Einige Gruppen wählten dazu Themenangebote bei Airbus. Beispielsweise hat ein Team verschiedene Streifen aus CFK hergestellt und in Biegeversuchen untersucht (s. Abb. 1). Die Lernenden verglichen die Biegelinie mit einer vorgegebenen Formel und stellten eine akzeptable Übereinstimmung fest (s. Abb. 2). Hierbei interessierte bereits viele Lernenden, genauer zu verstehen, wieso man die Biegelinie so gut berechnen kann.

Im dritten Semester stellten die Schülerinnen und Schüler ihre Facharbeiten teils öffentlich vor. Anschließend begann die Vertiefungsphase. Hierbei wurde die von den Lernenden bereits als notwendig erkannte Balkentheorie eingeführt. Auf dieser Grundlage konnten die Lernenden vielfältige Konstruktionsprinzipien selbstständig entdecken. In anderen Themengebieten der Schüler-Ingenieur-Akademie wurden entsprechende Vertiefungen behandelt und mit Wettbewerben für Entdeckungen genutzt.

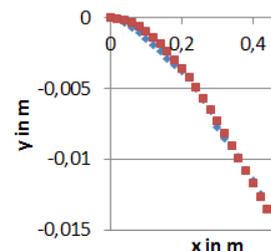


Abb.2: Lernende verglichen ihre gemessene Biegelinie mit der Balkentheorie

### 3. Entwicklung der Differenzialgleichung zur Balkentheorie

Üblicherweise lernt man die Balkentheorie erst im Studium. Die Lernenden erkannten jedoch, dass ihre Herstellung des Bauteils und ihre anschließende Messung der Biegelinie erst durch das Verständnis der Berechnung der Biegelinie abgerundet sind. Daher haben wir die Balkentheorie so elementarisiert, dass sie gut von Gymnasiasten verstanden und angewendet werden kann. Auch erkannten die Lernenden, dass sowohl das 1-Liter-Auto als auch moderne Flugzeuge tragende CFK-Bauteile nutzen und deshalb so leicht sind, weil selbst sehr leichte CFK-Bauteile sich kaum verbiegen.

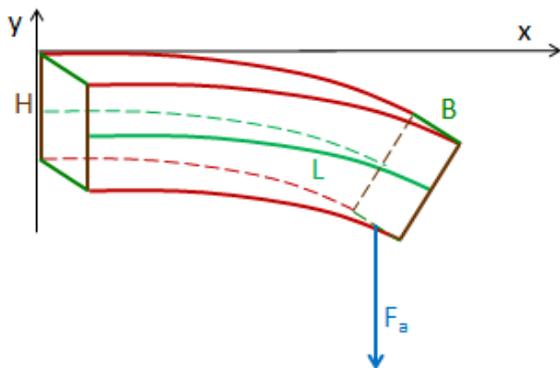


Abb.3: Balkenbiegung

Die Balkentheorie wurde am Beispiel des waagrecht einseitig eingespannten Balkens mit einem Lehrervortrag eingeführt und anschließend mehrfach von den Lernenden angewendet. Zunächst wurde eine Differenzialgleichung für einen rechteckigen Balkenquerschnitt hergeleitet, bei dem nur zwei exemplarische Fasern betrachtet werden:

Anfangs wurden die Länge L, Höhe H und Breite B sowie die waagerechte Einspannung eingeführt (s. Abb. 3). Auch wurden die Koordinaten x und y sowie eine rechts am Balken angreifende und nach unten wirkende Kraft  $F_a$  vereinbart (s. Abb. 3). Gesucht ist ein Term für  $y(x)$ .

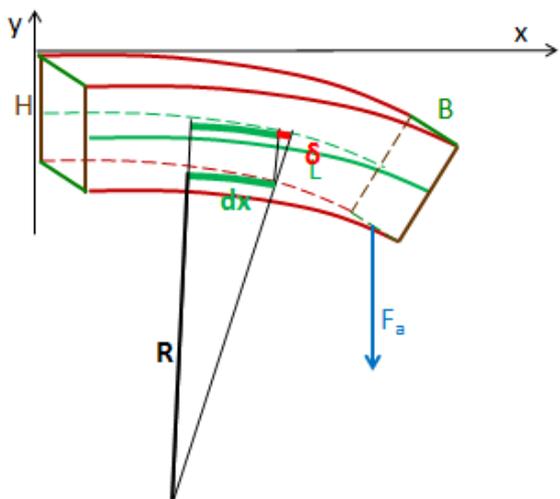


Abb.4: Fasern im Balken

Als nächstes erinnerten wir uns daran, dass der Balken wesentlich aus in Längsrichtung verlegten Fasern besteht. Wir betrachten ein Faserstück mit einer Länge  $dx$  und einer Querschnittsfläche  $A$  (s. Abb. 4). Beim Biegen des Balkens verlängert sich die Faser um ein Stück  $\delta$  (s. Abb. 4). Für die Faser ist wichtig, wie groß die Verlängerung pro Länge ist, also die Dehnung  $\epsilon = \delta/dx$ . Für die Verlängerung wendeten wir das bekannte Hooke'sche Gesetz mit der Federkonstanten  $D$  an:

$$D = F/\delta \quad \{1\}$$

Für die Faser ist wichtig, wie groß die Kraft  $F$  pro Querschnittsfläche  $A$  ist, also die Spannung  $\sigma = F/A$ . Wir setzen in Gleichung 1 die Dehnung und Spannung ein und erhalten:

$$D = \sigma/\epsilon \cdot A/dx \quad \{2\}$$

Den Quotienten  $\sigma/\epsilon$  nennt man den Elastizitätsmodul  $E = \sigma/\epsilon$ , er ist eine Materialkonstante. Wir stellten also fest, dass die Federkonstante einer Faser mit Querschnittsfläche  $A$ , Länge  $dx$  und Elastizitätsmodul  $E$  wie folgt berechnet wird:

$$D = E \cdot A/dx \quad \{3\}$$

Die Krümmung des Faserstücks beschreiben wir durch einen Krümmungsradius  $R$  (s. Abb. 4). Wir betrachteten eine unten liegende Faser und erhielten mit dem Strahlensatz (s. Abb. 4):

$$\delta/(0,5H) = dx/R \quad \{4\}$$

Wir lösten nach der Dehnung  $\epsilon = \delta/dx$  auf und stellten so fest:

$$\epsilon = 0,5H/R \quad \{5\}$$

Wir leiteten die Kreisgleichung  $y = (R^2 - x^2)^{0,5}$  zweimal ab und fanden für relativ kleine  $x$  heraus, dass die zweite Ableitung gleich dem inversen negativen Krümmungsradius ist. So erhielten wir:

$$\epsilon = -0,5H \cdot y'' \quad \{6\}$$

Wir erinnerten uns, dass die Lernenden bei der Herstellung die Fasern miteinander verklebt hatten. Dadurch können die Fasern nicht aneinander vorbei gleiten. Deshalb ist die Endfläche des Balkens senkrecht zu den Fasern. Wenn der Balken beginnt sich zu biegen, dann muss also die Endfläche sich neigen. Dazu müssen die Fasern der oberen Hälfte gedehnt und die der unteren Hälfte gestaucht werden. Dem wirken die Fasern entsprechend dem Hooke'schen Gesetz entgegen (s. Abb. 5). Daher wirkt auf die obere Hälfte der Endfläche eine Kraft  $F_i$  in Richtung des Balkens und auf die untere Hälfte eine Kraft  $F_i$  vom Balken weg. Wir betrachten exemplarisch zwei Fasern im Abstand  $H/4$  von der Mitte (s. Abb. 5). Somit bewirken die Fasern das folgende innere Drehmoment:

$$M_i = 2F_i \cdot H/4 \quad \{7\}$$

Die außen angreifende Kraft bewirkt ein äußeres Drehmoment  $M_a$ . Dabei ist der Hebelarm an einer Stelle  $x$  der Abstand  $\xi = L - x$  zum Balkenende. Daher beträgt das äußere Drehmoment:

$$M = F_a \cdot \xi \quad \{8\}$$

Wenn der Balken in Ruhe durchgebogen ist, dann sind die beiden Drehmomente im Gleichgewicht:

$$F_a \cdot \xi = F_i \cdot H/2 \quad \{9\}$$

Hier setzen wir für die Kraft  $F_i = \sigma \cdot A$  ein mit  $A = B \cdot H/2$  und  $\sigma = \epsilon \cdot E$  und erhielten:

$$F_a \cdot \xi = \epsilon \cdot E \cdot B \cdot H^2/4 \quad \{10\}$$

Auch setzen wir für die Dehnung gemäß Gleichung 6 ein und stellten fest:

$$F_a \cdot \xi = -y'' \cdot E \cdot B \cdot H^3/8 \quad \{11\}$$

Der Faktor  $B \cdot H^3/8$  entspricht der Querschnittsgeometrie und wurde daher Geometriefaktor I genannt:

$$I = B \cdot H^3/8 \quad \{12\}$$

In der Literatur wird I Flächenträgheitsmoment genannt und beträgt  $B \cdot H^3/12$  [1]. Insgesamt haben wir so für die Biegelinie folgende Differentialgleichung hergeleitet [1]:

$$F_a \cdot \xi = -y'''' \cdot E \cdot I \quad \{13\}$$

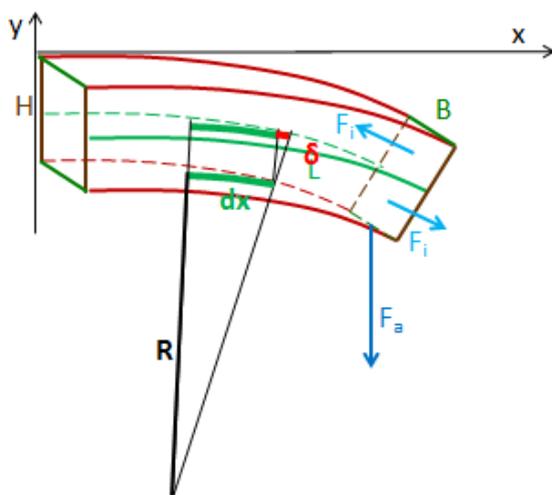


Abb.5: Von Fasern bewirkte Kräfte und Drehmomente

#### 4. Lösung der Differentialgleichung

Die Lernenden lösten die Differentialgleichung (s. Gl. 13) durch mehrfaches Integrieren:

$$-y'''' \cdot E \cdot I = F_a \cdot (L-x) \quad \{14\}$$

Zunächst führten wir die Abkürzung  $F_a/(E \cdot I) =: \alpha$  ein:

$$y'''' = \alpha x - \alpha L \quad \{15\}$$

Wir fanden die Randbedingungen heraus:

$$y(0) = y'(0) = 0 \quad \& \quad y''(0) = -\alpha L \quad \{16\}$$

Die erste Integration ergab:

$$y' = \alpha x^2/2 - \alpha Lx \quad \{17\}$$

Die zweite Integration ergab:

$$y = \alpha x^3/6 - \alpha Lx^2/2 \quad \{18\}$$

Dies ist die gesuchte Gleichung für die Biegelinie.

#### 5. Analyse der Biegelinie

Die Gleichung für die Biegelinie wurde auf die gemessene Kurve aus Abb. 1 angewendet. Der von den Lernenden hergestellte CFK-Streifen hat die Breite

0,04 m und die Höhe 0,00225 m. Durch Anpassen der Daten stellten die Lernenden einen Elastizitätsmodul von  $116 \text{ kN/mm}^2$  fest. So wurde die Abb. 2 gewonnen.  $116 \text{ kN/mm}^2$  stellt einen typischen Elastizitätsmodul von CFK dar [2].

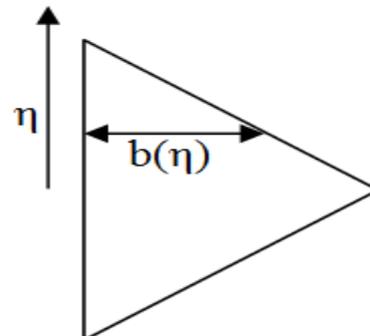


Abb.6: Balken mit dreieckigem Querschnitt.  $\eta$ : Hebelarm.  $b(\eta)$ : Balkenbreite beim Hebelarm  $\eta$ .

#### 6. Herleitung eines Integrals für das Flächenträgheitsmoment

Die Schülerinnen und Schüler erkannten, dass die Betrachtung von nur zwei Fasern eine grobe Näherung darstellte. Daher betrachteten wir viele Fasern, die symmetrisch um die halbe Balkenhöhe liegen. Der Hebelarm  $\eta$  geht daher auch von der Balkenmitte aus. Somit entsteht das Drehmoment:

$$M = \sum_{\text{Fasern}} F \cdot \eta \quad \{19\}$$

Wir setzen für  $F = \sigma \cdot dA$  ein und ersetzen die Summe durch ein Integral:

$$M = \sum_{\text{Fasern}} \sigma \cdot dA \cdot \eta = \int \sigma \cdot \eta \, dA \quad \{20\}$$

Wir setzen für  $dA = B \cdot d\eta$ , ergänzten den Faktor 2 wegen der Symmetrie und integrierten nur zu einer Seite hin:

$$M = 2B \int_0^{0,5H} \sigma \cdot \eta \, d\eta \quad \{21\}$$

Wir stellten fest, dass die Spannung gemäß dem Hooke'schen Gesetz linear nach außen hin zunimmt:  $\sigma = \sigma_{\text{max}} \cdot \eta / (0,5H)$  {22}

Wir setzen für die Spannung  $\sigma = E \cdot \epsilon$  ein:

$$\sigma = E \cdot \epsilon_{\text{max}} \cdot \eta / (0,5H) \quad \{23\}$$

Mit  $\epsilon = -0,5Hy''$  erhielten wir:

$$\sigma = -E \cdot \eta \cdot y'' \quad \{24\}$$

Das setzen wir in Gleichung 21 ein:

$$M = -2B \cdot E \cdot y'' \cdot \int_0^{0,5H} \eta^2 \, d\eta \quad \{25\}$$

Für den Rechteckquerschnitt erhielten wir:

$$M = -B \cdot H^3/12 \cdot E \cdot y'' \quad \{26\}$$

Durch Vergleich bestätigten wir das bereits bekannte Ergebnis  $I = B \cdot H^3/12$ . Für eine Breitenfunktion  $b(\eta)$  (s. Abb. 6) erhielten wir entsprechend für das Flächenträgheitsmoment folgenden Term:

$$I = 2 \cdot \int_0^{0,5H} \eta^2 \cdot b(\eta) \, d\eta \quad \{27\}$$

#### 7. Konstruktionswettbewerb I

Die Schülerinnen und Schüler sollten einen Balkenquerschnitt entwerfen mit folgenden Bedingungen:

Balkenlänge:  $L = 1\text{ m}$

Am Balkenende angreifende Kraft:  $F = 1000\text{ N}$

Balkenvolumen:  $V = 400\text{ cm}^3$

Der Balken soll einfach zusammenhängend sein.

Die Dicke soll überall wenigstens 2 mm betragen.

Die Höhe soll maximal 10 cm betragen.

Der Balken soll überall den gleichen Querschnitt haben.

Der Balkenquerschnitt soll symmetrisch bezüglich einer waagerechten Spiegelachse sein.

Die Durchbiegung am Ende  $y(L)$  soll minimal sein.

Bearbeitungszeit: 40 min

Die Lernenden entwickelten drei Querschnittstypen, Rechteckquerschnitte, U-Querschnitte und Doppel-T-Träger. Letztere erzielten das beste Ergebnis mit  $y(L) = 3,44\text{ mm}$ . Alle Lernenden entdeckten das Konstruktionsprinzip, möglichst viele Fasern nach außen zu legen. So entdeckten sie, dass unter den gegebenen Bedingungen der Doppel-T-Träger das Prinzip am besten erreichte.

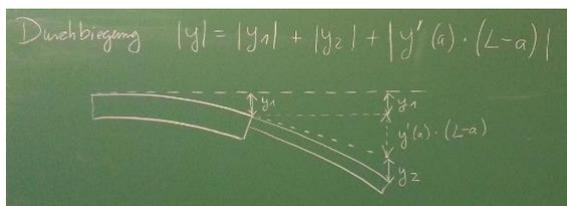


Abb.7: Balken mit zwei Querschnitten.

## 8. Konstruktionswettbewerb II

Die Schülerinnen und Schüler sollten einen Balkenquerschnitt entwerfen, wobei die Bedingungen von oben in einem Punkt abgewandelt wurden, der Balkenquerschnitt musste nicht konstant sein. Stattdessen durften streckenweise zwei Balkenquerschnitte verwendet werden (s. Abb. 7).

Die Lernenden entwickelten sich verjüngende Längsschnitte und erkannten somit das Konstruktionsprinzip, dass am Balkenende geringe Hebelarme vorliegen und daher wenige Fasern genügen.

## 9. Erfahrung mit dem Unterricht

Die Schülerinnen und Schüler wählen seit drei Jahren die Schüler-Ingenieur-Akademie gut an. Die Datenbasis umfasst bisher sechs Kurse an zwei Schulen in drei Jahren. Am Ende des ersten Semesters wurden Klausuren geschrieben mit den Mittelwerten 11,4 Punkte, 10,8 Punkte und 8,6 Punkte, wobei der letzte Wert durch Terminprobleme aufgrund des Sturms Xaver negativ beeinflusst wurde. Die Facharbeiten führten zu den Mittelwerten 12,3 Punkte, 12,7 Punkte und 12,6 Punkte. Eine Umfrage unter den Lernenden ergab einen Mittelwert der Note 2. Dabei stuften die Lernenden im Mittel das Folgende als sehr gut ein: die externe Betreuung (1,18), die interne Betreuung, den Lernzuwachs, den Besuch externer Partner und die faire Behandlung.

Das bestätigt uns in unserem Vorgehen, die Schüler-Ingenieur-Akademie ans Seminarfach anzubinden. In der Vertiefungsphase konnten die Schülerinnen und Schüler die Balkentheorie erläutern und geschickt anwenden. Somit wurde der Lernprozess vom Bauen über das Messen bis zum Herleiten, Konstruieren und selbstständigen Entdecken allgemeiner Prinzipien progressiv gesteigert und gut abgerundet.

## 10. Diskussion

Die Schülerinnen und Schüler haben bei diesem Unterricht zweifellos ihre Fachkompetenzen in überdurchschnittlichem Maße entwickelt, das belegen die sehr guten Ergebnisse bei Facharbeiten und Klausuren sowie die in der Vertiefungsphase gezeigten Fähigkeiten zu selbstständigen anspruchsvollen Entdeckungen. Aktuell liest man Kritik an einer „ökonomischen Instrumentalisierung von Bildung“ [3], trifft das hier zu?

Fachlich gesehen ist Leichtbau ein Erfolgsrezept der Natur, das man auch bei Vögeln, Bambus, Gräsern und vielen anderen Lebewesen vorfindet. Hier werden also ökologische und ökonomische Zusammenhänge erfasst, ein wichtiger Punkt im Bildungsauftrag [4] und bei einer zukunftsbezogenen pädagogischen Konzeption [5]. Auch wird durch Leichtbau Verantwortung für die Erhaltung der Umwelt übernommen, ein weiteres Ziel des Bildungsauftrags [4]. Die Lernenden erzielten hier ihre Leistungen gemeinsam mit anderen, auch ein Ziel des Bildungsauftrags [4]. Dabei arbeiten sie nicht nur mit Mitschülern, sondern auch mit externen Partnern zusammen, was bei der Umfrage sogar zur Bestwertung von 1,18 führte. Das weist auf eine besonders umfassende Persönlichkeitsentwicklung hin. Auch die hier betriebene Vorbereitung auf das Berufsleben ist ein Ziel des Bildungsauftrags [4]. Aufgrund der genannten Argumente meine ich, dass diese Schüler-Ingenieur-Akademie die Lernenden in besonders intensiver Weise bildet.

## 11. Literatur

- [1] Sommerfeld, Arnold (1978): Mechanik der deformierbaren Medien. 6. Auflage, Frankfurt: Harri Deutsch.
- [2] Bittmann, Eva (2006): Das schwarze Gold des Leichtbaus. In: Kunststoffe 3, S. 76-82.  
<http://www.werkstoff-und-struktur.de/information/kunststoffe0306.pdf> (Stand: 10/2013)
- [3] Meidinger, Heinz-Peter (2014): Der Irrweg der ökonomischen Instrumentalisierung von Bildung. In: Profil. 5, S. 3.
- [4] Niedersächsisches Schulgesetz (1996). § 2. Niedersächsische GVBl. S. 232.
- [5] Klafki, Wolfgang (1993): Grundlinien einer gegenwarts- und zukunftsbezogenen Konzeption. Pädagogische Welt, S. 28-33.