

Fünfdimensionales Licht als Beschreibungsmuster unserer dreidimensionalen Welt

Martin Erik Horn*, Dietmar Hildenbrand[†]

*bbw Hochschule Berlin-Brandenburg, Leibnizstr. 11 – 13, 10625 Berlin

[†]Technische Universität Darmstadt, Schlossgartenstr. 7, 64289 Darmstadt
mail@martin-erik-horn.de, hildenbrand@mathematik.tu-darmstadt.de

Kurzfassung

In der Informatik wird die Konforme Geometrische Algebra zur Beschreibung geometrischer Operationen im dreidimensionalen Raum eingesetzt. Die Modellierung und programmtechnische Umsetzung auf Grundlage einer solchen konformen Geometrie überzeugt durch ihre strukturelle Eleganz, eine hohe Recheneffektivität und Robustheit.

Schülerinnen und Schüler können mit Hilfe des Programms CLUCalc Modellierungen auf Basis der Konformen Geometrischen Algebra direkt umsetzen und gestalten. Ein solcher Ansatz, der die Konforme Geometrische Algebra als Werkzeug im Sinne einer Black Box einsetzt, wird an der TU Darmstadt sehr erfolgreich mit Schülerinnen und Schülern praktiziert. Dies wird im ersten Teil des Beitrags vorgestellt.

Die in der Informatik eingesetzten Werkzeuge lassen sich jedoch auch physikalisch umdeuten und auf der Grundlage speziell-relativistischer Ideen didaktisch einbringen: Vektoren einer dreidimensionalen, nicht-relativistischen Welt sind mathematisch Nullvektoren (und somit lichtartigen Vektoren) einer fünfdimensionalen, konformen Welt äquivalent.

Eine solche Deutung wird im zweiten Teil des Beitrags auf Grundlage der Geometrischen Algebra diskutiert. Dies führt nicht nur zu einem tieferen physikalischen Weltverständnis, sondern auch zu einer Verknüpfung physikdidaktischer und informatikdidaktischer Ideen.

1. Vorbemerkungen: Didaktische Kongruenz zwischen Physik- und Informatiklernen

Dieser Beitrag entstand durch eine Zusammenarbeit über Fächergrenzen hinweg. Einer der Autoren (M. H.) ist Physiker und Physikdidaktiker, während der zweite Autor (D. H.) aus der Informatik kommt und informatikdidaktische Ideen einbringt.

Die Physik zielt als Wissenschaft auf die Beschreibung und Erklärung von Phänomenen der Natur. Die Informatik ist die Wissenschaft der automatisierten Verarbeitung von Information. Obgleich Physik und Informatik somit recht verschiedene Zielrichtungen aufweisen, zeigen sie insbesondere im didaktischen Bereich deutliche Überschneidungen.

Diese finden sich sowohl auf inhaltlicher wie auch auf methodischer Ebene. So identifiziert Hubwieser die Modellierung als zentralen inhaltlichen Kern der Informatikdidaktik [1, Kap. 4.4, S. 85–97]. Thomas benennt die informatische Modellbildung im Sinne eines Modellierens von Modellen „als ein zentrales Element der Informatik für den allgemeinbildenden Schulunterricht“ [2, S. 61].

Nicht anders sieht es die Physikdidaktik. Auch dort stellen Modellierung und Modellbildung zentrale inhaltliche Themenbereiche dar und fungieren als wesentliche Katalysatoren von Erkenntnisprozessen [3, Kap. 23, S. 735–762]. Die Physik, so die Autoren

der KMK-Bildungsstandards [4, S. 6] „ermöglicht Weltbegegnung durch die Modellierung natürlicher und technischer Phänomene.“

Auf methodischer Ebene identifizieren sowohl die Informatikdidaktik wie auch die Physikdidaktik das Problemlösen und die damit verbundenen Kompetenzen als „zentrale Kategorie des Informatikunterrichts“ [2, Abs.5.1, S. 5.6] bzw. als eine der „wichtigen Intentionen des Physikunterrichts“ [3, S. 703].

Die Informatik als Schulfach sowie die Informatikdidaktik unterscheiden sich bezüglich dieser sehr zentralen Aspekte kaum von der Physik als Schulfach sowie der Physikdidaktik. Hier finden sich deutliche didaktische Kongruenzen.

2. Black-Box-Lernen in der Informatik

Die Zusammenarbeit zwischen den beiden Autoren legt jedoch nicht nur die im vorigen Abschnitt aufgeführten didaktischen Übereinstimmungen, sondern auch wesentliche Unterschiede im didaktischen Denken und methodischen Vorgehen zwischen Physik und Informatik offen.

Insbesondere unterscheidet sich die Alltagskultur im physikalischen und informatischen Arbeiten deutlich. So sind moderne Programme bei informationstechnischen Anwendungen heute immer ein Konglomerat unzähliger Programmbestandteile, deren Quellcode von zahlreichen unterschiedlichen Ver-

fassern in einer enormen Teamleistung erstellt werden. Keiner der Beteiligten kann bei einem solchen, oft sehr verschachtelten Produkt heute noch jede Einzelheit des Quellcodes überblicken.

Dies führt dazu, dass Informatikerinnen und Informatiker in der modernen Informationsgesellschaft ein weit ausgeprägteres Black-Box-Denken aufweisen als Naturwissenschaftlerinnen und Naturwissenschaftler. Wichtig ist in diesem Fall nicht die genaue programmtechnische Umsetzung eines Sub-Programms in Form einer Black Box, sondern die Charakterisierung von Input, Output und Funktionalität der Black Box.

Die Informatik ist somit eine Technikdisziplin und Wissenschaft, bei der das Vertrauen auf die korrekte Funktionalität von Black-Box-artigen Programmbestandteilen eine wesentliche Rolle spielt. Zur Stärkung dieses Vertrauens ist eine möglich klare Beschreibung dessen, was ein unbekanntes Programmteil als Black Box leistet, wichtig. Nicht wichtig für das Funktionieren des Gesamtprogramms ist jedoch die Kenntnis der inneren Programmstruktur einer solchen Black Box.

Dieses Vertrauen, das Fachkolleginnen und -kollegen entgegen gebracht wird, spiegelt sich im Lernen und Lehren der Informatik in einem hohen didaktischen Vertrauen ähnlicher Art wieder. So ist es für den aus der Informatik stammenden Autor (D. H.) kein Problem, solche komplexen Sachverhalte wie konforme Geometrien bereits mit Schülerinnen und Schülern der Sekundarstufe I in Form eines Black-Box-Zuganges zu erörtern.

Dabei werden die Außenmerkmale der Black Box „Konforme Geometrische Algebra“ (CGA¹) herangezogen und unter dem Gesichtspunkt, was die Black Box CGA leistet, analysiert und eingesetzt. Was innerhalb der CGA mathematisch passiert, spielt in diesem didaktischen Ansatz keine wesentliche Rolle, solange klar ist, was als Output zu erwarten ist, wenn die Black Box CGA mit einem bestimmten, wohldefinierten Inputs gefüttert wird.

3. Black-Box-Lernen in der Physik

Der Black-Box-Ansatz in der Informatik und Informatikdidaktik ist ein Ansatz des Vertrauens. Im Gegensatz dazu ist der Black-Box-Ansatz in Physik und Physikdidaktik ein Ansatz des Misstrauens.

In der Physikdidaktik wird nicht eine vorgegebene, fest stehende Funktionalität von Black-Box-Verfahren in den Vordergrund gestellt. Im Zentrum des didaktischen und unterrichtlichen Handelns steht stattdessen die Genese von Hypothesen und Aussagen darüber, was innerhalb der Black Box vor sich geht. Verbunden damit sind immer Fragen nach der „Darstellung der verborgenen ‚wirklichen‘ Struktur“

[3, S. 561] dessen, was sich in der Black Box befindet.

Ziel der Black-Box-Methode im Physikunterricht ist in erster Linie, dass „aus eingehenden und ausgehenden Informationen (...) auf Strukturen und Prozesse im Inneren der Black Box geschlossen werden“ kann [5, S. 216]. Dieses inhärente Misstrauen hinterfragt somit Funktionalitäten – und damit auch Autoritäten. Beim Prozess des Physiklernens werden Information, die die Lehrperson, die Mitschülerinnen und Mitschüler oder die Natur (im Experiment) liefern, auf allen Ebenen hinterfragt. Dieses forschende Misstrauen in Mitmenschen und Natur ist die Quelle originärer Naturerkenntnis.

Übertragen auf die Konforme Geometrische Algebra bedeutet dies, dass der aus der Physik kommende Autor (M. H.) die Frage, wie die Black Box CGA im Inneren funktioniert, in den Vordergrund seiner didaktischen Analyse stellt.

Dabei sind jedoch mathematische Vorkenntnisse notwendig, die in der Sekundarstufe I noch nicht vorliegen. Aus diesem Grund bezieht sich der zweite Teil dieses Beitrags auf Lernende mit solchen verstärkten Mathematikkenntnissen, wie sie im Leistungskursbereich der Sekundarstufe II oder im hochschulischen Kontext vorzufinden sind.

Die beiden Autoren vergleichen dabei ihr Vorgehen mit einer Auto-Analogie. Der Erwerb eines Führerscheins und die Ausbildung zum Automechaniker vollziehen sich auf unterschiedlichen Niveaustufen. Die Nutzung der CGA als Black Box ist so einfach wie der Erwerb eines Führerscheins. Es sind keine großartigen Kenntnisse über die Funktionsweise des Automotors notwendig, und es ist unerheblich, ob das Auto mit einem Diesel-, einem Wankel- oder einem Otto-Motor fährt. Ziel ist lediglich das Erlernen des Fahrens.

Gänzlich anders stellt es sich in der Automechaniker-Ausbildung dar. Diese kann nur gelingen, wenn die Black Box „Automotor“ geöffnet und vollständig durchdrungen wird. Die Black Box hat dann ihre Schuldigkeit getan, wenn sie gerade keine Black Box mehr ist. Das ist das Ziel des zweiten Teils dieses Beitrags.

Selbstverständlich haben beide Vorgehensweisen ihre didaktische Berechtigung. Schließlich leben wir in einer Welt, in der es sowohl Autofahrer gibt, wie auch Automechaniker – die gleichfalls Autofahrer sind. In diesem Sinne kann es hilfreich sein, sich bereits in der Sek. I mit der CGA als Black Box zu beschäftigen, diese aber erst in der Sek. II oder im Studium dann tatsächlich zu öffnen.

4. Ziel dieses Beitrags

Dieser Beitrag überschreitet nicht nur Fächergrenzen, er überschreitet sie in unkonventioneller Richtung. Üblicherweise werden mathematische Methoden benötigt, um physikalische oder informatische Sachverhalte abstrakt und dadurch sehr präzise dar-

¹ Die Abkürzung CGA orientiert sich am englischen Ausdruck „Conformal Geometric Algebra“.

stellen und ausdrücken zu können. Die Mathematik ist somit „Hilfsmittel“ [3, S. 4] und „Handwerkszeug“ [3, S. 5] für die Wissenschaften der Physik und Informatik.

Dabei gilt: Die Mathematik ist nicht nur bezüglich elaborierter Ausarbeitungen der Theoretischen Physik oder Theoretischen Informatik, sondern auch in den Stufen der Theorieannäherung und -findung sowie den damit verbundenen Lernprozessen Hilfsmittel und Handwerkszeug. In diesem Sinne ist sie didaktisches Hilfsmittel auch auf schulischer Ebene: „Traditionell ist die Rolle von Mathematik als Beschreibungs- und Problemlösungssprache in Naturwissenschaften“ [6, S. 34].

Dieser didaktische Aspekt der Mathematik wird insbesondere durch David Hestenes und seine didaktische Aufarbeitung der Clifford-Algebra [7], [8] hervorgehoben.

Die Autoren des hier vorliegenden Beitrags teilen dabei die Überzeugung, dass die so generierte Geometrische Algebra ein wesentliches Hilfsmittel zur fachlichen wie auch didaktischen Erarbeitung ihrer jeweiligen Referenzwissenschaften Physik und Informatik darstellt. In zahlreichen Beiträgen (siehe Literaturangaben in [9], [10], [11]) haben wir dies auch so umgesetzt und dabei gezeigt, dass die Geometrische Algebra ein effektives mathematisches Handwerkszeug und Hilfsmittel für unsere Wissenschaftsdomänen darstellt.

In dem hier vorliegenden Beitrag zur CGA kehren wir diese klassische Rollenzuteilung nun um. Ziel ist, auf eine moderne Form der CGA [12] hinarbeiten und diese Lernenden zugänglich zu machen. Dabei verwenden wir die Informatik und Physik bzw. informatikdidaktische und physikdidaktische Ideen als Hilfsmittel und Werkzeuge.

Wir sind überzeugt: Nicht nur die Physik und Informatik wird leichter und kognitiv verständlicher, wenn wir mathematische Beschreibungsmuster einbinden. Es gilt auch die umgekehrte Wirkungsrichtung: Auch die Mathematik wird leichter und kognitiv verständlicher, wenn wir informatische und physikalische Beschreibungsmuster einbinden.

Und in den folgenden Abschnitten binden wir informatikdidaktische und physikdidaktische Ideen nicht nur locker in Form motivationaler Elemente ein, sondern wir bauen die mathematische Struktur der Konformen Geometrischen Algebra tatsächlich darauf auf.

5. Fachlicher Hintergrund Informatikdidaktik

In der Informatik wird die Konforme Geometrische Algebra zur Beschreibung geometrischer Operationen im dreidimensionalen Raum eingesetzt. Die Modellierung und programmtechnische Umsetzung auf Grundlage einer solchen konformen Geometrie überzeugt durch ihre strukturelle Eleganz, eine hohe Recheneffektivität und Robustheit.

Der fachliche Hintergrund dieser Herangehensweise ist in der Literatur schon ausführlich beschrieben. Interessant sind dabei insbesondere die Darstellungen der Konformen Geometrischen Algebra, die unter mathematik- und informatikdidaktischen Aspekten angefertigt und aufgearbeitet wurden. Auf Grundlage von [13] werden im Folgenden die fachlichen Grundlagen der CGA zusammengefasst.

Mit der Geometrischen Algebra steht generell eine übergreifende mathematische Sprache zur Verfügung, die es erlaubt, sehr direkt aus der geometrischen Anschauung heraus zu rechnen. So kann beispielsweise mit geometrischen Objekten wie Kugeln, Ebenen und Kreisen sowie mit geometrischen Operationen wie Schnitten von verschiedenen Objekten oder mit Transformationen sehr einfach und direkt gerechnet werden.

Algebraisch kommen zu den drei Euklidischen Basisvektoren die beiden Basisvektoren e_0 für den Ursprung und e_∞ für die Unendlichkeit hinzu. Alle Kombinationen dieser Basisvektoren ergeben die 32 algebraischen Basiselemente, die als Blades bezeichnet werden. Ein Multivektor ist eine Linearkombination all dieser Blades, die selbst eine Dimension zwischen 0 für einen Skalar und 5 für den sogenannten Pseudoskalar besitzen.

Die folgende Tabelle (siehe Abb. 1) zeigt die geometrischen Basisobjekte der Konformen Geometrischen Algebra, die sich als einfache algebraische Ausdrücke ausdrücken lassen.

Entität	IPNS	OPNS
Punkt	$P = \mathbf{x} + \frac{1}{2} \mathbf{x}^2 e_\infty + e_0$	
Kugel	$s = P - \frac{1}{2} r^2 e_\infty$	$s^* = P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge P_4$
Ebene	$\pi = \mathbf{n} + d e_\infty$	$\pi^* = P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge e_\infty$
Kreis	$z = s_1 \wedge s_2$	$z^* = P_1 \wedge P_2 \wedge P_3$
Gerade	$l = \pi_1 \wedge \pi_2$	$l^* = P_1 \wedge P_2 \wedge e_\infty$
Punkt-paar	$P_p = s_1 \wedge s_2 \wedge s_3$	$P_p^* = P_1 \wedge P_2$

Abb.1: Darstellungen geometrischer Objekte in der CGA.

Dies sind Punkte, Kugeln, Ebenen, Kreise, Geraden und Punktpaare. Ein Punkt P wird beispielsweise als Linearkombination des 3D-Punkts

$$\mathbf{x} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 \quad \{1\}$$

und der zusätzlichen Basisvektoren e_0 und e_∞ repräsentiert. Dabei werden 3D-Vektoren bzw. 3D-Punkte der Konformen Geometrischen Algebra normalerweise fett gekennzeichnet.

Für die geometrischen Objekte gibt es zwei Repräsentationen, nämlich das IPNS (Inner Product Null Space für den Nullraum bezüglich des inneren Produkts) und das OPNS (Outer Product Null Space für den Nullraum bezüglich des äußeren Produkts), siehe [14] und [15].

Will man beispielsweise die Menge aller Punkte wissen, die bezüglich des inneren Produkts mit dem algebraischen Ausdruck e_0 eine 0 ergeben (IPNS von e_0), ergibt sich die implizite Gleichung

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \quad \{2\}$$

Diese wird nur vom 3D-Ursprung erfüllt wird. Die beiden Repräsentationen sind dual zueinander. Um zwischen den beiden Repräsentationen wechseln zu können, wird der dual-Operator $*$ benutzt.

In der IPNS-Repräsentation wird eine Kugel repräsentiert mit Hilfe des Mittelpunkts P und des Radius r . In dieser Repräsentation ist die Bedeutung des äußeren Produktes gleichbedeutend mit dem Schnitt von geometrischen Objekten. Beispielsweise ist der Kreis z definiert als Schnitt von zwei Kugeln s_1 und s_2

$$z = s_1 \wedge s_2 \quad \{3\}$$

In der OPNS-Repräsentation konstruiert man eine Kugel mit Hilfe des äußeren Produktes von vier Punkten P_i , die auf der Oberfläche der Kugel liegen. Quadriert man die algebraischen Ausdrücke für Kugeln, Kreise oder Punktpaare erhält man das Quadrat ihrer Radien.

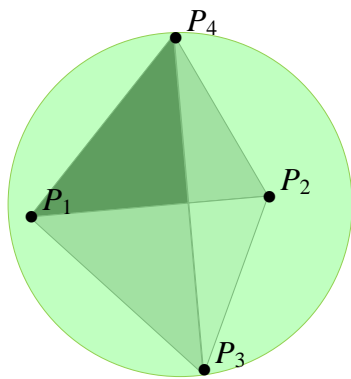


Abb.2: Die vier Eckpunkte eines Tetraeders liegen auf einer Kugel.

Will man beispielsweise den Radius der einen Tetraeder umhüllenden Kugel berechnen, kann man das sehr einfach in zwei Schritten tun. Zunächst berechnet man die Kugel S als äußeres Produkt der Eckpunkte des Tetraeders

$$s^* = P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge P_4 \quad \{4\}$$

Das Quadrat dieses Ausdrucks liefert direkt das Quadrat des Radius der Kugel.

$$s^{*2} = r^2 \quad \{5\}$$

Neben der einfachen und direkten Beschreibung von geometrischen Objekten bietet die Geometrische

Algebra eine große Menge an Möglichkeiten, geometrische Operationen zu beschreiben.

Neben den Schnitten von geometrischen Objekten gehören dazu die einfache Bestimmung von Abständen und Winkeln sowie Rotationen, Translationen, Projektionen oder Spiegelungen. Den Mittelpunkt einer Kugel kann man beispielsweise als eine Spiegelung der Unendlichkeit an der Kugel ausdrücken.

Aus didaktischer Sicht ergibt sich damit die Notwendigkeit, das doch sehr umfassende große mathematische System in kleinere und sinnvoll verarbeitbare Einheiten zu strukturieren. Mit der Konformen Geometrischen Algebra ist prinzipiell ein Rechnen im Raum, analog zum Konstruieren in 2D mit Lineal und Zirkel, möglich.

6. Konkrete Umsetzung

Bei verschiedenen Anlässen insbesondere im Zusammenhang mit Veranstaltungen der Kinderuni Darmstadt [16] sowie der Science Tour des hessischen Ministeriums für Wissenschaft und Kunst [17] konnte in den letzten Jahren Erfahrung damit gesammelt werden, wie gut Schülerinnen und Schüler mit der Konformen Geometrischen Algebra klar kommen.

Nach einer kurzen Einführung in die Mathematik und insbesondere in die geometrischen Objekte aus der obigen Tabelle (Abb. 1) sowie in das Programm CLUCalc sind schon jüngere Kinder (an der Kinderuni zwischen 8 und 14 Jahren) schnell in der Lage, selbst interaktiv mit dem Tool zu arbeiten.

Der große Vorteil von Geometrischer Algebra ist, dass die algebraischen Ausdrücke eine direkte geometrische Bedeutung haben. Dies wird von CLUCalc unterstützt, indem die geometrische Bedeutung sofort visuell angezeigt wird, was zum Experimentieren mit der Algebra motiviert.

Um die geometrische Vorstellung der Kinder zu unterstützen, werden zur Einführung auch kleinere praktische Aufgaben gelöst. Mit Hilfe einer Bastelvorlage wird beispielsweise ein Tetraeder gebastelt, um seine Konstruktion besser zu verstehen.

Eine wesentliche Operation, das Produkt zweier Kugeln, kann mit Hilfe von Seifenblasen illustriert werden, bei denen die Kinder den Schnittkreis sehr schön erkennen können. Ein solches Freihand-Experiment als Teil einer Kinderuni-Veranstaltung ist in Abbildung 3 gezeigt.

Nachdem die Kinder beispielsweise in einem MINT-Workshop der Kinderuni selbst interaktiv den Algorithmus für die Konstruktion eines Tetraeders sowie seiner umhüllenden Kugel entwickelt haben, haben sie das Verständnis auch für kompliziertere Anwendungen wie die in Abbildung 4 dargestellte einfache Roboter-Kinematik.

Da sie sich auch sonst sehr für Roboter interessieren, erfüllt es sie mit besonderem Stolz, dass sie eine solche Aufgabe lösen können, die darüber hinaus



Abb.3: Ein Kinderuni-Teilnehmer ermittelt die Schnittkreise mehrerer Seifenblasen-Kugeln im Experiment.

auch Bestandteil eines wissenschaftlichen Buches [15] ist.

Kindern an der Kinderuni macht es sehr viel Spaß, mit der Geometrischen Algebra als Black Box zu rechnen und zu experimentieren. Sie hinterfragen beispielsweise die beiden Basisvektoren e_0 für den Ursprung und e_∞ für die Unendlichkeit kaum. Diese Hintergründe werden später viel wichtiger. Dies war ein wichtiges Ergebnis der Aktion „Wissenschaftler im Unterricht“ [18] des hessischen Ministeriums für Wissenschaft und Kunst. Bei verschiedenen Besuchen von hessischen Gymnasien konnten sehr interessante, in die mathematische Tiefe gehende Dis-

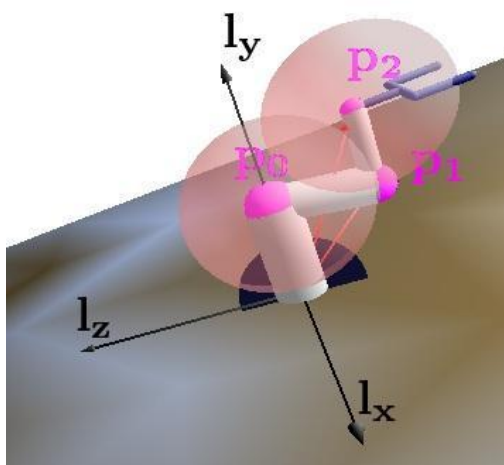


Abb.4: Darstellung der Bewegungsabläufe eines Roboters mit Hilfe des Programms CLUCalc.

kussionen mit Schülerinnen und Schülern höherer Jahrgangsstufen geführt werden.

Zusammenfassend zeigt dies eine schöne Eigenschaft von Geometrischer Algebra für die Didaktik:

Die jüngeren Schüler können sehr schnell mit Geometrischer Algebra umgehen und auch relativ komplexe Aufgaben damit lösen, während die älteren Schüler, die alles stärker hinterfragen, problemlos in die Lage versetzt werden können, die mathematischen Grundlagen wirklich zu verstehen.

7. Physikalischer Hintergrund

Ebenso wie in der Informatik wird die Konforme Geometrische Algebra auch in der Physik zur Beschreibung geometrischer Operationen des dreidimensionalen Raum oder höherdimensionaler Raumzeiten eingesetzt. Hier überzeugt insbesondere die strukturelle Eleganz im Hinblick auf eine theoretische Beschreibung höchst unterschiedlicher physikalischer Strukturen in einem gemeinsamen Rahmen.

Aus mathematischer Perspektive sind konforme Ansätze insbesondere durch die Winkelerhaltung bei konformen Transformationen ausgezeichnet. Aus physikalischer Perspektive tritt aber ein anderer wesentlicher Punkt in den Vordergrund: Die Möglichkeit, die gesamte physikalische Welt im Rahmen eines lichtartigen Verhaltens zu beschreiben.

Deshalb ist es sinnvoll, die Natur des Lichts aus geometrischer Perspektive zu analysieren und zu durchdenken, was im Folgenden auf Grundlage der Darstellung des Beitrags [19] erfolgt.

Dabei betrachten wir das Licht aus zwei Perspektiven: Zum einen aus der Perspektive eines ruhenden Beobachters; zum anderen versuchen wir, die Perspektive des Lichtes selbst einzunehmen.

Für einen ruhenden Beobachter, dessen Weltlinie mit der Zeit-Achse des abgebildeten Minkowski-Diagramms von Abbildung 5 übereinstimmt, existiert zwischen den beiden Punkten P_1 und P_2 , die auf der Weltlinie von Licht liegen, sowohl ein räumlicher Abstand $\Delta x > 0$ und ein zeitlicher Abstand $\Delta t > 0$, die beide größer als Null sind. Mit Hilfe eines Maßbandes und einer Uhr kann ein solcher Beobachter mithin diese räumlichen und zeitlichen Abstände messen. Für ihn sind P_1 und P_2 zwei verschiedene, eindeutig unterscheidbare Punkte.

Dies gilt jedoch nicht für das Licht. Je schneller ein Beobachter sich bewegt, desto geringer wird aufgrund der relativistischen Zeitdilatation und Längenkontraktion der von ihm gemessene räumliche und zeitliche Abstand.

Im Grenzfall einer Bewegung mit Lichtgeschwindigkeit, wie sie Lichtteilchen (Photonen) ausführen, schrumpft der räumliche und zeitliche Abstand auf Null. Photonen können mit einer hypothetisch mitgeführten Messapparatur somit keinen räumlichen oder zeitlichen Abstand zwischen den Raumzeit-Punkten P_1 und P_2 messen.

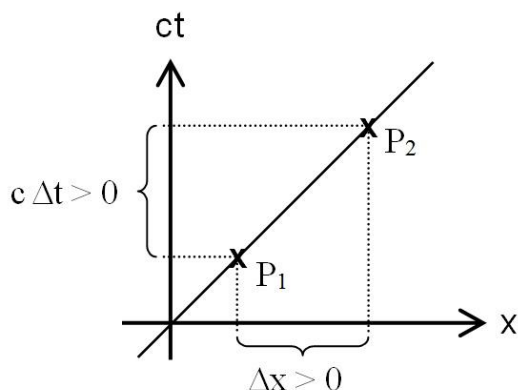


Abb.5: Minkowski-Diagramm von zwei Raumzeit-Punkten P_1 und P_2 in lichtartiger Distanz.

Ereignisse in P_1 und P_2 finden für Licht an der gleichen Stelle und zum gleichen Zeitpunkt statt. Mithin sind die beiden Punkte P_1 und P_2 für Licht identisch. Mathematisch drückt sich diese Identität durch den verschwindenden raumzeitlichen Abstand

$$\Delta r = c(t_2 - t_1) e_- + (x_2 - x_1) e_1 \quad \{6\}$$

$$\begin{aligned} \Delta r^2 &= c^2(t_2 - t_1)^2 + (x_2 - x_1)^2 \\ &= c^2 \Delta t^2 + \Delta x^2 = 0 \end{aligned} \quad \{7\}$$

aus. Deshalb ist die Schlussfolgerung zwingend: Wir als ruhende Beobachter sehen in Abbildung 5 zwei unterschiedliche Raumzeit-Punkte, während aus der Perspektive des Lichts hier nur ein räumlicher Punkt zu erkennen ist.

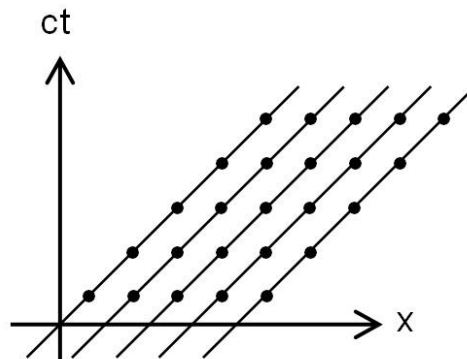


Abb.6: Minkowski-Diagramm von Raumzeit-Punkten mit verschwindenden raumzeitlichen Abständen.

8. Mathematischer Hintergrund

Die mathematische Strategie, einen Punkt in eine lichtartige Gerade umzuwandeln, kann in zwei Teilschritten beschrieben werden:

- **„Alles wird Eins“**
Kugelprojektion – die Punkte des dreidimensionalen Raumes werden auf die dreidimensionale Oberfläche einer vierdimensionalen Einheitskugel projiziert.
- **„Alles wird Null“**
Die Punkte auf der vierdimensionalen Einheitskugel werden zu einem senkrecht dazu liegenden zeitartigen Einheitsvektor addiert.

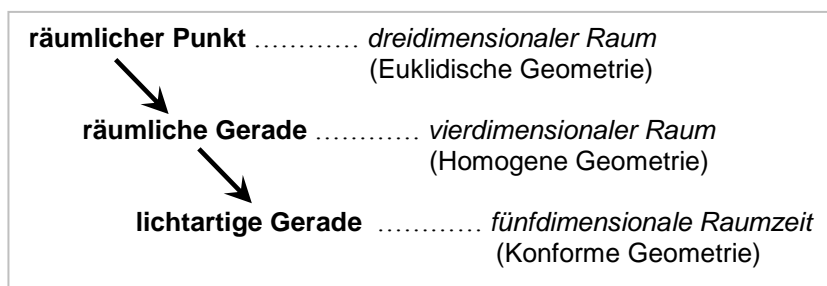


Abb.7: Strategiestritte zur Konstruktion der Konformen Geometrischen Algebra.

Und wir als ruhende Beobachter sehen in Abbildung 6 genau 25 unterschiedliche Raumzeit-Punkte, während aus der Perspektive des Lichts hier nur fünf räumliche Punkte zu erkennen sind, die von uns als lichtartige Geraden wahrgenommen werden.

Diese Identifikation geometrisch unterschiedlicher Objekte ist der zentrale Gesichtspunkt konformer Geometrien: Etwas, das aus der Sichtweise lichtschneller Beobachter als räumlicher Punkt erscheint, ist aus der Sicht ruhender Beobachter eine lichtartige Gerade.

In der CGA nehmen wir genau diese Umdeutung vor. Punkte des dreidimensionalen Raums werden mathematisch als lichtartige Geraden einer höherdimensionalen Raumzeit beschrieben.

Diese beiden Strategiestritte sind in in Abbildung 7 dargestellt. Folgen wir diesen, die Dimension jeweils um eine Stufe erhöhenden Schritten, so können wir aus unserer dreidimensionalen, Euklidischen Welt eine zu ihr mathematisch äquivalente fünfdimensionale Licht-Welt konstruieren. In dieser lassen sich alle Punkte des dreidimensionalen Raums eindeutig mit lichtartigen Geraden einer fünfdimensionalen Raumzeit identifizieren.

Die einzelnen mathematischen Schritte, die in Abbildung 7 thematisiert und hinsichtlich ihrer kognitiven Abfolge verortet sind, führen nun zu einer direkten didaktischen Forderung: Vor einem Unterricht zur oder Erlernen der konformen Geometrie hat ein Unterricht zur oder Erlernen der Speziellen Relativi-

tät zu liegen, da Kenntnisse zur raumzeitlichen Mathematik nicht axiomatisch abgehoben, sondern physikalisch eingebettet vermittelt werden sollten.

Jeder Punkt des dreidimensionalen Euklidischen Raums kann mit einem Punkt auf der dreidimensionalen Oberfläche der vierdimensionalen Kugel iden-

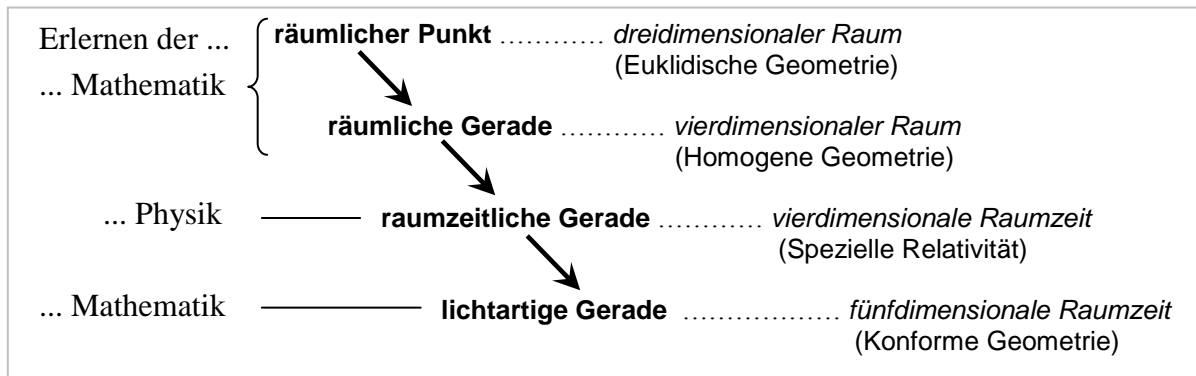


Abb.8: Fächerübergreifende Erweiterung der Strategiestritte zum Erlernen der Konformen Geometrischen Algebra.

Dies ist verbunden mit einer deutlichen physikalischen Fundierung der mathematischen Grundlagen.

In der Geometrischen Algebra rechnen wir direkt mit physikalisch zugänglichen Grundgrößen: Vektoren als orientierte Strecken, Bivektoren als orientierte Flächenstücke, Trivektoren als orientierte Volumina. Es handelt sich dabei nach Parra Serra um eine „physikalische Mathematik“ [20, Kap. 2], bei der Pauli-Matrizen als Basisvektoren des dreidimensionalen Raumes und Dirac-Matrizen als Basisvektoren einer vier- oder fünfdimensionalen Raumzeit [21], [22] interpretiert werden. Die wesentlichen Grundlagen dieser physikbasierten Konzeptbildungen lauten nach [20, Abs. 2.2.1, S. 823]:

- Geometrische Objekte werden als reale Linearkombinationen der Basisvektoren und ihrer Produkte ausgedrückt.
- Basisvektoren antikommutieren und quadrieren zu $+1$, -1 oder 0 .

Werden räumlichen Basisvektoren nun positive Quadrate

$$e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = e_+^2 = 1 \quad \{8\}$$

zugeordnet, liefert die physikalisch motivierte Einführung einer zusätzlichen zeitartigen Dimension einen Basisvektor, der mit

$$e_-^2 = -1 \quad \{9\}$$

ein negatives Quadrat aufweist. Die Einführung zusätzlicher raum- oder zeitartiger Dimensionen (mit Hilfe der Basisvektoren e_+ , e_-) beschreibt den Übergang zu homogenen und konformen Geometrien.

9. Darstellung der Einzelschritte

Im ersten Schritt wird der dreidimensionale Euklidische Raum durch eine weitere raumartige Dimension ergänzt. In dieser nun vierdimensionalen Welt wird eine vierdimensionale Einheitskugel um den Ursprung gelegt (siehe Abb. 10a).

tifiziert werden, indem vom „Nordpol“ N der Kugel eine Verbindungslinie zum Punkt X gezogen wird.

Der Schnittpunkt P' dieser Linie mit der Kugeloberfläche repräsentiert in dieser Kugelwelt den Punkt X unserer Euklidisch dreidimensionalen Welt. Analog zum Vorgehen in [23] kann dieser Ortsvektor p' bestimmt werden, indem vom Nordpol ausgehend der Verbindungslinie $x - e_+$ gefolgt wird:

$$p' = e_+ + \lambda (x - e_+) \quad \{10\}$$

Der Koeffizienten λ kann durch die Eigenschaft

$$p'^2 = e_+^2 = 1 \quad \{11\}$$

bestimmt werden, da die Kugel aufgrund von {8} einen Einheitsradius aufweist. Die Auswertung von Gleichung {11} ergibt aufgrund der Antikommutativität von x und e_+ , die senkrecht zueinander stehen:

$$1 = (e_+ + \lambda (x - e_+)) (e_+ + \lambda (x - e_+)) \quad \{12a\}$$

$$1 = e_+^2 + \lambda (x e_+ + e_+ x - 2 e_+^2) + \lambda^2 \underbrace{(x^2 - x e_+ - e_+ x + e_+^2)}_0 \quad \{12b\}$$

$$1 = 1 - 2 \lambda + \lambda^2 (x^2 + 1) \quad \{12c\}$$

$$0 = -2 \lambda + \lambda^2 (x^2 + 1) \quad \{12d\}$$

Damit lautet der Koeffizient λ

$$\lambda = \frac{2}{1 + x^2} \quad \{13\}$$

und dementsprechend der Kugelvektor p' aufgrund von Gleichung {10}

$$p' = e_+ + \frac{2}{1 + x^2} (x - e_+) = \frac{x^2 e_+ + 2x - e_+}{1 + x^2} \quad \{14\}$$

Dieser in Abbildung 10a dargestellte Vektor ist jedoch nur eine der möglichen Repräsentationen des ursprünglichen Vektors x . Da es sich um eine homogene Darstellung handelt, wird der Punkt X durch alle Punkte, die auf der homogenen Geraden (siehe

Abbildung 10b) liegen – oder eben durch die gesamte homogene Gerade – repräsentiert.

Im zweiten Schritt wird auf die Eigenschaften speziell-relativistischer Raumzeiten Bezug genommen: Punkte auf einem Lichtkegel zeichnen sich dadurch aus, dass ihre räumlichen und zeitlichen Koordinaten

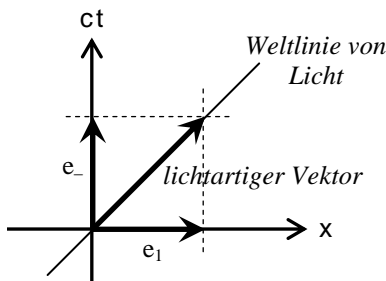


Abb.9: Konstruktion lichtartiger Vektoren durch Superposition gleich langer raum- und zeitartiger Vektoren.

betragsmäßig gleich groß sind. Wird deshalb ein zeitartiger Einheitsvektor e_- zu einem raumartigen Einheitsvektor addiert (siehe Abb. 9), so ergibt sich ein lichtartiger Vektor der Länge Null:

$$(e_- + e_1)^2 = 0 \quad \{15\}$$

Diese Strategie wendet man auf die vierdimensionale Einheitskugel an. Zur Konstruktion einer konformen Geometrie wird eine fünfte, zeitartige Dimension in Richtung des Einheitsvektors e_- (siehe Gl. {9}) eingeführt. Die Einheitskugel wird somit entlang dieser zeitartigen Koordinatenachse um eine Einheit verschoben. Dadurch werden die Punkte P' in die Punkte P einer fünfdimensionalen Raumzeit überführt, für die gilt:

$$p = p' + e_- = \frac{x^2 e_+ + 2x e_- + e_+}{1+x^2} + e_- \quad \{16\}$$

$$= \frac{2}{1+x^2} \left(x + \frac{1}{2} x^2 (e_- + e_+) + \frac{1}{2} (e_- - e_+) \right)$$

Dieser in Abbildung 11a dargestellte lichtartige Vektor p ist jedoch nur eine der möglichen Repräsentationen des ursprünglichen Vektors x . Wie anhand des Minkowski-Diagramms der Abbildungen 5 und 6 diskutiert, sind für Licht alle anderen auf einer lichtartigen Geraden liegenden Punkte identisch.

Der Punkt X des dreidimensionalen Raums wird deshalb durch alle Punkte, die auf der konformen, lichtartigen Geraden (siehe Abbildung 11b) liegen – oder eben durch die gesamte konforme Gerade – repräsentiert.

Deshalb ist es legitim, den Vektor p zu skalieren, ohne dass dies etwas an seiner Natur als Repräsentant für den ursprünglichen Vektor x zu stehen, ändert. Die endgültige konforme Darstellung P für den Vektor x lautet deshalb üblicherweise:

$$P = x + \frac{1}{2} x^2 (e_- + e_+) + \frac{1}{2} (e_- - e_+) \quad \{17\}$$

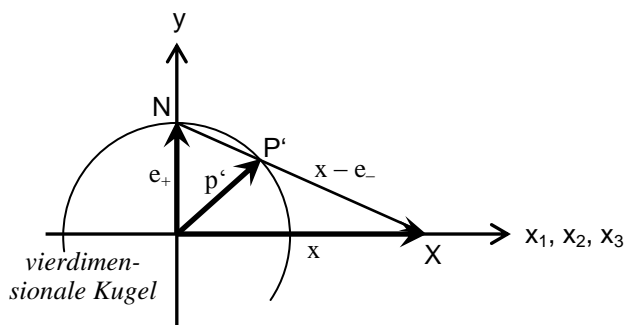


Abb.10a: Kugelprojektion: Abbildung des Punktes X auf Punkt P' der Oberfläche der vierdimensionalen Kugel.

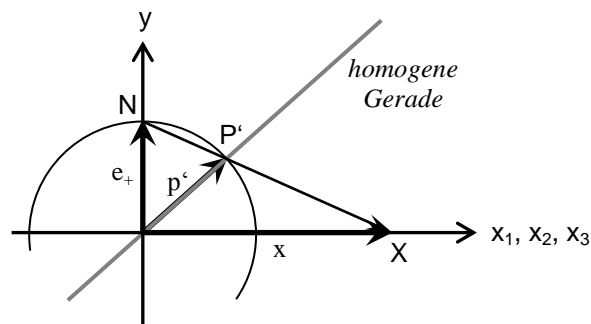


Abb.10b: Jeder Punkt auf der homogenen Geraden im vierdimensionalen Raum repräsentiert den inhomogenen Punkt X des dreidimensionalen Raums.

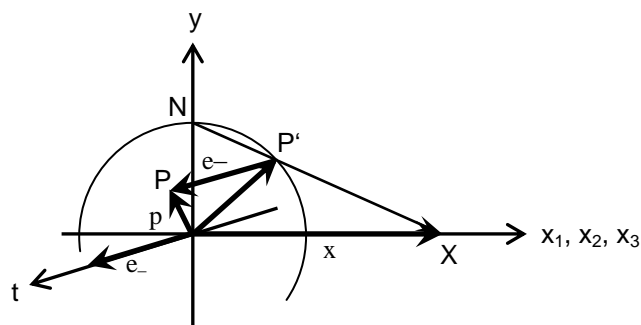


Abb.11a: Konstruktion des Punktes P der fünfdimensionalen konformen Licht-Welt mit Hilfe des zusätzlichen zeitartigen Einheitsvektors e_- .

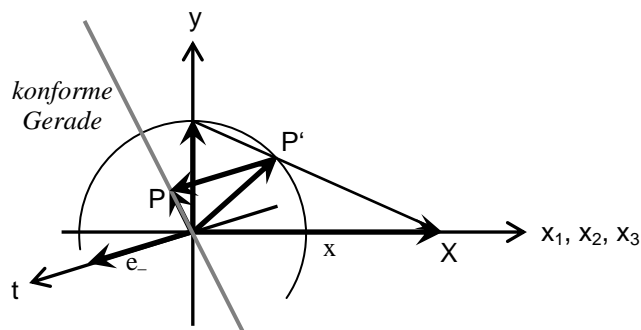


Abb.11b: Jeder Punkt auf der konformen Geraden der fünfdimensionalen Raumzeit repräsentiert den inhomogenen Punkt X des dreidimensionalen Raums.

Diese Darstellung kann durch die Wahl einer alternativen Basis² mit

$$e_{\infty} = e_{-} + e_{+} \quad \{18\}$$

$$e_0 = \frac{1}{2}(e_{-} - e_{+}) \quad \{19\}$$

vereinfacht dargestellt werden. Es ergibt sich dann die bereits in Abbildung 1 aufgeführte Darstellung für den konformen Punkt P:

$$P = x + \frac{1}{2}x^2 e_{\infty} + e_0 \quad \{20\}$$

Die Formel {20} ist ein wahrer mathematischer und physikalischer Goldschatz! Sie beschreibt aus physikalischer Sicht, wie unsere Welt in eine Licht-Welt umgewandelt werden kann.

Jeder Punkt des dreidimensionalen, Euklidischen Raums, in dem wir vor Einstein lebten, kann gemäß Gleichung {20} einem lichtartigen Punkt der fünfdimensionalen, pseudo-euklidischen Raumzeit mit konformer Struktur gleichgesetzt werden.

Die Frage also, ob wir im Dreidimensionalen oder aber im fünfdimensional Konformen leben, ist zu einer Frage des Blickwinkels geworden. Je nachdem, aus welcher Perspektive wir unsere Welt betrachten, erhalten wir eine andere Antwort. Und eine dieser Antworten lautet: Alles ist Licht (oder kann Licht sein), denn die Geometrie von Nullvektoren spiegelt die Geometrie von Licht wieder.

Und auch aus mathematischer Sicht sind in den obigen Formeln konzeptionell überraschende Details enthalten, denn die beiden lichtartigen Basisvektoren {18} und {19} lassen sich geometrisch eindeutig identifizieren.

Der Vektor e_0 der fünfdimensionalen CGA entspricht dem Ursprungsvektor $x = 0$ des dreidimensionalen Raums. Er liegt aber nicht im Ursprung $P = 0$ der fünfdimensionalen konformen Raumzeit, so dass der dreidimensionale Ursprungsvektor in der CGA kein mathematisch ausgezeichnete Vektor ist. Er ist stattdessen ein Vektor wie jeder andere auch, mit dem ganz normal gerechnet werden kann.

Und der Vektor e_{∞} ist ein noch erstaunlicheres mathematisches Konstrukt. Er bildet unendlich weit entfernte Punkte und somit die Unendlichkeit am Nordpol der um eine Zeiteinheit verschobenen Einheitskugel ab.

Damit haben wir hier eine Mathematik gefunden, in der das Unendliche in greifbare Nähe rückt und wir mit Unendlichkeiten genauso rechnen können wie mit anderen Vektoren auch.

² Die Wahl der lichtartigen Basisvektoren {18} und {19} und damit die genaue Darstellung von Gleichung {20} hat historische Gründe und geht auf [24, Gl. 2.2] zurück. Es sind auch alternative Formulierungen für die lichtartigen Basisvektoren e_{∞} und e_0 wie z.B. in [19, S. 562] möglich (siehe dazu auch die Diskussion in [23, Tab. 11.1, S. 206]).

10. Ausblick

Mit der ausführlichen Herleitung von Gleichung {20} haben wir die Black Box der Konformen Geometrischen Algebra nur ein kleines Stückchen geöffnet. Ein tieferer Blick in diese Black Box, in der uns die in Tabelle 1 aufgeführten geometrischen Objekte erwarten, wird später erfolgen.

Aber die Aussicht darauf ist faszinierend, denn die Formeln von Tabelle 1 versprechen uns eine verblüffende mathematische Welt: Wir multiplizieren drei Punkte mit Hilfe des äußeren Produktes miteinander und wir erhalten den Kreis, der durch diese drei Punkte verläuft. Wir multiplizieren vier Punkte mit Hilfe des äußeren Produktes miteinander und wir erhalten die Kugel, auf der die vier Punkte liegen.

Und diese Mathematik beschreibt in sehr natürlicher Weise Geraden und Ebenen: Eine Gerade ist ein Kreis mit einem unendlich großen Radius. Also stellt hier ein Kreis das äußere Produkt dreier Punkte dar, von denen einer in der Unendlichkeit e_{∞} liegt.

Ebenen sind Oberflächen von Kugeln mit unendlich großem Radius. Somit beschreibt das äußere Produkt aus vier Punkten, von denen sich einer in der Unendlichkeit e_{∞} befindet, die Ebene, in der die drei nicht unendlich weit entfernten Punkte liegen.

Diese Mathematik kann die Beschreibung physikalischer Effekte aus Blickwinkeln erlauben, die uns sonst nicht zugänglich wären. Das hat schon Dirac erkannt, der die konforme Geometrie als wirkungsmächtiges mathematisches Werkzeug in die Physik einführt [25].

Wie Dirac zeigte, kann die Beschreibung von vierdimensionalen Raumzeiten durch konforme sechsdimensionale Geometrien nicht nur erfolgreich durchgeführt werden, sondern auch zur Vereinheitlichung verschiedener theoretischer Zugänge führen.

Es ist deshalb zu erwarten, dass auch die Entwicklung einer sechsdimensionalen CGA, wie sie Doran und Lasenby in [22, Abs. 10.7, S. 383] aufzeigen, bei der didaktischen Aufarbeitung zu neuen Darstellungsformen und lerngeeigneten Zugängen führen wird.

Diese modernen Darstellungsformen werden zwingend auf universitärer Ebene zu behandeln sein. Aus didaktischer Sicht ist jedoch auch eine elementare schulische Einbettung nicht nur denkbar, sondern als erfolgreich vermittelbare Black Box gut leistbar. Dies haben die hier vorgestellten Ansätze unserer Kolleginnen und Kollegen aus der Informatik bei der Arbeit mit Schülerinnen und Schülern gezeigt.

Und was in der Informatik möglich ist, sollte erfolgreich auch im Physikunterricht und der Physikdidaktik möglich sein.

11. Literatur

- [1] Hubwieser, Peter (2007): Didaktik der Informatik. Grundlagen, Konzepte, Beispiele. Dritte, überarbeitete und erweiterte Auflage, Springer-

- Verlag, Berlin, Heidelberg.
- [2] Humbert, Ludger (2006): Didaktik der Informatik – mit praxiserprobtem Unterrichtsmaterial. Zweite, überarbeitete und erweiterte Auflage, B.G. Teubner Verlag / GWV Fachverlage, Wiesbaden.
- [3] Kircher, Ernst; Girwitz, Raimund; Häußler, Peter (Hrsg.) (2009): Physikdidaktik, Theorie und Praxis. Zweite Auflage, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.
- [4] Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland (Hrsg.) (2005): Bildungsstandards im Fach Physik für den Mittleren Schulabschluss (Jahrgangsstufe 10). Beschluss vom 16. 12. 2004. Luchterhand/Wolters Kluwer, München, Neuwied.
- [5] Kircher, Ernst (1995): Studien zur Physikdidaktik: Erkenntnis- und wissenschaftstheoretische Grundlagen. Habilitationsschrift IPN 145. Institut für die Pädagogik der Naturwissenschaften (IPN), Kiel.
- [6] Baumert, Jürgen et al. (1998): Gutachten zur Vorbereitung des Programms „Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts“, Materialien zur Bildungsplanung und zur Forschungsförderung, Heft 60, Bund-Länder-Kommission für Bildungsplanung und Forschungsförderung, Bonn.
- [7] Hestenes, David (2003): Oersted Medal Lecture 2002: Reforming the Mathematical Language of Physics. In: American Journal of Physics, Vol. 71, No. 2, S. 104 – 121.
- [8] Hestenes, David (1986): A Unified Language for Mathematics and Physics. In: J. S. R. Chisholm; A. K. Commons (Hrsg.): Clifford Algebras and their Applications in Mathematical Physics. Kluwer Academic Publishers, Reidel, Dordrecht, S. 1 – 23.
- [9] Hildenbrand, Dietmar (2014): Liste bisheriger Veröffentlichungen auf der Internet-Homepage unter der URL www.gaalop.de/dhilden [01.05.2014].
- [10] Horn, Martin Erik (2014): Liste bisheriger Veröffentlichungen auf der Internet-Homepage unter der URL www.martin-erik-horn.de/veroeffentlichungen.html [01.05.2014].
- [11] Horn, Martin Erik (2013): Didaktische Konzeption eines Lehrbuchs zur Geometrischen Algebra. In: PhyDid B – Didaktik der Physik, Beiträge zur DPG-Frühjahrstagung des Fachverbands Didaktik der Physik in Jena 2013, Beitrag 17.10.
- [12] David Hestenes (2001): Old Wine in New Bottles: A New Algebraic Framework for Computational Geometry. In: Eduardo Bayro Corrochano; Garret Sobczyk (Hrsg.): Geometric Algebra with Applications in Science and Engineering. Birkhäuser, Boston, S. 3 – 16.
- [13] Hildenbrand, Dietmar; Oldenburg, Reinhard; Rembowski, Verena (2010): Schnittstellenaktivität S6 „Geometrische Algebra“. In: Anke Lindmeier, Stefan Ufer (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2010. Tagungsband der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, WTM-Verlag, Münster, S. 83 – 90.
- [14] Perwass, Christian (2009): Geometric Algebra with Applications in Engineering. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.
- [15] Hildenbrand, Dietmar (2013): Foundations of Geometric Algebra Computing. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.
- [16] Trägerverein der Kinderuniversität Darmstadt „Forum Beruf, Karriere, Zukunft e.V.“ (2014): Internetseiten zur Kinderuni Darmstadt (KID) unter der URL www.kinderuni-darmstadt.de [01.05.2014].
- [17] Hessisches Ministerium für Wissenschaft und Kunst (2014): Forum Wissenschaft und Kunst, Internetseiten der Science Tour Hessen unter der URL www.sciencetour-hessen.de [01.05.2014].
- [18] Hessisches Ministerium für Wissenschaft und Kunst (2014): Forum Wissenschaft und Kunst, Internetseiten zur Aktion „Wissenschaftler im Unterricht“ unter der URL www.sciencetour-hessen.de/veranstaltungen/wissenschaft-im-klassenzimmer [01.05.2014].
- [19] Horn, Martin Erik (2014): Ein physikalisch motivierter Weg zur Konformen Geometrie. In: Jürgen Roth, Judith Ames (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2014. Tagungsband der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, Band 1, WTM-Verlag, Münster, S. 559 – 562.
- [20] Parra Serra, Josep Manel (2009): Clifford Algebra and the Didactics of Mathematics. In: Advances in Applied Clifford Algebras, No. 3/4, Vol. 19, S. 819 – 834.
- [21] Hestenes, David (2002): New Foundations for Classical Mechanics. Zweite Auflage. Kluwer Academic Publishers, New York, Boston.
- [22] Doran, Chris; Lasenby, Anthony (2003): Geometric Algebra for Physicists. Cambridge University Press, Cambridge.
- [23] Vince, John (2008): Geometric Algebra for Computer Graphics. Springer-Verlag, London, Berlin.
- [24] Li, Hongbo; Hestenes, David; Rockwood, Alyn (2001): Generalized Homogeneous Coordinates for Computational Geometry. In: Gerald Sommer (Hrsg.): Geometric Computing with Clifford Algebras. Foundations and Applications in Computer Vision and Robotics. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, S. 27 – 59.
- [25] Dirac, Paul A. M. (1935): Wave Equations in Conformal Space. In: Annals of Mathematics, No. 2, Vol. 37, S. 429 – 442.