Posterbeitrag zur GDCP-Jahrestagung 2014 an der Universität Bremen, Postersession 6: Sprache, Mathematik und Repräsentationen, Beitrag P 83, Mi, 17. Sept. 2014, 10:30 h – 12: 30 h, Raum N 3380

# Dirac-Operator und Lorentz-Operator im didaktischen Vergleich

**Martin Erik Horn** – mail@grassmann-algebra.de

Hochschule für Wirtschaft und Recht Berlin

Berlin School of Economics and Law

**„… dass auch die Mathematik für ihr Blühen und Gedeihen die Physik braucht. Ganze Zweige der klassischen und auch der modernen Mathematik sind nur durch Anregungen aus der Physik und Astronomie entstanden."**

B. L. van der Waerden in seiner Abschiedsvorlesung am 12. Juli 1972

⇒ Ohne Physik gäbe es keine lebendige moderne Mathematik. Die Mathematik wäre tot – ein logisches Wolkenkuckucksheim ohne kohärente Zielrichtung und ohne Alltagsbezug.

⇒ Was aber passiert mit der Mathematik, wenn Anregungen aus der Physik ausbleiben oder aber überstürzt erfolgen?

***Die Entwicklung der Differentialrechnung in der Geometrischen Algebra leidet unter einer solchen Fehlentwicklung.***

***Physikhistorische Problematik:***

Allgemeine Relativitätstheorie und Quantenmechanik wurden zu einem Zeitpunkt formuliert, als die Spezielle Relativitätstheorie intellektuell und konzeptuell noch gar nicht richtig verstanden worden war.

Hermann Minkowski (1864 – 1909)

| | |
|---|---|
| 1905 | Formulierung der Speziellen Relativitätstheorie durch Einstein. |
| 1905 – 1909 | Konzeptuelle Aufarbeitung der SRT durch Minkowski. |
| 12. Jan. 1909 | Minkowski stirbt. **Erst nach seinem Tod erfolgt die Veröffentlichung seiner längeren Arbeiten zum Lorentz-Operator.** |
| 1915 | Formulierung der Allgemeinen Relativitätstheorie durch Einstein. |
| 1928 | Formulierung der modernen Quantenmechanik durch Dirac. **Die Einführung des Dirac-Operators überdeckt die Rezeption des Lorentz-Operators.** |

***Physik- und mathematikdidaktische Problematik:***

In Büchern und Lehrwerken zur Geometrischen Algebra wird die Differentialrechnung einzig unter Bezug auf den Dirac-Operator (oder aber koordinatenfrei) diskutiert. Ein Rückgriff auf den Lorentz-Operator erfolgt nicht.

***Didaktisches Dilemma:***

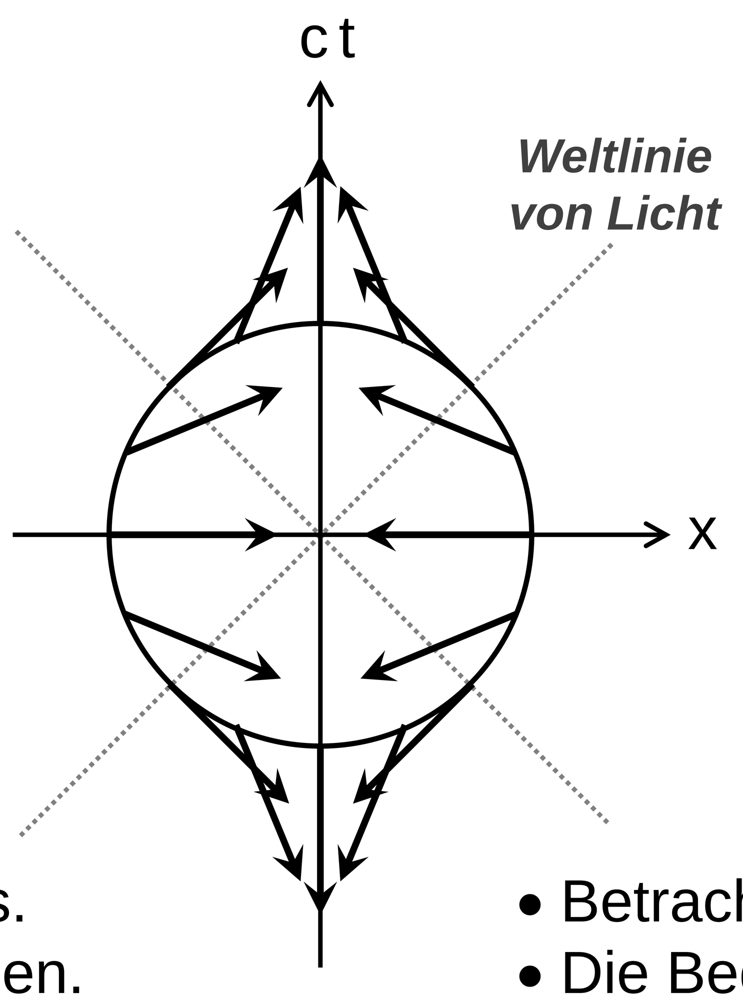
Um die Differentialrechnung im Kontext der Geometrischen Algebra zu verstehen, muss deshalb im Rahmen der aktuell vorherrschenden Mathematisierung zuvor der Dirac-Operator und damit die Mathematik der Allgemeinen Relativitätstheorie (mit ko- und kontravarianten Koordinaten und reziproken Koordinatensystemen) eingeführt werden.

***Vergleich der Schwierigkeitsgrade des Einsatzes beider Operatoren am Beispiel der***
Gradientenbildung mit Hilfe der geometrischen Ableitung einer raumzeitlich geschlossenen Kurve $f(x,t) = x_0^2 + x_1^2 = c^2 t^2 + x^2$

***Lorentz-Operator:***

$$\boldsymbol{lor} = \frac{\partial}{\gamma_t\, c\partial t} + \frac{\partial}{\gamma_x\, \partial x} + \frac{\partial}{\gamma_y\, \partial y} + \frac{\partial}{\gamma_z\, \partial z}$$
$$= \gamma_t \frac{\partial}{c\partial t} - \gamma_x \frac{\partial}{\partial x} - \gamma_y \frac{\partial}{\partial y} - \gamma_z \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\boldsymbol{lor}\, f(x,t) = \gamma_t \frac{\partial}{c\partial t}(c^2 t^2) - \gamma_x \frac{\partial}{\partial x} x^2$$
$$= 2\, c\, t\, \gamma_t - 2\, x\, \gamma_x$$




***Dirac-Operator:***

$$\Box = e_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} = e_\mu\, \partial^\mu$$ (mit Einsteinscher Summenkonvention)

$$\Box f(x,t) = e_\mu\, \partial^\mu x_0^2 + e_\mu\, \partial^\mu x_1^2$$
$$= 2\, e_\mu\, \delta_0^\mu\, x_0 + 2\, e_\mu\, \delta_1^\mu\, x_1$$
$$= 2\, x_0\, e_0 + 2\, x_1\, e_1$$
$$= 2\, c\, t\, \gamma_t - 2\, x\, \gamma_x$$

- Betrachtung eines einzigen Koordinatensystems.
- Vermeidung ko- und kontravarianter Schreibungen.
- Knüpft an schulmathematische Vorkenntnisse an.

⇒ **Mathematisch einfacher durchschaubar.**

- Betrachtung reziproker Koordinatensysteme notwendig.
- Die Bedeutung ko- und kontravarianter Vektoren muss erfasst werden.
- Knüpft an hochschulmathematische Vorkenntnisse an. Schulmathematische Vorkenntnisse reichen nicht aus.

⇒ **Mathematisch schwieriger durchschaubar.**

***Didaktische Schlussfolgerung:***

Die geometrische Ableitung mit Hilfe des Lorentz-Operators ist einfacher zugänglich als die geometrische Ableitung mit Hilfe des Dirac-Operators. Sie eröffnet einen konzeptuell zugänglichen Einstieg in die geometrische Ableitung und kann später mit Hilfe des Dirac-Operators abstrakt umformuliert werden.

**Die geometrische Ableitung mit Hilfe des Lorentz-Operators sollte als didaktische Brücke genutzt werden, um den Sprung von der Schulmathematik zur Hochschulmathematik abzufedern.**