Posterbeitrag zur DPG-Frühjahrstagung 2014 an der Goethe-Universität Frankfurt/Main, DD 15.41, Di, 18. März 2014, 16:30 h – 17: 30 h

Die Geometrische Ableitung am Beispiel der Maxwell-Gleichungen

Martin Erik Horn – bbw Hochschule Berlin-Brandenburg

Motivation

In Büchern zur Geometrischen Algebra wird umfassend auf mathematische Art und Weise in die Geometrische Ableitung eingeführt. Es gibt jedoch didaktische Motive dafür, sich der geometrischen Ableitung auch mit physikalischer Schwerpunktsetzung und mit physikalischen Argumentationsmustern zu nähern:

- programmatisch: Nutzung der Geometrischen Ableitung im Kontext schulischer oder hochschulischer Physikkurse ohne vorherige Herleitung der Geometrischen Ableitung im Mathematikunterricht (→ Curriculare Autonomie von Seiten der Physikdidaktik)
- pragmatisch: Vermeidung ko- und kontravarianter Vektorbeschreibungen (→ Einfachheit) sowie unterrichtsökonomische Gesichtspunkte (→ Zeitersparnis)
- idealistisch: Eröffnung eines neuen, zusätzlichen Blickwinkels auf die Geometrische Ableitung (→ konzeptuelle Vielfalt)

Ausgangspunkt

Skalarwertige Ableitung ohne Richtungsbezug

$$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\dot{f}(t) = \frac{d}{dt} f(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

Zentrale Idee

Räumliche und zeitliche Differenzen sind vektorielle Größen

$x = x\gamma_x$ an Stelle von x

$y = y\gamma_y$ an Stelle von y

$z = z\gamma_z$ an Stelle von z

$t = t\gamma_t$ an Stelle von t

Ziel

Geometrische Ableitung mit Richtungsbezug

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\gamma_x \Delta x}$$

$$\dot{f}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\gamma_t \Delta t}$$

Problem

Keine Eindeutigkeit bei Quotientenbildung

$$\frac{1}{\gamma_x} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \neq \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \frac{1}{\gamma_x}$$

$$\frac{1}{\gamma_t} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} \neq \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} \frac{1}{\gamma_t}$$

Beispiel: Bewegungsgleichungen

$$\mathbf{s} = x\gamma_x + y\gamma_y + z\gamma_z$$

$$\mathbf{v}_{links} = \gamma_t \frac{\grave{d}}{dt} \grave{\mathbf{s}} = -v_x\gamma_x\gamma_t - y_y\gamma_y\gamma_t - v_z\gamma_z\gamma_t$$

$$\mathbf{a} = \gamma_t \frac{\grave{d}}{dt} \grave{\mathbf{v}}_{links} = a_x\gamma_x + a_y\gamma_y + a_z\gamma_z$$

$$\mathbf{s} = x\gamma_x + y\gamma_y + z\gamma_z$$

$$\mathbf{v}_{rechts} = \grave{\mathbf{s}} \frac{\grave{d}}{dt} \gamma_t = v_x\gamma_x\gamma_t + y_y\gamma_y\gamma_t + v_z\gamma_z\gamma_t$$

$$\mathbf{a} = \grave{\mathbf{v}}_{rechts} \frac{\grave{d}}{dt} \gamma_t = a_x\gamma_x + a_y\gamma_y + a_z\gamma_z$$

Linkes und rechts Gleichungssystem sind äquivalent.
Es ist fraglich, ob Naturgesetze überhaupt eine Präferenz für zeitliche Prä- oder Postmultiplikationen ($\sigma_k = \gamma_t\gamma_k$ oder $\sigma_k^* = \gamma_k\gamma_t$) ausdrücken sollten.

Lösung: Rechts- und linksseitig wirkende Ableitungen

Die gesetzten Akzente geben die Ableitungswirkung an.

$$\frac{\grave{d}}{\gamma_x dx} \grave{f}(x) = -\gamma_x \frac{d}{dx} f(x) \qquad \frac{\grave{d}}{\gamma_t dt} \grave{f}(t) = \gamma_t \frac{d}{dt} f(t)$$

Ableitung der nachfolgenden Funktion

$$\grave{f}(x) \frac{\grave{d}}{dx\,\gamma_x} = -f(x) \frac{d}{dx} \gamma_x \qquad \grave{f}(t) \frac{\grave{d}}{dt\,\gamma_t} = +f(x) \frac{d}{dt} \gamma_t$$

Ableitung der vorausgehenden Funktion

raumartige Ableitung *zeitartige Ableitung*

Achtung: unterschiedliche Vorzeichen bei zeitlicher und räumlichen Ableitung. Dies hat Auswirkungen auf die **Gradientenbildung**.

Dirac-Operator in Standardform:

$$\Box = \gamma_t \frac{\partial}{c\,\partial t} + \gamma_x \frac{\partial}{\partial x} + \gamma_y \frac{\partial}{\partial y} + \gamma_z \frac{\partial}{\partial z}$$

nicht in Übereinstimmung mit Doran & Lasenby (2003) Gl. 6.11

Raumzeitliche Analoga des Nabla-Operators

$$\underset{\rightarrow}{\Box} = \gamma_t \frac{\partial}{c\,\partial t} - \gamma_x \frac{\partial}{\partial x} - \gamma_y \frac{\partial}{\partial y} - \gamma_z \frac{\partial}{\partial z}$$

$$(\grave{\ldots}) \underset{\leftarrow}{\grave{\Box}} = \frac{\partial}{c\,\partial t} \gamma_t - \frac{\partial}{\partial x} \gamma_x - \frac{\partial}{\partial y} \gamma_y - \frac{\partial}{\partial z} \gamma_z$$

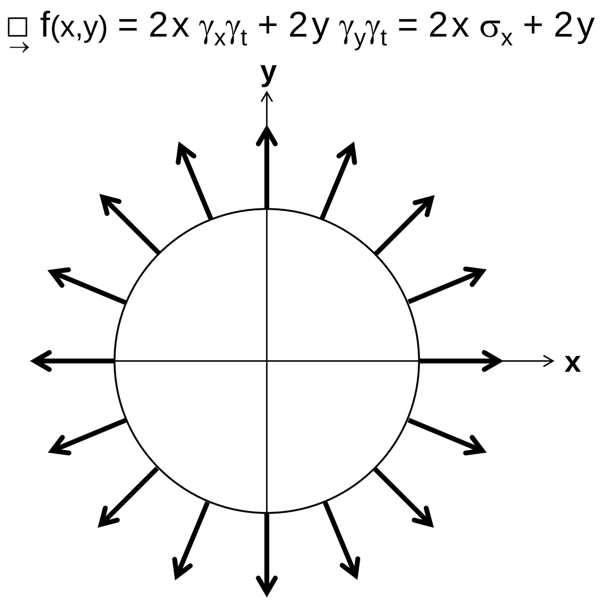
Der Dirac-Operator in Standardform kann bei raumzeitlichen Ableitungen zu fehlerhaften Ergebnissen führen.

Beispiel: Gradienten rotationssymmetrischer Skalarfelder

$f(x,y) = x^2 + y^2$ mit $\mathbf{r} = x\gamma_x + y\gamma_y$

$\Box f(x,y) = 2x\,\gamma_x + 2y\,\gamma_y = 2\,\mathbf{r}$

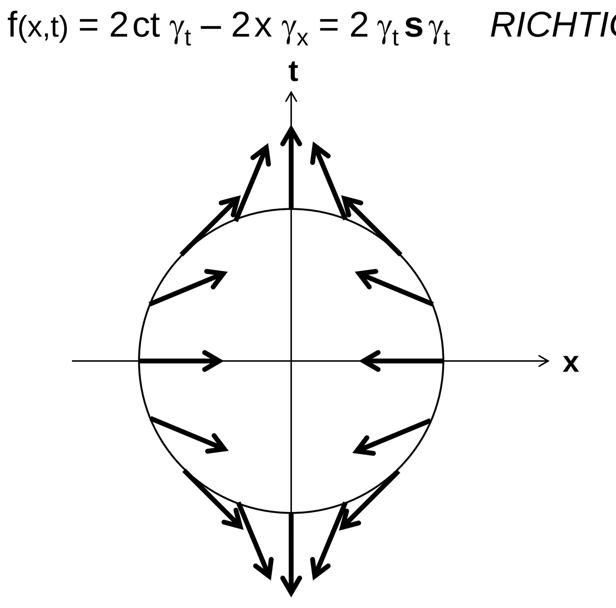
$\gamma_t \underset{\rightarrow}{\Box} f(x,y) = 2x\,\gamma_x\gamma_t + 2y\,\gamma_y\gamma_t = 2x\,\sigma_x + 2y\,\sigma_y$



$f(x,t) = c^2t^2 + x^2$ mit $\mathbf{s} = ct\gamma_t + x\gamma_x$

$\Box f(x,t) = 2ct\,\gamma_t + 2x\,\gamma_x = 2\,\mathbf{s}$ *FALSCH*

$\underset{\rightarrow}{\Box} f(x,t) = 2ct\,\gamma_t - 2x\,\gamma_x = 2\,\gamma_t\mathbf{s}\gamma_t$ *RICHTIG*



Zwischenergebnis:

Der Dirac-Operator in Standardform $\sum_i \gamma_i \partial_i$ sollte durch $\sum_i \gamma_i^3 \partial_i$ (oder $\sum_i \underset{\leftarrow}{\partial_i} \gamma_i^3$) ersetzt werden.

Beispiel: Maxwell-Gleichungen im Vakuum

Dreidimensionaler Raum

Elektrisches und magnetisches Feld werden zu einer gemeinsamen Größe zusammengefasst

$$F_{(r,t)} = \underset{\text{Vektor}}{E_{(r,t)}} + \underbrace{\sigma_x\sigma_y\sigma_z\, B_{(r,t)}}_{\text{Bivektor}}$$

Quellenfreie Maxwell-Gleichungen $\left(\frac{\partial}{c\,\partial t} + \nabla\right) F = 0$

Ansatz einer ebenen Welle in z-Richtung $F_{(z,t)} = f\, e^{\sigma_x\sigma_y\sigma_z\, k \bullet r} = f\, e^{\sigma_x\sigma_y\sigma_z (\omega t - kz)}$

Ansatz einsetzen und Terme geometrisch deuten: $F = \sigma_z F$

$$\Rightarrow \underset{\text{Vektor}}{E} + \underbrace{\sigma_x\sigma_y\sigma_z\, B}_{\text{Bivektor}} = \underbrace{\sigma_z \bullet E}_{\text{Skalar}} + \underbrace{\sigma_z \wedge E}_{\text{Bivektor}} + \underbrace{\sigma_x\sigma_y \bullet B}_{\text{Vektor}} + \underbrace{\sigma_x\sigma_y \wedge B}_{\text{Trivektor}}$$

$\Rightarrow$ σ_z und E stehen senkrecht zueinander.

$\Rightarrow$ E und B sind verknüpft: $E = \sigma_x\sigma_y B$

$\Rightarrow$ Faraday-Vektor: $F = E + \sigma_x\sigma_y\sigma_z B = (1 + \sigma_z) E = E (1 - \sigma_z)$

Vierdimensionale Raumzeit

$$F_{(r,t)} = \underset{\text{gemischter raumzeitlicher Bivektor}}{E_{(r,t)}} + \underbrace{\gamma_t\gamma_x\gamma_y\gamma_z\, B_{(r,t)}}_{\text{rein räumlicher Bivektor}}$$

$$\gamma_t \underset{\rightarrow}{\Box} F = \underset{\rightarrow}{\Box} F = \left(\gamma_t \frac{\partial}{c\,\partial t} - \gamma_x \frac{\partial}{\partial x} - \gamma_y \frac{\partial}{\partial y} - \gamma_z \frac{\partial}{\partial z}\right) F = 0$$

$$F_{(z,t)} = f\, e^{\gamma_t\gamma_x\gamma_y\gamma_z\, k \bullet r} = f\, e^{\gamma_t\gamma_x\gamma_y\gamma_z (\omega t - kz)}$$

$$\gamma_t F = -\gamma_z F$$

$$\Rightarrow \underbrace{\gamma_t E}_{\text{raumartiger Vektor}} + \underbrace{\gamma_x\gamma_y\gamma_z\, B}_{\text{raumzeitartiger Trivektor}} = \underbrace{-\gamma_z \bullet E}_{\text{zeitartiger Vektor}} \underbrace{- \gamma_z \wedge E}_{\text{raumzeitartiger Trivektor}} \underbrace{- \gamma_t\gamma_x\gamma_y \bullet B}_{\text{raumartiger Vektor}} \underbrace{- \gamma_t\gamma_x\gamma_y \wedge B}_{\text{raumartiger Trivektor}}$$

$\Rightarrow$ γ_z und E stehen senkrecht zueinander.

$\Rightarrow$ E und B sind verknüpft: $E = -\gamma_x\gamma_y B$

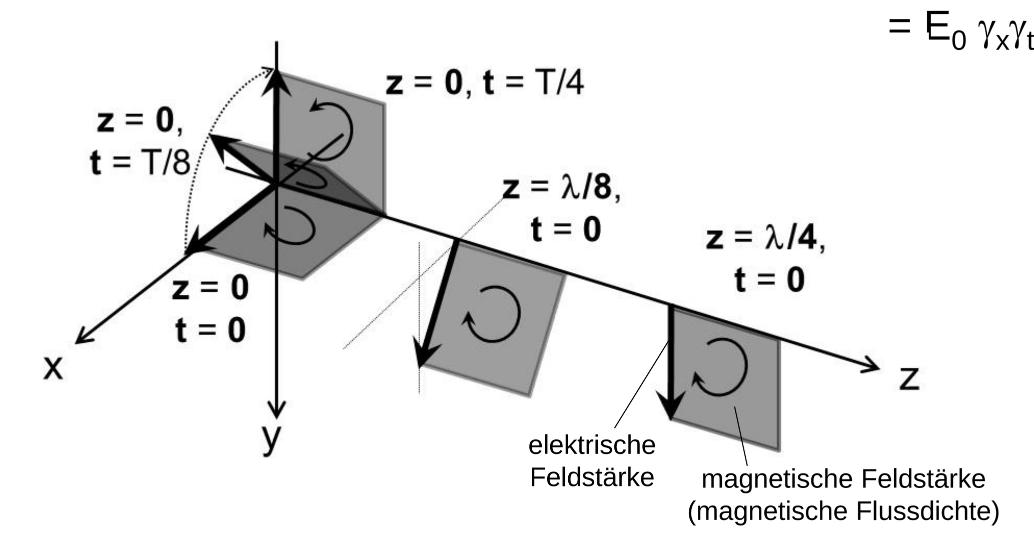
$\Rightarrow$ Faraday-Vektor: $F = E + \gamma_t\gamma_x\gamma_y\gamma_z B = (1 + \gamma_z\gamma_t) E = E (1 - \gamma_z\gamma_t)$

Lösung: Ebene elektromagnetische Wellen (zirkular polarisiert)

$$F_{(z,t)} = \mathbf{E_0}\,(1 - \sigma_z)\, e^{\sigma_x\sigma_y\sigma_z (\omega t - kz)} = \mathbf{E_0}\,(1 - \gamma_z\gamma_t)\, e^{\gamma_t\gamma_x\gamma_y\gamma_z (\omega t - kz)}$$

mit $\sigma_x = \gamma_x\gamma_t$, $\sigma_y = \gamma_y\gamma_t$, $\sigma_z = \gamma_z\gamma_t$

Graphische Veranschaulichung der Anfangsbedingung $\mathbf{E_0} = E_0\,\sigma_x = E_0\,\gamma_x\gamma_t$



Epilog

Physikalische motivierte Umformungen mathematischer Konzepte wirken auf die Mathematik zurück:

- Dyson: „How can it happen that the properties of three-dimensional space are represented equally well by two quite different and incompatible algebraic structures?” → Eine von vielen verpassten Gelegenheiten („Missed opportunities“), erst beantwortet „with substantial help from the physicists Pauli and Dirac.”
- Atiyah: „…we ‚rediscovered‘ for ourselves the Dirac operator. Had we been better educated in physics, or had there been the kind of dialogue with physicists that is now common, we would have got there much sooner.“