

## Die Geometrische Ableitung am Beispiel der Maxwell-Gleichungen

Martin Erik Horn

bbw Hochschule Berlin-Brandenburg, Leibnizstr. 11 – 13, 10625 Berlin  
mail@martin-erik-horn.de

### Kurzfassung

Die Differentialrechnung stellt ein entscheidendes konzeptuelles Werkzeug zur mathematischen Beschreibung physikalischer Sachverhalte dar. Gleichzeitig liefert die Physik ein wesentliches Motivationsmuster zur konzeptuellen Weiterentwicklung der Mathematik. Newton und Leibniz schufen die Differentialrechnung gerade auch aus physikalischen Gründen.

Der von Newton und Leibniz vorgenommenen Algebraisierung der Differentialrechnung stellt die Geometrische Algebra eine geometrische Einbettung zur Seite. Am Beispiel ebener elektromagnetischer Wellen als Lösungen der Maxwell-Gleichungen im Vakuum wird gezeigt, wie eine solche geometrisch-algebraische Umformung der Differentialrechnung physikalische Problemstellungen aufklärt.

Ebenso wird diskutiert, wie diese physikalisch motivierte Umformung der Differentialrechnung auf die Mathematik zurückwirkt, wenn diese physikorientierte Konzepte wie den Dirac-Operator zur eigenen mathematischen Konzeptbildung übernimmt.

### 1. Geometrie und Algebra

„Neben der Erschaffung der Euklidischen Geometrie hat sich die Differential- und Integralrechnung als das originellste und fruchtbarste Konzept der gesamten Mathematik herausgestellt,“ beschreibt Kline<sup>1</sup> die Bedeutung der Differentialrechnung für unsere Welt. An dieser Analyse sind zwei Dinge bemerkenswert: Kline benennt zum einen die kreativen Höhepunkte im konzeptuellen Schaffen der beiden zentralen mathematischen Teilgebiete: Aus der Geometrie die Euklidische Geometrie und aus der Algebra die Differential- und Integralrechnung.

Zum anderen fällt auf, dass Kline diese beiden Teilgebiete getrennt nebeneinander stellt. In der Geschichte der Mathematik wechseln sich Phasen einer stärkeren Geometrisierung mit Phasen einer stärkeren Algebraisierung ab. Erst mit Graßmann und seiner Ausdehnungslehre gelang es, beide Entwicklungslinien konzeptuell zu verknüpfen. Hestenes beschreibt diesen Verschmelzungsprozess, der zur Schaffung einer Geometrischen Algebra führt, ausführlich in [2, Kap. 1]. Zentraler Entwicklungspunkt stellt dabei die Formulierung und Beschreibung gerichteter Zahlen („directed numbers“ [2, Abs. 1.3]) durch Graßmann dar.

Die Formulierung einer Geometrischen Ableitung im Rahmen der Geometrischen Algebra beschreibt somit einen doppelten Höhepunkt. Die beiden von Kline als am wirkungsmächtigsten beschriebenen

mathematischen Konzepte verschmelzen hierbei zu einem einheitlichen, alles überragenden mathematischen Highlight. Dieses Highlight wird in den folgenden Abschnitten vorgestellt und anhand des Beispiels der Maxwell-Gleichungen analysiert.

### 2. Physikalische Motivation der Differentialrechnung

Die mathemathikhistorische Aufarbeitung der Differentialrechnung zeigt deutlich, dass es nicht vorrangig mathematische, sondern originär physikalische Fragestellungen waren, die zur Entwicklung der Differentialrechnung führten. So benennt Kline vier damit verbundene wesentliche Probleme der Naturwissenschaften des 17. Jahrhunderts – drei entstammen dem Bereich der Mechanik und eines dem der Optik [3, Kap. 17, Abs. 1, S. 342/343].

Newton und Leibniz schufen die Differentialrechnung also vorrangig aus physikalischen Gründen. Die Physik hat an dieser Stelle der Wissenschaftsgeschichte deutlich auf die Mathematik zurückgewirkt und zur „greatest creation in all of mathematics“ [3, S. 342] geführt.

Ähnliches geschieht auch heute immer wieder: Die Physik liefert wesentliche Motivationsmuster zur konzeptuellen Weiterentwicklung der Mathematik. Gleichzeitig stellt die Mathematik entscheidende konzeptuelle Werkzeuge zur abstrakten Beschreibung physikalischer Sachverhalte dar. Diese beiden Wissenschaften durchdringen sich stark.

Dies führt dazu, dass sich diese beiden Domänen auf fachwissenschaftlicher Ebene zwar trennen lassen – und aufgrund ihrer unterschiedlichen methodischen Wurzeln auch zu trennen sind: die Mathematik ist

<sup>1</sup> Originalzitat: „Next to the creation of Euclidean geometry the calculus has proved to be the most original and most fruitful concept in all of mathematics“ [1, S. 363].

eine Geisteswissenschaft, die Physik eine Naturwissenschaft.

Eine solche strikte Trennung ist aufgrund der gegenseitigen Durchdringung im didaktischen Bereich jedoch nicht sinnvoll. Mathematikunterricht im schulischen Bereich ist in Teilen immer auch Physikunterricht. Und Physikunterricht im schulischen Bereich ist in Teilen immer auch Mathematikunterricht.

Diese gegenseitige Durchdringung wird gerade auch im Kontext der Geometrischen Algebra didaktisch wirksam und durch entsprechende curriculare Vorschläge [4] unterstützt. Parra Serra vergleicht die Durchdringung von Physik und Mathematik mit der Durchdringung von Sprache und Literatur. Die Mathematik sollte dabei nicht als Fremdsprache gelernt werden, sondern gleichsam als Muttersprache der Physik<sup>2</sup> verstanden werden.

### 3. Pragmatische Motivation der Geometrischen Differentialrechnung

Die in den beiden vorangegangenen Abschnitten diskutierten grundsätzlichen Erwägungen zur Verknüpfung und Durchdringung von Mathematik und Physik und die sich daraus ergebenden Konsequenzen werden in der physikdidaktischen Öffentlichkeit kontrovers gesehen und von manchen Fachkolleginnen und Fachkollegen in dieser strikten Auslegung abgelehnt.

Physikdidaktische Ansätze, die eine stärkere Autonomie der Physik gegenüber der Mathematik betonen, können durch eine Einbindung der Geometrischen Algebra jedoch ebenfalls einen didaktischen Zugewinn erlangen. Einige didaktisch recht handfeste Motive dafür, sich in diesem Fall der Geometrischen Ableitung mit physikalischen Schwerpunktsetzungen und Argumentationsmustern zu nähern, werden im Folgenden kurz aufgeführt:

- Programmatische Motive: Nutzung der Geometrischen Ableitung im Kontext schulischer oder hochschulischer Physikkurse ohne vorherige Herleitung der Geometrischen Ableitung im Mathematikunterricht (→ Curriculare Autonomie von Seiten der Physikdidaktik).
- Pragmatische Motive: Vermeidung ko- und kontravarianter Vektorbeschreibungen (→ Einfachheit) sowie unterrichtsökonomische Gesichtspunkte (→ Zeitersparnis).

<sup>2</sup> Originalzitat: „When compared with the common strategy, which consists in teaching a ‘practical physics course’ to future mathematicians and ‘pure mathematics courses’ to physicists and other students that have physics as a fundamental subject, the kind of course proposed here seems clearly better. Far from exposing the students to a class in ‘foreign language’, it builds a common first-language in natural science.“ [4, S. 829].

- Idealistische Motive: Eröffnung eines neuen, zusätzlichen Blickwinkels auf die Geometrische Ableitung (→ konzeptuelle Vielfalt).

Die Geometrische Ableitung besitzt einen didaktischen Mehrwert also auch dann, wenn sie unabhängig von mathematikdidaktischen Betrachtungen aus rein physikdidaktischer Perspektive analysiert wird.

### 4. Die Geometrische Ableitung

In Büchern zur Geometrischen Algebra wird umfassend auf mathematische Art und Weise in die Geometrische Ableitung eingeführt. Dabei sind zwei Tendenzen sichtbar. Zum einen bevorzugen zahlreiche Autorinnen und Autoren aus dem Bereich der Geometrischen Algebra koordinatenfreie Darstellungen. In diesem Fall ist die gerichtete, vektorielle Ableitung durch den Ausdruck [2, Gl. 8.1, S. 105], [6, Gl. 6.1, S. 168], [7, Abs. 3.1, S. 19] gegeben:

$$a \cdot \nabla f(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(x + \varepsilon a) - f(x)}{\varepsilon} \quad \{1\}$$

Zum zweiten streben zahlreiche Autoren nach einer möglichst allgemeingültigen Darstellung, bei der sie sich „nicht auf Koordinatensysteme beschränken, die orthonormiert sind, so dass die Basisvektoren nicht notwendigerweise anti-kommutieren“ [6, S. 100].

Dies führt dazu, dass bei einer Ausformulierung von Gleichung {1} in Koordinatenform nicht nur die (möglicherweise) schräg zueinander stehenden Vektoren  $e_i$  benötigt werden, die das ursprünglich betrachtete Koordinatensystem aufspannen, sondern auch die zu  $e_i$  reziproken Vektoren  $e^j$ , die durch einen hochgestellten Index gekennzeichnet werden [6, Abs. 4.3, S. 100-103].

Die Vektoren des ursprünglichen und des dazu reziproken Koordinatensystems sind über Kroneckers Delta verknüpft:

$$e_i \cdot e^j = \delta_i^j \quad \text{bzw.} \quad e^j \cdot e_i = \delta_i^j \quad \{2\}$$

Damit lässt sich auf Grundlage von Gl. {1} die Geometrische Ableitung unter Bezug auf Koordinaten darstellen. Diese Geometrische Ableitung wird dann durch den Dirac-Operator als geometrisches Analogon des Nabla-Operators [5, Gl. 4.17.9, S. 179], [6, Gl. 6.2, S. 168] ausgedrückt:

$$\nabla = \sum_k e^k \frac{\partial}{\partial x^k} = e^k \partial_k \quad \{3\}$$

Nur im Falle orthogonal stehender, rein räumlicher Basisvektoren sind die ko- und kontravarianten Schreibungen und damit die Vektoren des ursprünglichen und des reziproken Koordinatensystems identisch oder aber zumindest antiparallel.

Der didaktische Gewinn dieser Vorgehensweise liegt in ihrer leichten Verallgemeinerungsfähigkeit hin zu

gekrümmten Räumen und allgemein-relativistischen Beschreibungen.

Dies benennt jedoch gleichzeitig die didaktischen Kosten, die zu entrichten sind: Wollen wir tatsächlich einem Unterrichtsgang folgen, der die Koordinaten-Mathematik der Allgemeinen Relativitätstheorie (oder zumindest reziproke Koordinatendarstellungen) zwingend vor Einführung der Geometrischen Ableitung zu behandeln hat?

Um zu ermöglichen, die Geometrische Ableitung mit Lernenden auch im Kontext von Raumzeiten ohne allgemein-relativistische Konzeptbildungen einzuführen, ist nicht nur eine sinnvolle didaktische Rekonstruktion dieser Sachverhalte, sondern eine auch inhaltliche, sehr weitgehende und deutliche didaktische Reduktion notwendig.

### 5. Ein Blick zurück

Ein historischer Rückblick in die Physik- und Mathematikgeschichte liefert einige Anhaltspunkte, wie diese didaktische Reduktion zu bewerkstelligen ist. Wir müssen uns dabei lediglich an der mathematischen Vorgehensweise in der Übergangszeit nach Formulierung der Speziellen Relativitätstheorie 1905 und vor Formulierung der Allgemeinen Relativitätstheorie 1915 durch Einstein orientieren.

In diesen Übergangsjahren wurden speziell-relativistische Effekte in Raumzeiten, wie sie beispielsweise die Maxwell-Gleichungen ausdrücken, ohne den erst später formulierten Dirac-Operator beschrieben. Anstelle dieses im Sinngehalt auch quantenmechanisch konnotierten Dirac-Operators setzt Minkowski den Lorentz-Operator [8, § 12, S. 504, Gl. 6.3], [9, S. 531] zur Beschreibung von Ableitungen in Koordinatensystemen mit orthonormierten Basisvektoren ein. Er schuf damit ein mathematisch solides Instrument zur Fassung raumzeitlicher Ableitungen.

Aus heutiger wie aus damaliger Perspektive ist der frühe und vorzeitige Tod Minkowskis durch einen Blinddarmdurchbruch in gerade dieser Übergangsperiode nicht nur ein „schwerer unermesslicher Verlust“ [10, S. 445] für die persönlich Betroffenen, sondern eine unermessliche physik- und mathemathikhistorische Tragödie, die dramatische Auswirkungen auf die Ausprägungen der heutigen mathematischen Begriffsbildungen hatte.

Mit dem Aufkommen der Mathematik gekrümmter Koordinaten im Kontext der Allgemeinen Relativitätstheorie und der vermeintlich quantenmechanischen Einprägung des Dirac-Operators wurde der Minkowskische Ansatz überdeckt und von den nachfolgenden mathematischen Ideen verschüttet. Dadurch geriet uns die didaktische Brücke, die Hermann Minkowski zu bauen begonnen hatte, aus dem Blick.

Und das ist in höchstem Maße bedauerlich, denn in dieser Übergangszeit zwischen Spezieller und Allgemeiner Relativitätstheorie ordneten Physiker die

konzeptuellen Modellbeschreibungen gänzlich anders ein, als wir das heute tun.

So erläuterte Max Planck in einer Vorlesungsserie 1909 an der Columbia University in New York: „Diese neue Auffassung des Zeitbegriffs stellt an die Abstraktionsfähigkeit des Physikers die allerhöchsten Anforderungen; sie übertrifft an Kühnheit wohl alles, was bisher in der spekulativen Naturforschung (...) geleistet wurde; die nichteuklidische Geometrie ist Kinderspiel dagegen“ [11, S. 78].

So sind wir vielleicht noch heute, ohne die Spezielle Relativitätstheorie richtig verdaut zu haben, gefangen im faszinierenden „Kinderspiel“ der Allgemeinen Relativitätstheorie, die uns trotz Plancks Worten so in den Bann gezogen hat und uns Minkowskis Grundlegungen übersehen oder gar vergessen lässt.

### 6. Didaktische Reduktion der Geometrischen Ableitung

Bei der Diskussion komplexer Sachverhalte muss eine Autorin oder ein Autor zwangsläufig an einer sinnvollen, aber dennoch meist fortgeschrittenen Stelle beginnen. Selten kann in vollständig grundlegender Art und Weise von den Basisaxiomen ausgehend gestartet werden. Dieser Ausgangspunkt ist in Standardlehrbüchern zur Differentialrechnung im Kontext der Geometrischen Algebra meist Gleichung {1}, die die Autoren an den Anfang stellen.

Dabei wird übersehen, dass diese Gleichung selbst schon durch eine deutliche didaktische Reduktion entstanden ist. Bei allgemeiner Betrachtung der Differentialrechnung wäre die gerichtete multivektorielle Ableitung<sup>3</sup> [6, Abs. 11.1, S. 394-395], [12], [13] (anstelle der gerichteten, nur rein vektoriiellen Ableitung von Gl. {1}) der natürliche Ausgangspunkt einer umfassenden, vollständigen Darstellung.

Und diese umfassende Darstellung baut ihrerseits auf der Idee auf, das skalare Intervall  $\Delta x$  bei der skalarwertigen Ableitung nach einer räumlichen Variablen  $x$  bzw. einer zeitlichen Variablen  $t$

$$\frac{d}{dx} f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad \{4\}$$

$$\frac{d}{dt} g(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{g(t + \Delta t) - g(t)}{\Delta t} \quad \{5\}$$

durch ein  $n$ -dimensionales Volumenelement  $\Delta V$  zu ersetzen [14], [15] und so die Änderung über ein gegen Null gehendes Volumen zu betrachten.

Aus der Perspektive einer aber der reinen Mathematik gegenüber „respektlosen“ und „rein nach Gesichtspunkten der Effizienz ausgerichteten“ [16, Abs. 1.3, S. 34] Physik kann in den Gleichungen {4} und {5} das skalarwertige Intervall durch ein vektore-

<sup>3</sup> Verstanden als „multivector differential of multivector functions“ [13, S. 136].

rielles Intervall ersetzt werden. Dazu werden die räumlichen und zeitlichen Koordinatengrößen  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $t$  ganz im Sinne der speziell-relativistischen Modellbildung durch die entsprechenden Vektoren

$$x = x \gamma_x \quad \text{an Stelle von } x \quad \{6\}$$

$$y = y \gamma_y \quad \text{an Stelle von } y \quad \{7\}$$

$$z = z \gamma_z \quad \text{an Stelle von } z \quad \{8\}$$

$$t = t \gamma_t \quad \text{an Stelle von } t \quad \{9\}$$

ersetzt. Raumzeitliche Punkte werden dann, anknüpfend an Minkowski und Poincaré [17, Anm. 8, S. 72], durch Vektoren beschrieben. Ebenso stellen räumliche und zeitliche Differenzen vektorielle Größen dar.

Damit ergeben sich recht intuitiv die gerichteten, vektoriellen Ableitungen in der Form von

$$\frac{d}{dx} f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\Delta x} (f(x + \Delta x) - f(x)) \right) \quad \{10\}$$

$$\frac{d}{dt} g(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\Delta t} (g(t + \Delta t) - g(t)) \right) \quad \{11\}$$

bei rechtsseitig wirkenden Ableitungen von Funktionen nur einer raumartig vektoriellen Variablen  $x$  oder einer zeitartig vektoriellen Variablen  $t$ . Auch diese Ableitungen lassen sich mit Hilfe der skalarwertigen Variablen  $x$  bzw.  $t$  in Koordinatenform schreiben:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} f(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\gamma_x \Delta x} (f(x + \Delta x) - f(x)) \right) \\ &= -\gamma_x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad \{12\} \end{aligned}$$

$$= -\gamma_x \frac{d}{dx} f(x)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} g(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\gamma_t \Delta t} (g(t + \Delta t) - g(t)) \right) \\ &= \gamma_t \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{g(t + \Delta t) - g(t)}{\Delta t} \quad \{13\} \end{aligned}$$

$$= \gamma_t \frac{d}{dt} g(t)$$

Das unterschiedliche Vorzeichen beim Vergleich der beiden unteren Gleichungen von {12} und {13} kommt dann in ihrer Wirkung zum Tragen, wenn Funktionen mehrerer raumzeitlich unterschiedlicher Variablen betrachtet werden (siehe Abschnitt 7).

Als einfache Beispiele für diese geometrische Formulierung von Ableitungen werden im Folgenden die Ableitungen der quadratischen Funktionen

$$f(x) = -x^2 = -(x \gamma_x)^2 = x^2 = f(x) \quad \{14\}$$

$$g(t) = t^2 = (t \gamma_t)^2 = t^2 = g(t) \quad \{15\}$$

betrachtet. Die skalaren Ableitungen sind:

$$\frac{d}{dx} f(x) = 2x = -2(x \gamma_x) \gamma_x = -2x \gamma_x \quad \{16\}$$

$$\frac{d}{dt} g(t) = 2t = 2(t \gamma_t) \gamma_t = 2t \gamma_t \quad \{17\}$$

Die entsprechenden geometrischen, vektoriellen Ableitungen stehen mit diesen in folgender Beziehung:

$$\frac{d}{dx} f(x) = -2x = -2x \gamma_x = -\gamma_x \frac{d}{dx} f(x) \quad \{18\}$$

$$\frac{d}{dt} g(t) = 2t = 2t \gamma_t = \gamma_t \frac{d}{dt} g(t) \quad \{19\}$$

Auch hier wird wieder die Rolle des Vorzeichens deutlich, das bei räumlicher geometrischer Ableitung zu berücksichtigen ist. Es stellt ein Artefakt der negativen Quadratur räumlicher Basisvektoren

$$\gamma_x^2 = \gamma_y^2 = \gamma_z^2 = -\gamma_t^2 = -1 \quad \{20\}$$

dar. Dieses Vorzeichen ist somit direkte Folge der pseudo-euklidischen raumzeitlichen Metrik (+, -, -, -) der Speziellen Relativitätstheorie.

Bei Nutzung reziproker Koordinaten wird dieses Minuszeichen in den Wechsel zwischen ko- und kontravarianten Darstellungen gepackt. Dies ist konzeptuell anspruchsvoller und weniger verständlich.

## 7. Partielle Ableitungen und Lorentz-Operator

Funktionen mehrerer Variablen können analog zum Vorgehen in Abschnitt 6 mit Hilfe der Ersetzungen {6} – {9} behandelt werden. Betrachtet man die Abhängigkeit von vier raumzeitlichen Koordinaten  $x$ ,  $y$ ,  $z$  und  $t$ , so lauten die partiellen Ableitungen in Übereinstimmung mit den beiden Gleichungen {12} und {13}:

$$\frac{\partial}{c\partial t} f(x, y, z, t) = \gamma_t \frac{\partial}{c\partial t} f(x, y, z, t) \quad \{21\}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y, z, t) = -\gamma_x \frac{\partial}{\partial x} f(x, y, z, t) \quad \{22\}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y, z, t) = -\gamma_y \frac{\partial}{\partial y} f(x, y, z, t) \quad \{23\}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} f(x, y, z, t) = -\gamma_z \frac{\partial}{\partial z} f(x, y, z, t) \quad \{24\}$$

Diese können nun zum Lorentz-Operator, dem geometrischen Analogon des vierdimensionalen raumzeitlichen Nabla-Operators, zusammengefasst werden:

$$\begin{aligned} \text{lor} = \square &= \frac{\partial}{c\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \\ &= \gamma_t \frac{\partial}{c\partial t} - \gamma_x \frac{\partial}{\partial x} - \gamma_y \frac{\partial}{\partial y} - \gamma_z \frac{\partial}{\partial z} \end{aligned} \quad \{25\}$$

In Übereinstimmung mit der Schreibweise des vierdimensionalen Dirac-Operators in [18, G. 1.7, S. 801], [15, Gl. 50, S. 509] wird der Lorentz-Operator hier in diesem Beitrag symbolisch als Quadrat  $\square$  abgekürzt.

Die Dreiecks-Schreibweise wird hier dagegen nur für den dreidimensionalen Nabla-Operator verwendet, der sich mit Hilfe der fundamentalen Beziehungen [18, Gl. 25, S. 801], [19, Gl. 43, S. 659]

$$\sigma_x = \gamma_x \gamma_t \quad \sigma_y = \gamma_y \gamma_t \quad \sigma_z = \gamma_z \gamma_t \quad \{26\}$$

leicht rekonstruieren lässt:

$$\begin{aligned} \gamma_t \square &= \gamma_t^2 \frac{\partial}{c \partial t} - \gamma_t \gamma_x \frac{\partial}{\partial x} - \gamma_t \gamma_y \frac{\partial}{\partial y} - \gamma_t \gamma_z \frac{\partial}{\partial z} \\ &= \frac{\partial}{c \partial t} + \underbrace{\sigma_x \frac{\partial}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial}{\partial y} + \sigma_z \frac{\partial}{\partial z}}_{\nabla} \\ &= \frac{\partial}{c \partial t} + \nabla \end{aligned} \quad \{27\}$$

Gleichfalls möglich ist auch die zu {27} alternative Zusammenführung des dreidimensionalen Nabla-Operators mit der partiellen zeitlichen Ableitung in Form einer rechtsseitigen Multiplikation des Lorentz-Operators mit dem zeitlichen Basisvektor:

$$\square \gamma_t = \frac{\partial}{c \partial t} - \nabla \quad \{28\}$$

In der Literatur herrscht einige Verwirrung darüber, welche Darstellung letztendlich gewählt werden sollte. Die Wahl passender Vorzeichen hängt tatsächlich nicht nur davon ab, ob Größen einheitlich durchgängig in ein rechts- oder linkshändiges Koordinatensystem einbettet werden.

Mathematisch konsistente, wenn auch wohl physikalisch verwirrende Darstellungen gelingen nämlich auch dann, wenn man sich das elektrische Feld durchgängig in einem rechthändigen und das magnetische Feld durchgängig in einem linkshändigen Koordinatensystem eingebettet denkt – oder umgekehrt. Dies erhöht die Möglichkeiten unterschiedlicher Vorzeichenzuordnungen beim Faraday-Vektor bzw. -Bivektor

$$F = E + I B \quad \text{bzw.} \quad F^i = E - I B \quad \{29\}$$

enorm (siehe dazu auch die Diskussion in [20, Abs. 11.2.1, insbesondere Gl. 11.18, S. 208-210]).

Selbstverständlich kann auch ein fünfdimensionales Analogon zum Nabla-Operator konstruiert werden. Dieser fünfdimensionale Carmeli-Operator hat dann eine Struktur von

$$\begin{aligned} \square \gamma_t &= \frac{\partial}{c \partial t} + \frac{\partial}{\tau \partial v} + \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \\ &= \gamma_t \frac{\partial}{c \partial t} + \gamma_v \frac{\partial}{\tau \partial v} - \gamma_x \frac{\partial}{\partial x} - \gamma_y \frac{\partial}{\partial y} - \gamma_z \frac{\partial}{\partial z} \end{aligned} \quad \{30\}$$

sofern eine Metrik von (+, +, -, -, -) zugrunde gelegt wird. Nach Carmeli [21], [22, Ab. 3.1.5], [23], [24] ist das dann der Fall, wenn die (kosmologische) Geschwindigkeit als fünfte, unabhängige raumzeitliche Koordinate aufgefasst wird. Dieser Zugang kann mathematisch auch im Kontext der Geometrischen Algebra [25], [26], [27] beschrieben werden. Der Carmeli-Operator wird hier entsprechend seiner Dimensionalität durch ein Fünfeck repräsentiert.

### 8. Gradienten rotationssymmetrischer Skalarfelder

Als Beispiel für die Abwendung der Differentialrechnung bei Funktionen mehrerer Variablen werden im Folgenden rein räumliche mit raumzeitlichen Situationen verglichen. Dabei wird exemplarisch der Gradient eines rotationssymmetrischen Skalarfeldes berechnet, wobei auf das einfache Beispiel einer geschlossenen räumlichen, einer geschlossenen raumzeitlichen [6, Gl. 6.10, S. 169] und einer geschlossenen rein zeitlichen Kurve zurückgegriffen wird.

Diese und ähnlich geschlossene raumzeitliche Kurven „may appear esoteric, but (...) are of considerable importance“ [6, S. 170] in modernen Theoriebildungen zur Quantengravitation. Darüber hinaus sind sie didaktisch hilfreich, da sie mathematisch einfach zu handhaben sind.

Als rein raumartiges Beispiel wird die Gradientenbildung der Summe zweier quadratischer räumlicher Variablen<sup>4</sup> x und y

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x^2 + y^2 \quad \{31\} \\ &= (x \sigma_x)^2 + (y \sigma_y)^2 = \mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2 = f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ &= (x \gamma_x \gamma_t)^2 + (y \gamma_y \gamma_t)^2 \\ &= -(x \gamma_x)^2 - (y \gamma_y)^2 = -x^2 - y^2 = f(x, y) \\ &= r^2 = \mathbf{r}^2 = -r^2 \end{aligned}$$

betrachtet, wobei

$$\mathbf{r} = x \sigma_x + y \sigma_y \quad \text{und} \quad r = x \gamma_x + y \gamma_y \quad \{32\}$$

Damit kann der Gradient mit Hilfe der verschiedenen Nabla-Operatoren bestimmt werden:

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y) &= \left( \sigma_x \frac{\partial}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial}{\partial y} \right) (x^2 + y^2) \\ &= 2 x \sigma_x + 2 y \sigma_y = 2 \mathbf{r} \quad \{33\} \end{aligned}$$

Alternativ ergibt sich

#### <sup>4</sup> Anmerkungen zur Schreibung unterschiedlicher Größen:

In Gleichung {31} werden Größen unterschiedlicher Dimension in Relation zueinander gesetzt. Diese werden in konsequenter Weise durch unterschiedliche Schreibungen gekennzeichnet:

Normschreibung x, y, r ..... Koordinatenwerte bzw. Beträge von Vektoren (Skalare)

Schattiert kursive Schreibung  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{r}$  ..... Vektoren des dreidimensionalen Raums

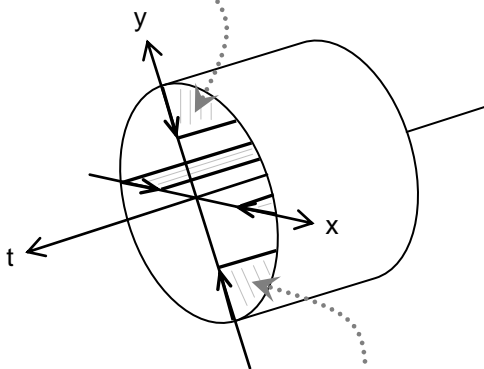
Kursivschreibung x, y, r ..... Vektoren des vierdimensionalen Raums oder der vierdimensionalen Raumzeit

Auch in den darauf folgenden Formeln wie z.B. in Gl. {83} wird analog verfahren.

$$\square f(x, y) = \left( -\gamma_x \frac{\partial}{\partial x} - \gamma_y \frac{\partial}{\partial y} \right) (x^2 + y^2) \\ = -2 x \gamma_x - 2 y \gamma_y = -2 r \quad \{34\}$$

Die unterschiedlichen Vorzeichen in den Gleichungen {33} und {34} sind durch unterschiedliche Betrachtungsweisen bedingt: Im dreidimensionalen Raum werden die Pauli-Matrizen  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  und  $\sigma_z$  als

Der negativ orientierte Vektor  $-\gamma_y$  entspricht einem positiv orientierten Flächenstück  $(-\gamma_y)(-\gamma_t) = \sigma_y$ .



Der positiv orientierte Vektor  $\gamma_y$  entspricht einem negativ orientierten Flächenstück  $\gamma_y(-\gamma_t) = -\sigma_x$ .

Abb.1: Zuordnung von Vektoren des dreidimensionalen Raums zu Bivektoren einer vierdimensionalen Raumzeit.

Basisvektoren und damit als vektorielle Größen interpretiert [28, IV.B, S. 108]. In der vierdimensionalen Raumzeit dagegen nehmen die Pauli-Matrizen die Rolle von orientierten raumzeitlichen Einheitsflächen und damit von bivektoriellen Größen ein.

Beim Vergleich von Gleichung {33} und {34} wer-

den somit geometrisch völlig unterschiedliche Objekte verglichen – Vektoren in Gl. {34} mit Bivektoren in Gl. {33}, was in den Abbildungen 1 und 2(a) dargestellt ist.

Als raumzeitartig gemischtes Beispiel wird im Vergleich dazu die Gradientenbildung einer Linearkombination der Funktionen  $f(x)$  und  $g(x)$  der Gleichungen {14} und {15}

$$h(x, t) = c^2 g(t) + f(x) = c^2 t^2 + x^2 \\ = c^2 (t \gamma_t)^2 - (x \gamma_x)^2 = c^2 t^2 - x^2 = h(x, t) \\ = s^2 \neq r^2 \quad \{35\}$$

betrachtet, wobei  $s$  in der fünfdimensionalen Welt der Kosmologischen Relativität Carmelis als Summe eines Vektors und eines Pseudovektors gedacht werden kann:

$$s = ct \gamma_t + I x \gamma_x \quad I = \gamma_t \gamma_x \gamma_y \gamma_z \quad \{36\}$$

$$r = ct \gamma_t + x \gamma_x \quad \{37\}$$

In der vierdimensionalen Welt der Speziellen Relativität gelingt eine zu Gleichung {36} analoge Darstellung nicht so einfach, da ein fünfdimensional konstruierter Pseudoskalar notwendig ist.

Damit kann der Gradient mit Hilfe der verschiedenen Nabla-Operatoren bestimmt werden:

$$\square h(x, t) = \diamond h(x, t) \\ = \left( \gamma_t \frac{\partial}{c \partial t} - \gamma_x \frac{\partial}{\partial x} \right) (c^2 t^2 + x^2) \\ = 2 ct \gamma_t - 2 x \gamma_x = -2 \gamma_x r \gamma_x \quad \{38\}$$

Dieser Gradient ist in der mittleren Abbildung 2(b) dargestellt.

Als rein zeitartiges Beispiel wird die Gradientenbildung der Summe zweier quadratischer zeitlicher Variablen  $t$  und  $v$ , wie sie in der Kosmologischen Relativität auftreten, betrachtet

$$k(t, v) = c^2 t^2 + \tau^2 v^2 \quad \{39\} \\ = c^2 (t \gamma_t)^2 + \tau^2 (v \gamma_v)^2 = c^2 t^2 + \tau^2 v^2 = k(t, v) \\ = r^2$$

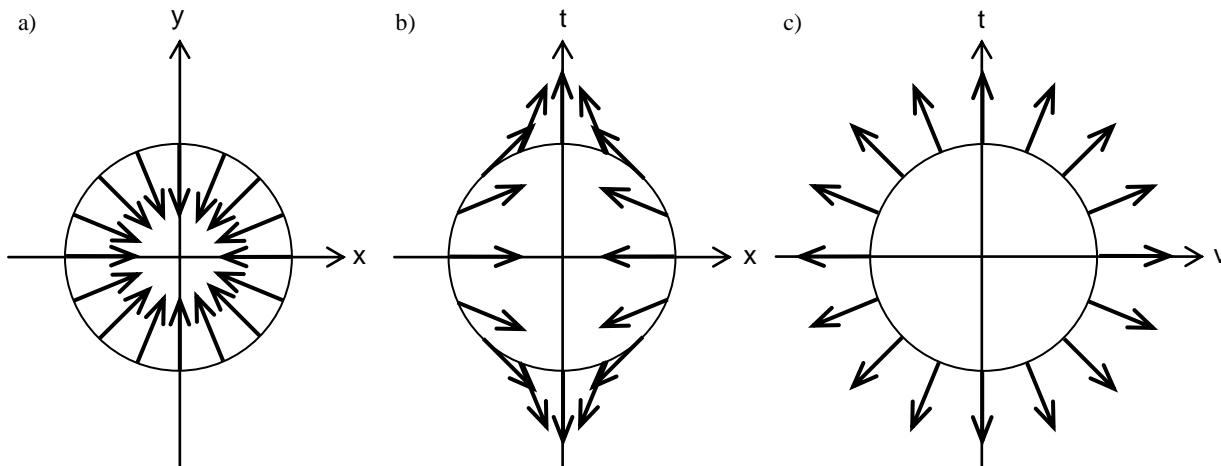


Abb.2: Gradientenbildung mit (a) rein raumartigen, (b) raumzeitlich gemischten und (c) rein zeitartigen Variablen.

wobei

$$r = ct \gamma_t + \tau v \gamma_v \quad \{40\}$$

Damit kann der Gradient mit Hilfe des Carmeli-Operators bestimmt werden:

$$\begin{aligned} \square h(x, t) &= \left( \gamma_t \frac{\partial}{c \partial t} + \gamma_v \frac{\partial}{\tau \partial v} \right) (c^2 t^2 + \tau^2 v^2) \\ &= 2 ct \gamma_t + 2 \tau v \gamma_v = 2 r \end{aligned} \quad \{41\}$$

Eine Darstellung dieses Ergebnisses findet sich in Abbildung 2(c).

Der Gradient raumzeitlich gemischter Funktionen (Abb. 2b) unterscheidet sich deutlich von rein raumartigen (Abb. 2a) und rein zeitartigen Situationen (Abb. 2c). Grund dafür ist, dass einzig in raumzeitlich gemischten Situationen lichtartige Vektoren existieren.

Im Fall von Situation 2(b) sind die Weltlinien des Lichts genau die Winkelhalbierenden. Entlang dieser Winkelhalbierenden ist der raumzeitliche Abstand zweier Punkte immer Null, auch wenn sie räumlich sehr weit entfernt liegen – eine Tatsache, die schon Einstein und Lanczos in ihrem Briefwechsel stark irritierte [29, S. 107].

Für ein Photon sind alle Punkte auf der Weltlinie identisch, mit auch für uns enormen Konsequenzen [30], [31]. Und da eine Funktion, in die nur Quadrate von Vektoren (und damit nur Abstände) eingehen, für alle Punkte der Weltlinie des Lichts genau ein und denselben identischen Funktionswert aufweisen muss, ist die Differenz der Funktionswerte zweier Punkte auf der Weltlinie immer Null.

Der Gradient einer Funktion zeigt jedoch genau in die Richtung der größten Änderung. Mithin muss der Gradient bei der betrachteten Funktion {35} senkrecht zur Weltlinie des Lichtes zeigen, da sich in dieser Richtung die größten Änderungen in den Funktionswerten benachbarter Punkte ergeben (siehe dazu auch die Diskussion in [6, Abs. 6.1.1, S. 168-170]).

### 9. Die Maxwell-Gleichung in unterschiedlichen Darstellungen

Nach diesen Vorüberlegungen werden im Folgenden die Maxwell-Gleichungen auf Grundlage der Geometrischen Algebra unterschiedlich dimensionaler Räume bzw. Raumzeiten vorgestellt. Ziel ist dabei die Aufarbeitung der ebenen Lösung dieser Gleichungen im Vakuum-Fall als Beispiel für eine physikalische Anwendung und Einbettung der geometrischen Ableitung.

Ausgangspunkt der gesamten Theoriebildungen ist Minkowskis Diktum, dass „von Stund an Raum für sich und Zeit für sich völlig zu Schatten herabsinken (sollen) und nur noch eine Art Union der beiden Selbständigkeit bewahren (soll)“ [17, S. 56].

Dieses Diktum hatte zur direkten Folge, dass von gleicher Stund an elektrisches Feld und magneti-

sches Feld ebenfalls zu Schatten herabsanken und nur noch eine untrennbare Union dieser beiden Größen eine physikalisch invariante Selbständigkeit bewahren konnte.

Diese zusammengesetzte Größe, das elektromagnetische Feld  $F$ , von einigen Autoren je nach Kontext auch Faraday-Bivektor [6, S. 230] genannt, setzt sich aus dem elektrischen Feld  $E$  und dem magnetischen Feld  $B$  in Form einer komplexen Addition zusammen (siehe auch Gl. {29}):

$$F = E + I B \quad \{42\}$$

Legt man dieser Gleichung ein dreidimensionales, rein räumliches Koordinatensystem zugrunde, so sind sowohl die elektrische Feldstärke  $E$  wie auch die magnetische Feldstärke  $B$  (üblicherweise auch als magnetische Flussdichte bezeichnet) jeweils Vektoren.

Dies ist physikhistorisch interessant und physikdidaktisch relevant. Hestenes schreibt dazu: „The curious convenience of combining the electric and magnetic vectors  $E$  and  $B$  into a single complex vector has been noted time and again for more than 50 years but with no inkling of its geometric significance“ [32, S. 1025]. Diese geometrische Bedeutung ist der entscheidende didaktische Beitrag, den die Geometrische Algebra<sup>5</sup> zu leisten vermag: Die Zusammensetzung {42} „is actually more than a ‘complex vector‘“ [32, S. 1025].

Gleichung {42} hat eine eindeutige geometrische Interpretation: Die elektromagnetische Feldstärke  $F$  ist die Summe eines Vektors (das elektrische Feld  $E$ ) und eines orientierten Flächenstücks oder Bivektors (als Dual  $I B$  der magnetischen Feldstärke  $B$ ). Wir addieren in Gleichung {42} somit eine Strecke und eine Fläche.

Diese geometrische Deutung ändert sich jedoch, wenn wir die elektromagnetische Feldstärke  $F$  in der Raumzeit mit Hilfe eines vierdimensionalen Koordinatensystems aus drei Raum- und einer Zeitrichtung beschreiben.

Aufgrund der Beziehungen {26} ist die elektrische Feldstärke  $E$  in der vierdimensionalen Raumzeit ein gemischter Bivektor. Aus einem dreidimensional rein raumartigen Vektor wird – wie auch schon in Abbildung 1 dargestellt – ein raumzeitlich gemischtes Flächenstück.

Der Ausdruck  $I B$ , der das magnetische Feld beschreibt, wird in vierdimensionaler Betrachtungsweise ein rein räumlicher Bivektor. In der Raumzeit der Speziellen Relativität addieren wir gemäß Gleichung {42} somit ein raumzeitlich gemischtes Flächenstück und ein rein räumliches Flächenstück. Die

<sup>5</sup> In der Geometrischen Algebra lassen sich algebraische Beziehungen immer in geometrische Beschreibungen übersetzen. Und umgekehrt lassen sich in der Geometrischen Algebra geometrische Beschreibungen unproblematisch und einfach nachvollziehbar in algebraische Beziehungen übersetzen.

elektromagnetische Feldstärke  $F$  ist somit ein reiner Bivektor und die Bezeichnung als Faraday-Bivektor in diesem Fall gerechtfertigt.

Eine weitere geometrische Deutung erfährt Gleichung {42} in der Kosmologischen Relativität Carmelis, da dann die räumlichen Vektoren des dreidimensionalen Raums als raumzeitgeschwindigkeitsartige Trivektoren und damit als orientierte Volumenelemente [26, Gl. 24-26] gedeutet werden:

$$\sigma_x = \gamma_x \gamma_v \gamma_t \quad \sigma_y = \gamma_y \gamma_v \gamma_t \quad \sigma_z = \gamma_z \gamma_v \gamma_t \quad \{43\}$$

Damit wird die elektrische Feldstärke  $E$  in der fünfdimensionalen Kosmologischen Relativität als raumzeitgeschwindigkeitsartiger Trivektor und der Anteil der magnetischen Feldstärke  $I B$  wiederum als rein räumlicher Bivektor interpretiert. Somit addieren wir jetzt mit Gleichung {42} eine zweidimensionale Fläche zu einem dreidimensionalen Volumen.

Um diesen Sachverhalt deutlich zu machen, ist es hier sinnvoller, von einem Faraday-Multivektor zu sprechen.

Diese geometrischen Deutungen erbringen einen echten didaktischen Mehrwert im Vergleich zur heutigen rein algebraischen Beschreibung. Auch hier kann man nur David Hestenes zitieren, der das Dilemma der heutigen Lehrbuch-Elektrodynamik treffend und präzise umschreibt: „Today, electric and magnetic fields are commonly represented as complex vectors without realizing that the real part of one can be related to the imaginary part of the other“ [32, S. 1026]. Und es ist erstaunlich, dass wir, mehr als 40 Jahre nach dieser eindeutigen und klaren Analyse, heute immer noch einer hochgradig redundanten und äußerst altmodischen Beschreibung der Elektrodynamik anhängen.

Mit Hilfe des Faraday-Multivektors können die vier Maxwell-Gleichungen in einer einzigen Gleichung

$$\square F = S \quad \{44\}$$

zusammengefasst werden [15, Gl. 50, S. 509], wobei der Term  $S$  die Quellterme umfasst. Diese geometrisch-algebraische Darstellung ist ein Highlight auf der Suche nach einer konzeptuell vereinheitlichten Passung der Elektrodynamik. Anstelle der üblicherweise vier getrennt formulierten Maxwell-Gleichungen beschreibt Gleichung {44} die Maxwell'sche Theorie vollständig.

Allerdings findet Gleichung {44} in Raumzeiten unterschiedlicher Dimensionen auch eine unterschiedliche Darstellung. Sie lauten im Vakuum ohne Quellterme:

- **Vierdimensionale Raumzeit: (Spezielle Relativität – Einstein)**

$$\square F = 0 \quad \{45\}$$

bzw. in ausführlicher Schreibung:

$$\left( \gamma_t \frac{\partial}{c \partial t} - \gamma_x \frac{\partial}{\partial x} - \gamma_y \frac{\partial}{\partial y} - \gamma_z \frac{\partial}{\partial z} \right) F = 0 \quad \{46\}$$

- **Dreidimensionaler Raum: (Rein räumliche Beschreibung – Maxwell)**

$$\gamma_t \square F = \left( \frac{\partial}{c \partial t} + \nabla \right) F = 0 \quad \{47\}$$

bzw. in ausführlicher Schreibung:

$$\left( \frac{\partial}{c \partial t} + \sigma_x \frac{\partial}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial}{\partial y} + \sigma_z \frac{\partial}{\partial z} \right) F = 0 \quad \{48\}$$

- **Fünfdimensionale Raumzeitgeschwindigkeit: (Kosmologische Relativität – Carmeli)**

Aus der dreidimensionalen Beziehung {48} kann mit Hilfe der Gleichungen {43} die fünfdimensionale Beschreibung

$$\left( \frac{\partial}{c \partial t} + \gamma_x \gamma_v \gamma_t \frac{\partial}{\partial x} + \gamma_y \gamma_v \gamma_t \frac{\partial}{\partial y} + \gamma_z \gamma_v \gamma_t \frac{\partial}{\partial z} \right) F = 0 \quad \{49\}$$

und damit

$$\left( -\gamma_v \gamma_t \frac{\partial}{c \partial t} + \gamma_x \frac{\partial}{\partial x} + \gamma_y \frac{\partial}{\partial y} + \gamma_z \frac{\partial}{\partial z} \right) F = 0 \quad \{50\}$$

abgeleitet werden. Gleichung {50} liefert im Falle nicht vorhandener Quellterme und bei der näherungsweise Annahme von vernachlässigbaren Änderungen in der (kosmologischen) Geschwindigkeit ( $v \approx \text{const.}$ ) eine zu

$$\diamond F = 0 \quad \{51\}$$

bzw.

$$\left( \gamma_t \frac{\partial}{c \partial t} + \gamma_v \frac{\partial}{\tau \partial v} - \gamma_x \frac{\partial}{\partial x} - \gamma_y \frac{\partial}{\partial y} - \gamma_z \frac{\partial}{\partial z} \right) F = 0 \quad \{52\}$$

physikalisch äquivalente Beschreibung.

Dieses Spannungsverhältnis zwischen den Beschreibungen {50} und {52} ist konzeptuell äußerst interessant: Es ist immer möglich, aus einer dreidimensionalen Beschreibung (mit drei unabhängigen Variablen) eine fünfdimensionale Beschreibung, die ebenfalls drei unabhängige Größen enthält, zu konstruieren. Im einfachsten Fall wird ein dreidimensionaler Punkt über Gleichungen wie {26} in eine Strecke einer vierdimensionalen oder über Gleichungen wie {43} in ein Volumen einer fünfdimensionalen raumzeitlichen Struktur umgedeutet.

Umgekehrt ist das nicht möglich. Eine allgemeingültige fünfdimensionale Beschreibung mit fünf unabhängigen Variablen kann nicht in eine dreidimensionale Beschreibung mit nur drei unabhängigen Größen gepresst werden. Der dreidimensionale Raum ist dafür strukturell zu klein.

Deshalb wird eine allgemeingültige Maxwell-Gleichung einer fünfdimensionalen Raumzeit mit



Quelltermen und fünf echten unabhängigen Variablen

$$\text{◻} F = S \quad \{53\}$$

auch eine andere, neue Physik liefern, die im Vergleich zur Maxwell-Gleichung {44} zusätzliche physikalische Phänomene beschreibt.

Am Beispiel ebener elektromagnetischer Wellen als Lösungen der Maxwell-Gleichungen {45}, {47} und {50} im Vakuum wird in den folgenden Abschnitten aber zuerst einmal gezeigt, wie eine solche geometrisch-algebraische Umformung der Differentialrechnung physikalische Problemstellungen in drei-, vier- bzw. fünfdimensionaler Raumzeit aufklärt und ein überraschender Aspekt ebener elektromagnetischer Wellen zum Tragen kommt.

### 10. Ausbreitung ebener elektromagnetischer Wellen

Dazu wird für ebene elektromagnetische Wellen der monochromatische Ansatz

$$F(x, y, z, t) = f e^{I k \cdot r} \quad \{54\}$$

in der vereinfachten Form mit einer Ausbreitung des relativistischen Wellenvektors

$$k(x, y, z, t) = \frac{\omega}{c} \gamma_t + k_x \gamma_x + k_y \gamma_y + k_z \gamma_z \quad \{55\}$$

in z-Richtung ( $k_x = k_y = 0$ ) betrachtet, so dass sich mit

$$r = ct \gamma_t + x \gamma_x + y \gamma_y + z \gamma_z \quad \{56\}$$

$$k \cdot r = \omega t - k_x x - k_y y - k_z z \quad \{57\}$$

der Ansatz

$$F(z, t) = f e^{I(\omega t - k_z z)} \quad \{58\}$$

ergibt. Dieser Ansatz kann in die Vakuum-Gleichungen {45}, {47} oder {50} eingesetzt und gelöst werden, so dass der Koeffizient  $f$  bestimmt wird.

Mit Hilfe der partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial t} F(z, t) = I \frac{\omega}{c} F(z, t) \quad \{59\}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} F(z, t) = \frac{\partial}{\partial y} F(z, t) = 0 \quad \{60\}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} F(z, t) = -I k_z F(z, t) \quad \{61\}$$

ergibt die Substitution in Gleichung {48} den Ausdruck

$$\left( I \frac{\omega}{c} \gamma_t + I k_z \gamma_z \right) F(z, t) = 0 \quad \{62\}$$

bzw.

$$\left( \frac{\omega}{c} \gamma_t + k_z \gamma_z \right) F(z, t) = 0 \quad \{63\}$$

$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \text{Skalar} & \text{Skalar} & \text{Vektor} & \text{Vektor} \end{matrix}$ 
↖ raumzeitlich gemischter Bivektor + rein räumlicher Bivektor

Eine erneute linksseitige Anmultiplikation des Klammerausdrucks liefert

$$\begin{aligned} \left( \frac{\omega}{c} \gamma_t + k_z \gamma_z \right) \left( \frac{\omega}{c} \gamma_t + k_z \gamma_z \right) F(z, t) \\ = \left( \frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 \right) F(z, t) = 0 \end{aligned} \quad \{64\}$$

Daraus folgt die betragsmäßige Gleichheit der Quadrate von (Kreis-)Frequenz  $\omega/c$  und z-Komponente  $k_z$  des Wellenvektors, so dass gilt:

$$k_z = + \frac{\omega}{c} \quad \text{Wellenausbreitung in Richtung der z-Achse} \quad \{65\}$$

$$k_z = - \frac{\omega}{c} \quad \text{Wellenausbreitung entgegen der z-Achse} \quad \{66\}$$

Die betragsmäßig gleich großen Skalare in Gleichung {63} lassen sich somit wegkürzen. Dies führt für eine Ausbreitung der ebenen elektromagnetischen Welle in Richtung der z-Achse auf

$$(\gamma_t + \gamma_z) F(z, t) = 0 \quad \{67\}$$

Aufgrund der Zusammensetzung des elektromagnetischen Feldes aus elektrischem und magnetischem Feld {42} liefert Gleichung {67} die Beziehung

$$\gamma_t E + \gamma_t I B = -\gamma_z E - \gamma_z I B \quad \{68\}$$

Um eine geometrische Interpretation dieser Terme zu ermöglichen, müssen die rechtsseitigen Terme von Gleichung {68} in ihre geometrischen Bestandteile aufgespalten werden. Dies gelingt mit Hilfe von Graßmanns Fundamentalgleichung [33, Gl. 4, S. 376], der kanonischen Dekomposition [28, Gl. 7, S.

$$\underbrace{\gamma_t E}_{\text{raumartiger Vektor}} + \underbrace{\gamma_x \gamma_y \gamma_z B}_{\text{raumzeitlich gemischter Trivektor}} = - \underbrace{\gamma_z \cdot E}_{\text{zeitartiger Vektor}} - \underbrace{\gamma_z \wedge E}_{\text{raumzeitlich gemischter Trivektor}} - \underbrace{(\gamma_t \gamma_x \gamma_y) \cdot B}_{\text{raumartiger Vektor}} - \underbrace{(\gamma_t \gamma_x \gamma_y) \wedge B}_{\text{rein räumlicher Trivektor}} \quad \{69\}$$

Abb.3: Geometrisch eindeutige Identifikation der algebraischen Terme einer ebenen elektromagnetischen Welle.

107] des geometrischen Produktes zweier geometrischer Größen  $a$  und  $b$  in ein inneres und ein äußeres Produkt

$$ab = a \cdot b + a \wedge b \quad \{70\}$$

Damit schreibt sich Gleichung {68} als

$$\gamma_t E + \gamma_t I B = -\gamma_z \cdot E - \gamma_z \wedge E - (\gamma_z I) \cdot B - (\gamma_z I) \wedge B \quad \{71\}$$

Mit Hilfe des vierdimensionalen Pseudoskalars

$$I = \gamma_t \gamma_x \gamma_y \gamma_z \quad \text{mit} \quad I^2 = -1 \quad \{72\}$$

ergibt sich daraus die in Abbildung 3 aufgeführte Beziehung, deren Terme eindeutig geometrisch identifiziert werden können.

Gleichung {69} von Abbildung 3 umfasst vier geometrisch verschiedene Objektklassen. Somit zerfällt diese Gleichung in vier Teilgleichungen, die für ebene elektromagnetische Wellen des Ansatzes {58} erfüllt sein müssen:

• **Zeitartige Vektoren:**

$$-\gamma_z \cdot E = 0 \quad \{73\}$$

Da das innere Produkt Null ist, enthält der Bivektor  $E$  keinen Anteil in Richtung von  $\gamma_z$ . Somit folgt, dass das elektrische Feld  $E$  senkrecht zur Ausbreitungsrichtung der Welle  $\gamma_z$  steht.

Und es folgt, dass das äußere Produkt dieser beiden Größen dem geometrischen Produkt entsprechen muss:

$$-\gamma_z \wedge E = -\gamma_z E \quad \{74\}$$

• **Rein räumliche Trivektoren:**

$$-(\gamma_t \gamma_x \gamma_y) \wedge B = (\gamma_x \gamma_y) \wedge (B \gamma_t) = 0 \quad \{75\}$$

Da das äußere Produkt Null ist, enthält der Bivektor keinen Anteil in Richtung von  $\gamma_z$ . Somit folgt, dass das magnetische Feld  $B$  parallel zum dreidimensionalen raumzeitlichen Volumen  $\gamma_t \gamma_x \gamma_y$  und damit ebenfalls senkrecht zur Ausbreitungsrichtung der Welle  $\gamma_z$  steht.

Und es folgt, dass das innere Produkt dieser beiden Größen dem geometrischen Produkt entsprechen muss:

$$-(\gamma_t \gamma_x \gamma_y) \cdot B = -\gamma_t \gamma_x \gamma_y B \quad \{76\}$$

• **Raumartige Vektoren:**

$$\gamma_t E = -(\gamma_t \gamma_x \gamma_y) \cdot B \quad \{77\}$$

Mit Hilfe von Gleichung {76} ergibt sich:

$$E = -\gamma_x \gamma_y B \quad \{78\}$$

Diese Beziehung kann genutzt werden, um im elektromagnetischen Feld {42} das magnetische Feld  $B$  zu eliminieren (siehe Gl. {81}).

• **Raumzeitlich gemischte Trivektoren:**

$$\gamma_x \gamma_y \gamma_z B = -\gamma_z \wedge E \quad \{79\}$$

Mit Hilfe von Gleichung {74} ergibt sich die zu Gleichung {78} identische Beziehung:

$$E = -\gamma_x \gamma_y B \quad \{80\}$$

Diese Beziehungen {78} bzw. {80} werden nun genutzt, um im elektromagnetischen Feld {42} das magnetische Feld  $B$  zu eliminieren:

$$\begin{aligned} F &= E - \gamma_t \gamma_z (-\gamma_x \gamma_y) B \\ &= (1 + \gamma_z \gamma_t) E \end{aligned} \quad \{81\}$$

bzw. in alternativer Fassung:

$$F = E (1 - \gamma_z \gamma_t) \quad \{82\}$$

Eine dazu vollkommen äquivalente Beziehung erhält man bei Verwendung der dreidimensionalen Maxwell-Gleichung {47}, wenn der Ansatz {54} mit Hilfe der Beziehungsgleichungen zwischen Pauli- und vierdimensionaler Dirac-Algebra {26} in einen dreidimensional gültigen Ausdruck umgeformt wird, indem jetzt der Positionsvektor

$$\mathcal{R} = r \gamma_t - ct = x \sigma_x + y \sigma_y + z \sigma_z \quad \{83\}$$

verwendet wird. Mit den zu den Gleichungen {59} bis {70} vollständig analogen Umrechnungen und dem dreidimensionalen Pseudoskalar

$$I = \sigma_x \sigma_y \sigma_z \quad \text{mit} \quad I^2 = -1 \quad \{84\}$$

ergibt sich daraus die in Abbildung 4 aufgeführte Beziehung, deren Terme wiederum geometrisch eindeutig identifiziert werden können. Alle Zwischenschritte wie beispielsweise

$$\left( \frac{\omega}{c} - k_z \sigma_z \right) F(z, t) = 0 \quad \{85\}$$

sind dabei eindeutig im Rahmen des lediglich drei-

$$\begin{array}{ccccccc} E & + & \underbrace{\sigma_x \sigma_y \sigma_z B}_{\text{Bivektor}} & = & \underbrace{\sigma_z \cdot E}_{\text{Skalar}} & + & \underbrace{\sigma_z \wedge E}_{\text{Bivektor}} & + & \underbrace{(\sigma_x \sigma_y) \cdot B}_{\text{Vektor}} & + & \underbrace{(\sigma_x \sigma_y) \wedge B}_{\text{Trivektor}} & \{86\} \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\ \text{Vektor} & & \text{Bivektor} & & \text{Skalar} & & \text{Bivektor} & & \text{Vektor} & & \text{Trivektor} & \end{array}$$

**Abb.4:** Geometrisch eindeutige Identifikation der algebraischen Terme einer ebenen elektromagnetischen Welle im Kontext der dreidimensionalen Beschreibung durch Pauli-Matrizen.

dimensionalen Raumes beschreibbar, und es gilt jetzt an Stelle von {67}

$$(1 - \sigma_z) F(z, t) = 0 \quad \{87\}$$

Diese Beziehung ist die Grundlage für die in Abbildung 4 diskutierte Gleichung {86}.

Eine zum Vorgehen in Gleichungen {73} bis {80} analoge Analyse liefert nun die zu Gleichung {81} und {82} äquivalenten Ergebnisse:

$$F = (1 + \sigma_z) E \quad \{88\}$$

$$\text{bzw. } F = E (1 - \sigma_z) \quad \{89\}$$

### 11. Algebraische und geometrische Interpretation der Lösungen

An der Stelle  $z = 0$  gilt zum Zeitpunkt  $t = 0$  gemäß der dreidimensional formulierten Beziehung {89}

$$F(0, 0) = \mathbf{f} = E_0 (1 - \sigma_z) \quad \{94\}$$

Deshalb lautet die vollständige Lösungsgleichung

$$F(z, t) = E_0 (1 - \sigma_z) e^{I(\omega t - k_z z)} \quad \{95\}$$

Mit Hilfe der Eulerschen Beziehung kann Gleichung {95} auch als

$$\underbrace{\gamma_v \gamma_t E}_{\text{raumartiger Vektor}} + \underbrace{\gamma_x \gamma_y \gamma_z B}_{\text{raumzeitgeschwindigkeitlich gemischter Quadrovektor}} = - \underbrace{\gamma_z \cdot E}_{\text{zeitgeschwindigkeitlich gemischter Bivektor}} - \underbrace{\gamma_z \wedge E}_{\text{raumzeitgeschwindigkeitlich gemischter Quadrovektor}} - \underbrace{(\gamma_v \gamma_t \gamma_x \gamma_y) \cdot B}_{\text{raumartiger Vektor}} - \underbrace{(\gamma_v \gamma_t \gamma_x \gamma_y) \wedge B}_{\text{rein räumlicher Trivektor}} \quad \{90\}$$

**Abb.5:** Geometrisch eindeutige Identifikation der algebraischen Terme einer ebenen elektromagnetischen Welle im Kontext einer fünfdimensionalen Beschreibung durch Dirac-Matrizen.

Ein Vergleich der Abbildungen 3 und 4 zeigt, dass die leistungsfähigere und tiefgründigere vierdimensionale Beschreibungsweise kognitiv anspruchsvoller ist, da zwischen raum- und zeitartigen Größen unterschieden werden muss. Es gilt deshalb hier die berechtigte Darstellung von Vold, der anmerkt, dass im Rahmen der Pauli-Algebra „the details are easier to understand after gaining some familiarity with a description using three-dimensional space“ [15, S. 509].

Physikalisch noch interessanter, aber eben auch kognitiv noch anspruchsvoller, wird die Darstellung im Rahmen der Kosmologischen Relativität und der damit verbundenen fünfdimensionalen Raumzeitgeschwindigkeit Carmelis.

Dies gelingt durch eine Übersetzung der Pauli-Matrizen in Dirac-Matrizenprodukte gemäß der Gleichungen {43}. Die Maxwell-Gleichung {50} liefert die zu {81} bzw. {88} und {82} bzw. {89} mathematisch vollkommen äquivalenten Beziehungen

$$F = (1 + \sigma_z) E = (1 + \gamma_z \gamma_v \gamma_t) E \quad \{91\}$$

bzw. in alternativer Fassung

$$F = E (1 - \sigma_z) = E (1 - \gamma_z \gamma_v \gamma_t) \quad \{92\}$$

wobei bei Umformung des letzten Terms von Gleichung {90} wie bei Gleichung {75} auf

$$-(\gamma_v \gamma_t \gamma_x \gamma_y) \wedge B = (\gamma_x \gamma_y) \wedge (B \gamma_v \gamma_t) = 0 \quad \{93\}$$

zu achten ist (siehe Abbildung 5).

$$F(z, t) = E_0 (1 - \sigma_z) (\cos(\omega t - k_z z) + I \sin(\omega t - k_z z)) \quad \{96\}$$

geschrieben werden. Für eine graphische Darstellung ist eine geeignete Wahl der Anfangsbedingungen notwendig. Beispielsweise kann der elektrische Feldstärkevektor  $E_0$  zum Zeitpunkt  $t = 0$  an der Stelle  $z = 0$  in x-Richtung gewählt werden:

$$E_0 = \mathbf{E}_0 \sigma_x \quad \{97\}$$

Bei dieser Wahl des elektrischen Feldvektors setzt sich das elektromagnetische Feld aus den folgenden vier Termen zusammen:

$$\begin{aligned} F(z, t) = & \mathbf{E}_0 \sigma_x \cos(\omega t - k_z z) \\ & - \mathbf{E}_0 \sigma_y \sin(\omega t - k_z z) \\ & + \mathbf{E}_0 \sigma_z \sigma_x \cos(\omega t - k_z z) \\ & + \mathbf{E}_0 \sigma_y \sigma_z \sin(\omega t - k_z z) \end{aligned} \quad \{98\}$$

Die ersten beiden Terme umfassen den Vektor der elektrischen Feldstärke und die beiden letzten Terme umfassen den Bivektor des magnetischen Feldes:

$$\begin{aligned} E(z, t) = & \mathbf{E}_0 \sigma_x \cos(\omega t - k_z z) \\ & - \mathbf{E}_0 \sigma_y \sin(\omega t - k_z z) \end{aligned} \quad \{99\}$$

$$\begin{aligned} I B(z, t) = & \mathbf{E}_0 \sigma_z \sigma_x \cos(\omega t - k_z z) \\ & - \mathbf{E}_0 \sigma_z \sigma_y \sin(\omega t - k_z z) \\ = & \sigma_z E(z, t) \end{aligned} \quad \{100\}$$

Das ist ein faszinierendes Ergebnis. Ebene monochromatische Wellen des Ansatzes {54} sind zirkular polarisiert. Dieser Sachverhalt wurde zwar schon

von Moses auf Grundlage einer spinoriellen Beschreibung herausgearbeitet [34, S. 14], aber erst Hestenes stellt die didaktischen Implikationen in den Vordergrund: „This wave is necessarily right circularly polarized, because that follows unequivocally from the geometric meaning of multivector algebra“ [32, S. 1026].

Und Vold weist eindrücklich darauf hin, dass jeder mathematische Term unserer Lösung {98} zu einer physikalisch eindeutig identifizierbaren, geometrisch veranschaulichbaren Größe gehört: „We are not ‘taking the real part’ as must be done when interpreting complex vectors as conventionally used in vector analysis“ [15, S. 511].

Zur graphischen Darstellung des Verhaltens ebener elektromagnetischer Wellen sind die folgenden Beispielwerte in Abbildung 6 aufgetragen:

$$\begin{aligned} E(z=0, t=0) &= \mathbf{E}_0 \sigma_x \\ E(z=0, t=T/8) &= \mathbf{E}_0 \frac{1}{\sqrt{2}} (\sigma_x - \sigma_y) \end{aligned} \quad \{101\}$$

$$E(z=0, t=T/4) = -\mathbf{E}_0 \sigma_y$$

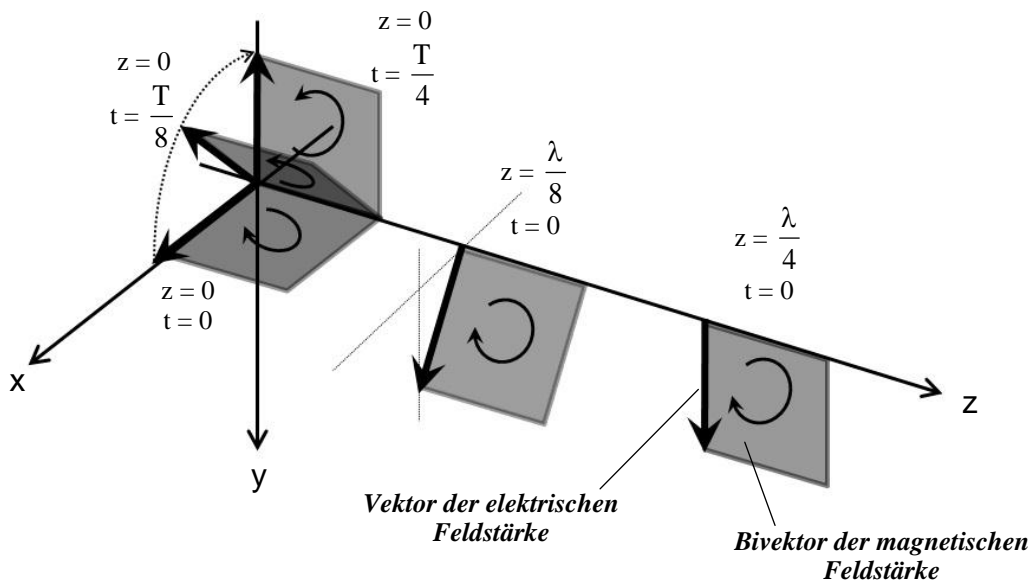
$$\begin{aligned} I B(z=0, t=0) &= \mathbf{E}_0 \sigma_z \sigma_x \\ I B(z=0, t=T/8) &= \mathbf{E}_0 \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma_z (\sigma_x - \sigma_y) \end{aligned} \quad \{102\}$$

$$I B(z=0, t=T/4) = -\mathbf{E}_0 \sigma_z \sigma_y$$

Die zirkuläre Drehbewegung des elektrischen Feldstärkevektors und des die magnetische Feldstärke repräsentierenden Flächenstücks beim Durchgang der elektromagnetischen Welle durch den Ursprung ist deutlich erkennbar.

$$\begin{aligned} E(z=\lambda/8, t=0) &= \mathbf{E}_0 \frac{1}{\sqrt{2}} (\sigma_x + \sigma_y) \\ E(z=\lambda/4, t=0) &= \mathbf{E}_0 \sigma_y \end{aligned} \quad \{103\}$$

$$E(z=\lambda/4, t=0) = \mathbf{E}_0 \sigma_y$$



**Abb.6:** Graphische Darstellung der Ausbreitung ebener elektromagnetischer Wellen (Anfangsbedingung:  $E_0 = \mathbf{E}_0 \sigma_x$ ).

$$I B(z=0, t=0) = \mathbf{E}_0 \sigma_z \sigma_x$$

$$I B(z=\lambda/8, t=0) = \mathbf{E}_0 \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma_z (\sigma_x + \sigma_y) \quad \{104\}$$

$$I B(z=\lambda/4, t=0) = \mathbf{E}_0 \sigma_z \sigma_y$$

Die zirkuläre Drehbewegung des elektrischen Feldstärkevektors und des die magnetische Feldstärke repräsentierenden Flächenstücks beim Entlanglaufen der elektromagnetischen Welle in Richtung der z-Achse ist deutlich erkennbar (siehe auch [15, Abb. 2, S. 511]).

Linear polarisierte elektromagnetische Wellen ergeben sich dann durch Überlagerung von rechts- und linksdrehenden zirkular polarisierten Wellen.

## 12. Rückwirkungen auf die Mathematik

Die Physik wirkt auf die Mathematik zurück: „Modification of mathematics for the purposes of science serves as a stimulus for further development of mathematics,“ schreibt Hestenes [28, S. 107] nicht zuletzt mit Blick auf die Geometrische Algebra. Dabei scheint gerade hier dieser Rückwirkungsmechanismus nicht sonderlich gut und insbesondere nur mit zeitlich größerer Verzögerung zustande zu kommen.

So berichtet Atiyah über seine Forschungsarbeiten zum Dirac-Operator, der im Konzept einer Geometrischen Ableitung – wie oben erwähnt – eine zentrale Rolle spielt: „... Singer and I ... ‘rediscovered’ for ourselves the Dirac operator. Had we been better educated in physics, or had there been the kind of dialogue with physicists that is now common, we would have got there much sooner“ [35, S. 116]. Hier hat die Rückwirkung der Physik auf die Mathematik nicht wirklich funktioniert.

Und auch bei der mathematischen Aufarbeitung der Maxwell-Gleichungen ist ein mögliches Zusammenwirken von Physik und Mathematik ähnlich ein-

drucksvoll gescheitert. So stellt Minkowski lakonisch fest, dass man hinterher immer klüger ist als vorher: „Nun, da die Mathematik hier mehr Trep-penwitz bekundet (... und) mit ihren in freier Fernsicht geschärften Sinnen die tiefgreifenden Konsequenzen einer solchen Ummodellierung unserer Natur-auffassung auf der Stelle zu erfassen vermag“ [17, S. 59].

Schon nach Formulierung von Maxwells Theoriege-bäude hätte „wohl ein Mathematiker in freier Phantasie auf den Gedanken verfallen können“ [17, S. 58], die Naturgesetzte Lorentz-invariant und nicht Galilei-invariant zu formulieren. Dyson beschreibt dieses Versagen als eine der großen „verpassten Chancen“ [36, S. 638-642] der Mathematik.

Bezogen auf das Spannungsverhältnis zwischen Geometrischer Algebra und Vektoralgebra stellt Dyson jedoch ein noch größeres Scheitern fest: Die Mathematik war nicht einmal in der Lage, die richtigen Fragen zu stellen. Die alles entscheidende Frage wäre Dyson zufolge gewesen: „How can it happen that the properties of three-dimensional space are represented equally well by two quite different and incompatible algebraic structures?“ [36, S. 644]. Beantwortet wurde diese Frage, so Dyson, erst durch Cartan „with substantial help from the physicists Pauli and Dirac“ [36, S. 644].

Und nun, weitere hundert Jahre später, wird auch das Versagen von uns Didaktikerinnen und Didaktikern deutlich. Lehrbücher zur Elektrodynamik, die die zirkuläre Natur ebener elektromagnetischer Wellen nicht zu thematisieren in der Lage sind, da sie Geometrie und Algebra nicht zu verknüpfen wissen, setzen auf einen offenkundig fachlich nicht tragfähigen Ansatz.

Uns ist es bis jetzt tatsächlich nicht gelungen, die von Cartan und zuvor schon von Graßmann und Clifford gegebenen Antworten mathematik- und physikdidaktisch so umzusetzen, dass sie von Lernenden angenommen und akzeptiert werden. Hier vergeben wir alle zusammen eine wirklich weitreichende Chance.

Und wie sieht es mit der Rückwirkung der Physik auf die Mathematik heute aus? Dyson gibt hier eine ernüchternde Einschätzung: „As a working physicist, I am acutely aware of the fact that the marriage between mathematics and physics, which was so enormously fruitful in past centuries, has recently ended in divorce“ [36, S. 635].

Diese fachliche Scheidung ist bedauerlich, denn didaktisch sind beide Gebiete nicht zu trennen.

### 13. Literatur

- [1] Kline, Morris (1959): *Mathematics and the Physical World*. Thomas Y. Crowell Company, New York.
- [2] Hestenes, David (2002): *New Foundations for Classical Mechanics*. Zweite Auflage. Kluwer Academic Publishers, New York, Boston.
- [3] Kline, Morris (1990): *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. Paperback-Ausgabe, Vol. 1. Oxford University Press, New York, Oxford.
- [4] Parra Serra, Josep Manel (2009): *Clifford Algebra and the Didactics of Mathematics*. In: *Advances in Applied Clifford Algebras*, No. 3/4, Vol. 19, S. 819-834.
- [5] Riesz, Marcel (1958): *Clifford Numbers and Spinors*. Chapters I – IV, Lecture Series No. 38, Lectures delivered October 1957 – January 1958. The Institute for Fluid Dynamics and Applied Mathematics, University of Maryland, College Park.
- [6] Doran, Chris; Lasenby, Anthony (2003): *Geometric Algebra for Physicists*. Cambridge University Press, Cambridge.
- [7] Macdonald, Alan (2013): *A Survey of Geometric Algebra and Geometric Calculus*. Manuskript in der Fassung vom 7. Dez. 2013, Luther College, Decorah.
- [8] Minkowski, Hermann (1908/1910): *Die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern*. In: *Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, Sitzung vom 21. Dezember 1907, S. 53-111. Wiederabdruck in: *Mathematische Annalen*, No. 4, Vol. 68, S. 472-525.
- [9] Minkowski, Hermann (1910): *Eine Ableitung der Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern vom Standpunkte der Elektronentheorie*. Aus dem Nachlass bearbeitet von Max Born. In: *Mathematische Annalen*, No. 4, Vol. 68, S. 526-551.
- [10] Hilbert, David (1910): *Hermann Minkowski*. In: *Mathematische Annalen*, No. 4, Vol. 68, S. 445-471.
- [11] Biener, Klaus (2005): *Hermann Minkowski – Mathematiklehrer Einsteins*. Computer- und Medienservice der Humboldt-Universität Berlin, cms-journal 27, August 2005, S. 77-78.
- [12] Doran, Chris; Lasenby, Anthony; Gull, Steve (1993): *Grassmann Mechanics, Multivector Derivatives, and Geometric Algebra*. In: *Oziewicz, Zbigniew; Borowiec, Andrzej; Jancewicz, Bernard (Hrsg.): Spinors, Twistors, Clifford Algebras and Quantum Deformations*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, S. 215-226.
- [13] Hitzer, Eckhard M. S. (2002): *Multivector Differential Calculus*. In: *Advances in Applied Clifford Algebras*, No. 2, Vol. 12, S. 135-182.
- [14] Hestenes, David (1968): *Multivector Calculus*. In: *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 24, S. 313-325.
- [15] Vold, Terje (1993): *An Introduction to Geometric Calculus and its Application to Electrodynamics*. In: *American Journal of Physics*, No. 6, Vol. 61, S. 505-513.
- [16] Feynman, Richard P. (2006): *Physik – »The*

- Lost Lectures«. Pearson Studium, München.
- [17] Minkowski, Hermann (1913): Raum und Zeit. Mit Anmerkungen von Arnold Sommerfeld. In: Lorentz, Hendrik A.; Einstein, Albert; Minkowski, Hermann: Das Relativitätsprinzip. Eine Sammlung von Abhandlungen. B. G. Teubner Verlag, Leipzig, Berlin, S. 56-73.
- [18] Hestenes, David (1967): Real Spinor Fields. In: Journal of Mathematical Physics, No. 4, Vol. 8, S. 798-808.
- [19] Hestenes, David (2003): Spacetime Physics with Geometric Algebra. In: American Journal of Physics, Vol. 71, No. 7, S. 691-714.
- [20] Arthur, John W. (2011): Understanding Geometric Algebra for Electromagnetic Theory. The IEEE Press Series on Electromagnetic Wave Theory, John Wiley & Sons, Hoboken, New Jersey.
- [21] Behar, Silvia; Carmeli, Moshe (2000): Cosmological Relativity: A New Theory of Cosmology. In: International Journal of Theoretical Physics, No. 5, Vol. 39, S. 1375-1396.
- [22] Carmeli, Moshe; Malin, Shimon (2000): Theory of Spinors – An Introduction. World Scientific, Singapore.
- [23] Carmeli, Moshe (2002): Cosmological Special Relativity. The Large-Scale Structure of Space, Time and Velocity. Second Edition, World Scientific, Singapore.
- [24] Carmeli, Moshe (2006): Cosmological Relativity. The Special and General Theories for the Structure of the Universe. World Scientific, Singapore.
- [25] Horn, Martin Erik (2011): Mathematische und didaktische Modellierung fünfdimensionaler Räume am Beispiel der Kosmologischen Relativität. In: Haug, Reinhold; Holzäpfel, Lars (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2011, Tagungsband der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, Band 1, WTM-Verlag, Münster, S. 403-406.
- [26] Horn, Martin Erik (2011): Die fünfdimensionale Raumzeit-Algebra am Beispiel der Kosmologischen Relativität. In: Grötzebauch, Helmuth; Nordmeier, Volkhard (Hrsg.): PhyDid B – Didaktik der Physik, Beiträge zur DPG-Frühjahrstagung des Fachverbands Didaktik der Physik in Münster, Beitrag 17.1.
- [27] Horn, Martin Erik (2012): Translating Cosmological Special Relativity into Geometric Algebra. In: Seenith Sivasundaram (Hrsg.): Proceedings of the 9th International Conference on Mathematical Problems in Engineering, Aerospace and Sciences in Vienna (ICNPAA). American Institute of Physics, AIP Conference Proceedings, Vol. 1493, Melville, New York, S. 492-498.
- [28] Hestenes, David (2002): Oersted Medal Lecture. Reforming the Mathematical Language of Physics. In: American Journal of Physics, No. 2, Vol. 71, S. 104-121.
- [29] Gellai, Barbara (2010): The Intrinsic Nature of Things. The Life and Science of Cornelius Lanczos. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island.
- [30] Horn, Martin Erik (2014): Ein physikalisch motivierter Weg zur Konformen Geometrie. In: Roth, Jürgen; Ames, Judith (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2014. Tagungsband der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, Band 1, WTM-Verlag, Münster, S. 559-562.
- [31] Horn, Martin Erik; Hildenbrand, Dietmar (2014): Fünfdimensionales Licht als Beschreibungsmuster unserer dreidimensionalen Welt. Zur Veröffentlichung vorgesehen in: In: Grötzebauch, Helmuth; Nordmeier, Volkhard (Hrsg.): PhyDid B – Didaktik der Physik, Beiträge zur DPG-Frühjahrstagung des Fachverbands Didaktik der Physik in Frankfurt.
- [32] Hestenes, David (1971): Vectors, Spinors, and Complex Numbers in Classical and Quantum Physics. In: American Journal of Physics, No. 9, Vol. 39, S. 1013-1027.
- [33] Graßmann, Hermann (1877): Der Ort der Hamilton'schen Quaternionen in der Ausdehnungslehre. In: Mathematische Annalen, Vol. 12, S. 375-386.
- [34] Moses, Harry Elecks (1958): The Solution of Maxwell's Equations in Terms of a Spinor Notation. Part I: The Initial Value Problem in Terms of Field Strengths and the Inverse Problem. New York University, Institute of Mathematical Sciences, Division of Electromagnetic Research, Research Report No. EM-114, New York.
- [35] Atiyah, Michael F. (1998): The Dirac Equation and Geometry. In: Goddard, Peter (Hrsg.): Paul Dirac. The Man and His Work. Kap. 4, Cambridge University Press, Cambridge, S. 108-124.
- [36] Dyson, Freeman J. (1972): Missed Opportunities. Josiah Willard Gibbs Lecture, given at Jan. 17, 1972. In: Bulletin of the American Mathematical Society, No. 5, Vol. 78, S. 635-652.