

Theoretisches Modell und Videoanalyse einer Bananenflanke

Daniel Laumann

Institut für Didaktik der Physik
Westfälische Wilhelms-Universität
Wilhelm-Klemm-Str. 10
48149 Münster

daniel.laumann@uni-muenster.de

Kurzfassung

Die Bananenflanke stellt eine spezielle Schusstechnik beim Fußball dar, bei der die Schussbahn des Balles auf Grund seiner Eigenrotation gekrümmt ist. Der Flug einer solchen Bananenflanke lässt sich in der Theorie qualitativ über die zentralen wirkenden Kräfte beschreiben. In Abhängigkeit von bestimmten Parametern, den Eigenschaften eines Fußballs und Eigenschaften eines bestimmten Schusses, wird darüber hinaus die Position des Fußballs zu jeder Zeit mit Hilfe einer analytischen Berechnung angegeben. Um dieses theoretische Ergebnis mit einer realen Bananenflanke vergleichen zu können, wird abschließend ein neuartiges Verfahren einer Videoanalyse mit zwei Kameras entwickelt. Die Anwendung des Verfahrens wird dabei so gestaltet, dass die technischen Erfordernisse und theoretischen Kenntnisse die Anwendung in der Schule explizit ermöglichen.

1. Einleitung

Weltweit begeistern sich Millionen Menschen für Fußball. Auch die zahlreichen physikalischen Phänomene des Fußballspiels wurden bereits in unterschiedlichen Veröffentlichungen behandelt [1, 2, 3]. Die Möglichkeit die Verbindung aus Fußball und Physik auch für die Schule zu nutzen soll in diesem Artikel durch das besonders interessante Phänomen der Bananenflanke dargestellt werden. Der Begriff „Bananenflanke“ beschreibt einen sowohl in vertikaler als auch in horizontaler Ebene gekrümmten Schuss. Die Ursache für diese typische Bahnkurve findet sich in der Eigenrotation des Fußballs. Der Spieler bewirkt diese Rotation, indem er beim Schuss mit der Innenseite des Fußes am Ball entlang „streicht“. Durch die Eigenrotation des geschossenen Balls entsteht der Magnuseffekt, die dem Schuss die typische gekrümmte Bahnkurve verleiht.

Beim Fußball findet man in der Bananenflanke die Antwort auf die Frage, warum eine Flanke trotz scheinbar falscher Abschussrichtung doch den Kopf des Stürmers erreicht. Weiterhin erklärt der Magnuseffekt, dass Freistößschützen den Fußball durch „Anschneiden“ um die Mauer herum drehen können. Als Erfinder der Schusstechnik gilt der brasilianische Fußballer Didi, der erstmals bei den Fußballweltmeisterschaften 1958 (Schweden) und 1962 (Chile) mit seinen Freistößen Aufsehen erregte. Zu dieser Zeit wurden die gekrümmten Schüsse noch als „folha seca“ (portugiesisch: fallendes Blatt) bezeichnet [1, S. 94]. In Deutschland wurde die Bananenflanke in den 1970er und 1980er Jahren durch Manfred Kaltz berühmt.

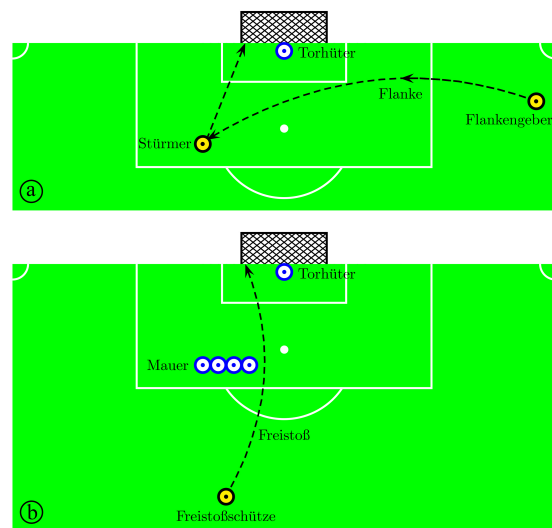


Abb.1: Schematische Skizze der Nutzung des Magnuseffekts bei einer Flanke (a) und einem Freistoß (b)

Die Bananenflanke als Teil des Fußballsports stellt somit einen spannenden und lebensnahen Kontext zur Erklärung des Magnuseffekts dar. Die Erklärung und Beschreibung des Effekts kann sowohl durch eine qualitative physikalische Betrachtung, eine quantitative Berechnung oder mittels Videoanalyse einer realen Bananenflanke erfolgen. Die theoretische Berechnung der Bananenflanke und die Videoanalyse eines realen Schusses mit zwei Kameras

können abschließend verglichen werden, um Rückschlüsse auf Mängel und Unsicherheiten der Modelle ziehen zu können.

2. Qualitative Beschreibung

Für eine qualitative Beschreibung der Flugbahn werden in unterschiedlichen Publikationen die zentralen, wirkenden Kräfte betrachtet [2, 3]. Die Bewegung des Balls wird durch zunächst durch die Schusskraft verursacht:

$$\vec{F}_S = m \cdot \vec{a} \quad \{1\}$$

Mit Blick auf die Möglichkeiten der nachfolgenden Analyse einer realen Bananenflanke soll davon ausgegangen werden, dass auf den Ball in der Luft die Gravitationskraft, die Luftwiderstandskraft und die Magnuskraft einwirken. Insbesondere der Einfluss des Windes wird in der Betrachtung nicht berücksichtigt.

Durch die Schusskraft wird Energie vom Schussbein des Spielers auf den Ball übertragen, so dass dieser gemäß der Newtonschen Axiome beschleunigt wird. Durch die Gravitationskraft wirkt auf den Ball zusätzlich eine konstante negative Beschleunigung in vertikaler Richtung:

$$\vec{F}_G = -m \cdot \vec{g} \quad \{2\}$$

Durch diesen Einfluss entsteht analog zum schiefen Wurf eine parabelförmige Flugbahn.

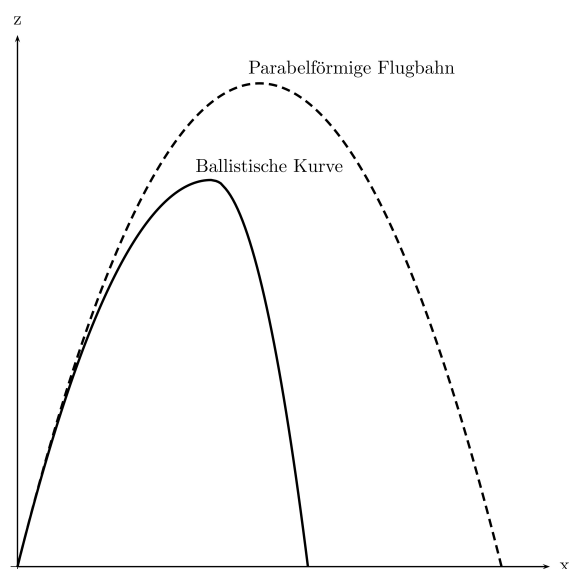


Abb.2: Schematische Darstellung von parabelförmiger Flugbahn ohne Luftwiderstand und ballistischer Kurve mit Luftwiderstand

Weiterhin ist jedoch auch die Luftwiderstandskraft zu berücksichtigen, welche durch Reibung zwischen dem Ball und der ihn umgebenden Luft entsteht. Der Luftwiderstand bewirkt die Veränderung der

Flugbahn von einer idealen, parabelförmigen Form zu einer ballistischen Bahnkurve (vgl. Abb.2).

Um die Existenz dieses Luftwiderstands erklären zu können, ist es notwendig die wenige Millimeter starke Grenzschicht um den Fußball zu betrachten (vgl. Abb.3). Näherungsweise kann angenommen werden, dass nur innerhalb dieser wenige Millimeter dünnen Grenzschicht Reibungskräfte zwischen Ball und Luft existieren. Als zusätzliche Eigenschaft ist bekannt, dass die Dicke der Grenzschicht vom Geschwindigkeitsunterschied zwischen Ball und Luft abhängt.

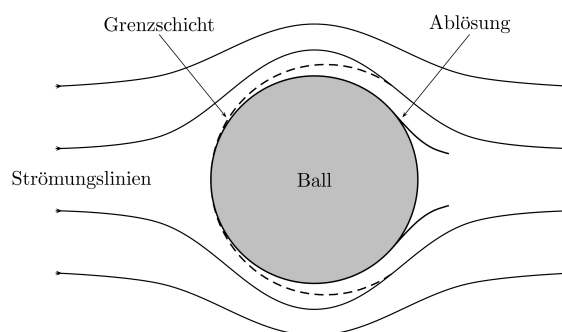


Abb.3: Darstellung der Grenzschicht und ihrer Ablösung (nach [3, S. 58])

Weiterhin soll im Folgenden folgende Situation betrachtet werden: Die Luft strömt und der Ball befindet sich in Ruhe. Diese Situation ist physikalisch analog zur Realsituation, weist jedoch vereinfachte Beschreibungen und Erklärungen auf.

Nach dem Gesetz von Bernoulli ist bekannt, dass in etwa in der Mitte des Balles der Luftdruck im Bereich der Grenzschicht ansteigt. Der erhöhte Luftdruck bewirkt eine verringerte Strömungsgeschwindigkeit und damit eine Verbreiterung der Grenzschicht. Dieser Effekt wird durch die Viskosität der Luft noch verstärkt. Diese Verbreiterung führt auf der strömungsabgewandten Seite zu einer Ablösung der Grenzschicht (vgl. Abb.3).

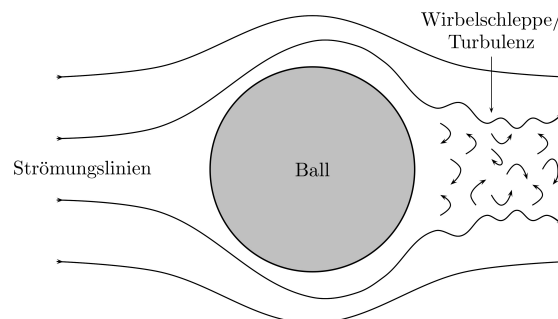


Abb.4: Wirbelbildung bei turbulenter Strömung und Entstehung der Wirbelschlepe hinter dem Ball (nach [3, S. 61])

Durch den größeren bzw. sich auflösenden Schichtbereich auf der strömungsabgewandten Seite wirken Reibungskräfte dort stärker. Die asymmetrische Verteilung dieser Kräfte führt gemäß Abbildung 4 zu einer Art „Wirbelschlepe“. Die für die Wirbelbildung notwendige Energie wird in der Realsituation dem Ball entzogen, wodurch dieser abgebremst wird.

Die Ablösung der Grenzschicht und Ausbildung der Wirbelschlepe erfolgt in Abhängigkeit von der Relativgeschwindigkeit zwischen Ball und Luft. Die Luftwiderstandskraft bei solchen turbulenten Strömungen lässt sich i. d. R. über die Newtonsche Reibung beschreiben:

$$\vec{F}_{LW} = -1/2 \cdot \rho \cdot c_w \cdot A \cdot \vec{v}^2 \quad \{3\}$$

In Abbildung 5 findet sich eine Darstellung der Abhängigkeit des Luftwiderstands von der Strömungsgeschwindigkeit. Betrachtet man zunächst eine glatte Kugel, so zeigt sich, dass der Luftwiderstand bei geringen und mittleren Strömungsgeschwindigkeiten mit der Geschwindigkeit ansteigt. Bei einer kritischen Geschwindigkeit ($v_{krit,1} \approx 75 - 85 \text{ km/h}$) kommt es jedoch zu einem raschen Abfall und anschließend bei weiter steigender Geschwindigkeit zu einem geringeren Anstieg der Luftwiderstandskraft. Die Kugel würde bei Ballgeschwindigkeiten in diesem Bereich somit beim Flug „flattern“ und wäre für den Fußballspieler unberechenbar. Dieses Verhalten ist aus dem Alltag von Plastikbällen bekannt, die auf Grund ihrer glatten Oberfläche und zusätzlich geringen Masse nur bei sehr geringen Geschwindigkeiten kontrolliert geschossen werden können.

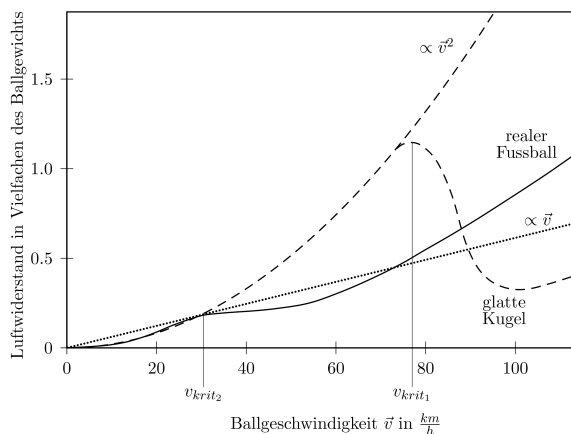


Abb.5: Analyse verschiedener Luftwiderstandskräfte in Abhängigkeit von der Ballgeschwindigkeit und Darstellung der kritischen Geschwindigkeit (nach [4])

Der Fußball unterscheidet sich jedoch strukturell, da seine Oberfläche mit Nähten versehen ist. Diese Nähte bewirken, dass die kritische Geschwindigkeit

eines Fußballs bei deutlich geringer ist ($v_{krit,2} \approx 25 - 35 \text{ km/h}$). Zudem ist der Abfall des Luftwiderstands deutlich geringer und ermöglicht somit eine vorhersehbare Flugbahn. Wie jedoch in Abbildung 5 zu sehen ist lässt sich die Abhängigkeit der Luftwiderstandskraft von der Ballgeschwindigkeit im mittleren Geschwindigkeitsbereich durch eine lineare Abhängigkeit nähern (Stokessche Reibung):

$$\vec{F}_{LW} = -6 \cdot \pi \cdot \eta \cdot r \cdot v = -\beta \cdot \vec{v} \quad \{4\}$$

Für den Reibungskoeffizient ergibt sich der experimentell bestimmte Wert $\beta = 0,142 \text{ kg/s}$.

Insbesondere für Geschwindigkeiten zwischen 65 und 90 km/h kann dieser lineare Ansatz als passende Näherung des Luftwiderstands angesehen werden. Dieser Bereich entspricht der zu erwartenden Geschwindigkeit einer Bananenflanke.

Für die spezifische gekrümmte Bahnkurve der Bananenflanke ist jedoch eine weitere Kraft notwendig, die erstmalig durch Sir Isaac Newton im 17. Jahrhundert erwähnt und im Jahr 1742 durch Gustav Magnus näher beschrieben wurde: die Magnuskraft [1, S. 101].

Der Fußballer erzeugt den Magnuseffekt, indem er den Ball nicht exakt mittig, sondern in einem gewissen seitlichen Abstand dazu trifft, wodurch der Ball sowohl einen linearen Impuls als auch eine Eigenrotation erhält. Der Einfluss des Luftwiderstandes auf diese Eigenrotation ist gering und soll im Folgenden vernachlässigt werden.

Zur Erklärung des Magnuseffekts wird häufig das Gesetz von Bernoulli verwendet (vgl. Abb.6). Es wird angenommen, dass der Ball im Bereich der Grenzschicht durch seine Rotation Luft mitführt, die somit einen Wirbel um den Ball erzeugt. Analog zur Tragfläche eines Flugzeugs resultieren somit Geschwindigkeits- und Druckdifferenzen auf beiden Seiten des Fußballs. Dieser bewegt sich somit seitlich in Richtung des niedrigen Drucks.

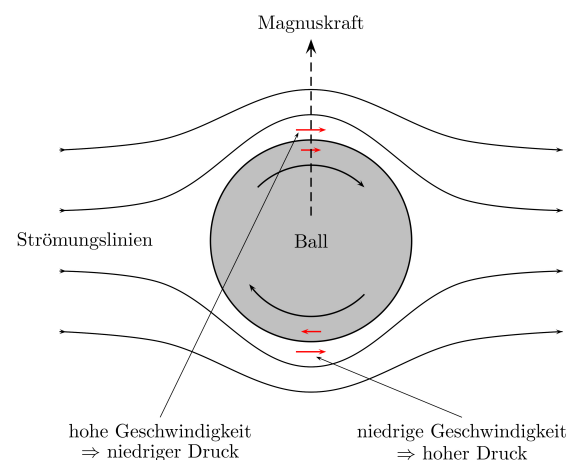


Abb.6: Erklärung der Magnuskraft durch das Gesetz von Bernoulli

Ein anderes Erklärungsmodell für den Magnuseffekt sieht die Ursache für die seitlich wirkende Kraft in einer asymmetrischen Ablösung der Grenzschicht. Diese löst sich auf Grund der Eigenrotation des Balls nicht symmetrisch zur ursprünglichen Bewegungsrichtung auf der strömungsabgewandten Seite, sondern unter einem gewissen Winkel. Gemäß Bernoulli existieren unterschiedliche Relativgeschwindigkeiten an den Seiten des Fußballs. Auf der Seite der geringeren Relativgeschwindigkeit lösen sich Wirbel somit später ab und die Wirbelschlepe wird gemäß Abbildung 7 verschoben.

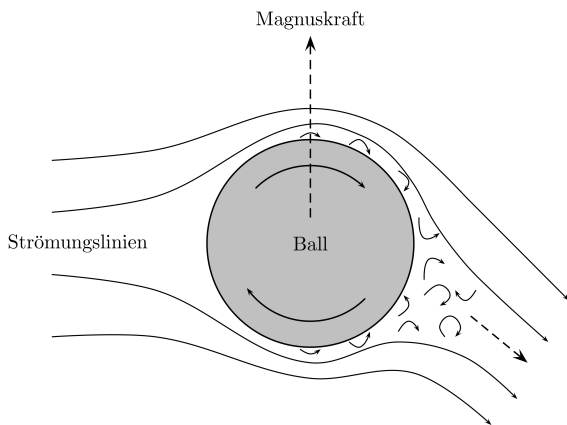


Abb.7: Erklärung der Magnuskraft mittels schräger Ausbildung der Wirbelschlepe (nach [3, S.193])

Ähnlich zum Luftwiderstand wirkt durch die Wirbelschlepe eine Kraft auf den Ball, die in diesem Fall jedoch seitlich gerichtet ist. Nach [5] lässt sich diese Kraft analog einer Auftriebskraft beschreiben:

$$\vec{F}_M = -1/2 \cdot \rho \cdot c_A \cdot A \cdot \vec{v}^2 \quad \{5\}$$

Die Größe c_A bezeichnet in diesem Fall den Auftriebsbeiwert. In Abhängigkeit vom Ballradius r , der Winkelgeschwindigkeit ω der Rotation, der Geschwindigkeit v und einer Proportionalitätskonstante c_s gilt:

$$c_A = \omega \cdot r \cdot c_s / v \quad \{6\}$$

Unter Berücksichtigung der Oberflächenparameter des Balles gilt somit in vektorieller Darstellung:

$$\vec{F}_M = \gamma \cdot \vec{\omega} \cdot \vec{v} \quad \text{mit} \quad \gamma = 1/2 \cdot c_s \cdot \rho \cdot \pi \cdot r^3 \quad \{7\}$$

Ein Vergleich mit [3] ergibt, dass für einen Fußball ein Wert für c_s zwischen 1/4 und 1 angenommen werden kann. Für die nachfolgende Modellierung wird somit der Mittelwert 5/8 verwendet.

3. Quantitative Berechnung der Bahnkurve

Die quantitative Berechnung berücksichtigt ausschließlich die in Abschnitt 2 beschriebenen Kräfte und ihren in Abbildung 8 dargestellten Zusammenhänge als Bewegungsgleichung. Schon an dieser Stelle sollte erwähnt werden, dass die analytische Beziehung der Bahnkurve somit eine Idealisierung darstellt. Einige wichtige Parameter einer realen Bananenflanke können in diesem Modell nicht berücksichtigt werden (Elastizität des Balles, Einfluss des Windes, etc.).

Aus der Bewegungsgleichung ergibt sich ein lineares Gleichungssystem aus drei inhomogenen, linearen Differentialgleichungen 2. Ordnung:

$$\begin{aligned} m\dot{v}_x &= -\beta v_x - \gamma \omega v_y \\ m\dot{v}_y &= -\beta v_y + \gamma \omega v_x \\ m\dot{v}_z &= -mg - \beta v_z \end{aligned} \quad \{8\}$$

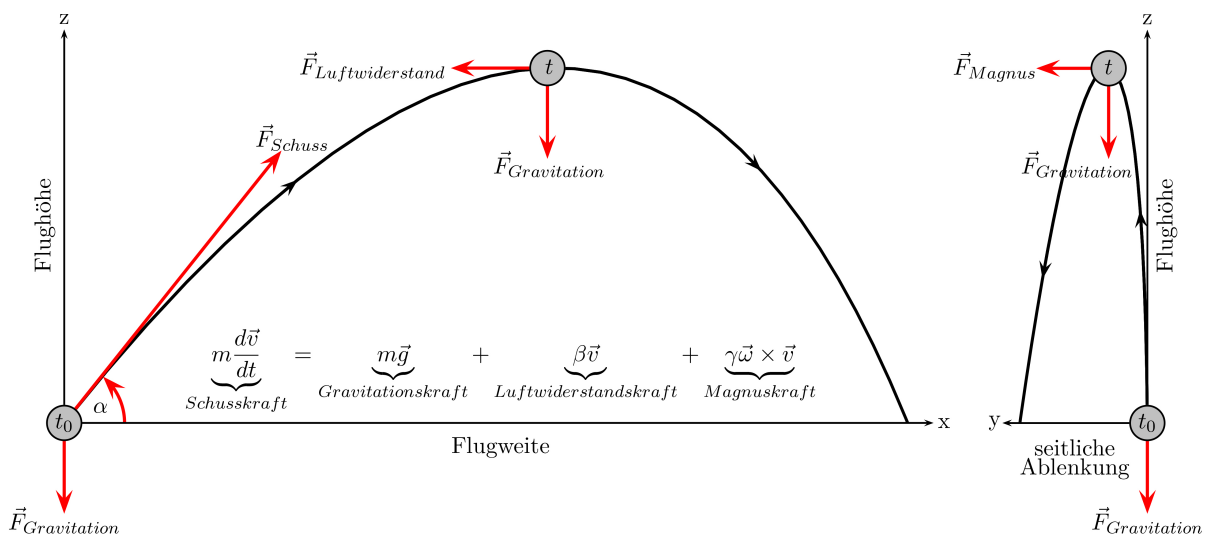


Abb.8: Darstellung der Richtung der verschiedenen Kräfte in der x-z- und y-z-Ebene

Für die Anfangsbedingung dieses Systems zum Zeitpunkt $t=0$ ist die Ruhelage des Balls zu berücksichtigen:

$$\vec{v}(t=0) = \begin{pmatrix} v_0 \cos(\alpha) \\ 0 \\ v_0 \sin(\alpha) \end{pmatrix} \quad \{9\}$$

, wobei v_0 die Anfangsgeschwindigkeit und α den Abschusswinkel beschreibt. Für das Ergebnis der Geschwindigkeitskomponenten siehe Appendix.

Um jedoch die tatsächliche Bahnkurve der Bananenflanke zu erhalten, müssen die Geschwindigkeitskomponenten noch unter der Berücksichtigung der Anfangsposition des Balles im Punkt $(0,0,0)$ integriert werden. Auch das Ergebnis für die Ortskoordinaten der Bahnkurve findet sich im Appendix.

4. Videoanalyse einer realen Bananenflanke mit zwei Kameras

Zum Vergleich mit der theoretischen Berechnung soll eine reale Bananenflanke mit Hilfe zweier Videokameras untersucht werden. Zu diesem Zweck wurde ein Versuchsaufbau gemäß Abbildung 9 gewählt. Die Markierungen auf dem Feld bilden zwei parallele Linien mit einem Abstand von 5m und haben einen seitlichen Abstand von 1m zueinander. Sie ermöglichen in der digitalen Auswertung die Korrektur des räumlich verzerrten Koordinatensystems.

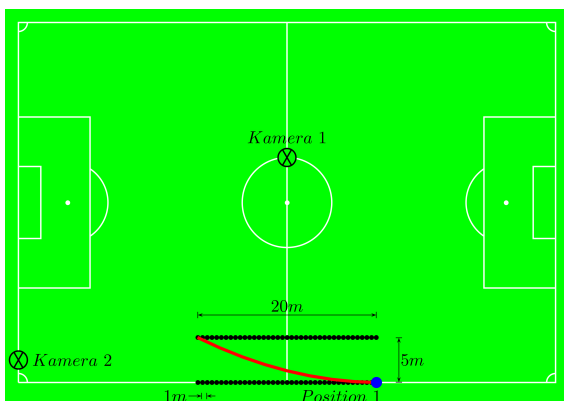


Abb.9: Schematische Skizze zum Versuchsaufbau zur Videoanalyse einer Bananenflanke mit zwei Kameras

Aus den Daten der Videoanalyse müssen für den Vergleich mit der theoretischen Bahnkurve die Anfangsgeschwindigkeit, der Abschusswinkel sowie die Winkelgeschwindigkeit bestimmt werden. Vor allem die Bestimmung der letzten Größe erfordert dabei experimentelles Geschick. Um die Winkelgeschwindigkeit des Balles zu bestimmen

wurde dieser zunächst mit farblichen Markierungen versehen. Über diese Markierungen lässt sich in den Einzelbildern während des Flugs die Anzahl der Drehungen bestimmen. Da die Auflösung der Videos jedoch zu gering ist, um diesen Wert bestimmen zu können, wurde neben Kamera zwei eine zusätzliche digitale Spiegelreflexkamera positioniert, deren Bilder eine deutlich größere Auflösung aufweisen.

Auf Grund fehlender Literatur zu einer Videoanalyse mit Hilfe zweier Kameras ohne automatisches Tracking durch eine Software, wurde das gesamte Versuchsprinzip und das Auswertungsverfahren selbstständig entwickelt.

Bei der Durchführung des Versuchs wird der Ball von einem Fußballer jeweils aus Position 1 geschossen. Für den Schützen ist es dabei wichtig, den Ball entlang der unteren Markierungslinie abzuschließen, damit sich die seitliche Auslenkung allein durch die Eigenrotation des Balles und somit durch den Magnuseffekt ergibt.

4.1. Videoanalyse einer realen Bananenflanke mit zwei Kameras

Um die Auswertung der Videoanalyse durchführen zu können, wird der Ball zunächst an elf unterschiedlichen Testpositionen aufgezeichnet. Über diese Positionen ist es bei in der Testmessung bekannten Koordinaten des Balles möglich die Korrektur der räumlichen Verzerrung durchzuführen. Die Korrektur kann prinzipiell auch über geometrische Überlegungen und theoretische Kalkulationen erfolgen, jedoch erscheint eine Testmessung zur Kalibrierung an dieser Stellung deutlich einfacher.

4.2. Allgemeines Auswertungsprinzip der Videoanalyse

Die Auswertung der Videoanalyse erfolgt im Anschluss an die Testmessung mit Hilfe der Einzelbilder der Videoanalyse. Diese werden ausgelesen und im Anschluss ausgewertet. Die folgenden Messungen beziehen sich stets auf digitale Messungen von Positionen und Längen innerhalb dieser Bilder.

Die Auswertung erfolgt in 4 aufeinander aufbauenden Schritten:

- 1) Messung des Balldurchmessers im Bild (Kamera 2, Abb.10)
- 2) Bestimmung der realen x-Koordinate
- 3) Messung der relativen Position im Bild mit Bezug auf die zugehörige Verbindungslinie (Kamera 2, Abb.10)
- 4) Bestimmung der realen y-Koordinate
- 5) Messung der Ballhöhe im Bild (Kamera 1, Abb.11)
- 6) Bestimmung der realen z-Koordinate

In Abbildung 10 lässt sich deutlich erkennen, dass der Balldurchmesser d mit der x -Koordinate, d.h. der Flugweite, korreliert ist. Für den Zusammenhang $x(d)$ wurde mit Hilfe der Testmessung eine Näherungsfunktion aufgestellt. Misst man nun bei der realen Durchführung den Balldurchmesser in jedem Einzelbild, lässt sich dadurch die x -Position des Balles berechnen.



Abb.10: Serienbildaufnahme der Bananenflanke analog zu Kamera 2 durch eine zusätzlich verwendete digitale Spiegelreflexkamera (Bearbeitung mit Adobe Photoshop)

Wie ebenfalls aus Abbildung 10 ersichtlich wird, nimmt die reale Breite zwischen den beiden Markierungslinien mit zunehmender Schussweite ebenfalls zu. An dieser Stelle muss zunächst der Zusammenhang $b(x)$ aufgestellt werden, der den Abstand zwischen den Markierungslinien bei bekannter x -Position angibt. Dieser ergibt sich jedoch aus sehr einfachen geometrischen Überlegungen. Wählt man anschließend bei bekannter x -Position die zugehörige Verbindungslinie im Bild aus und bestimmt die relative Position des Balles, ergibt sich die absolute y -Koordinate.

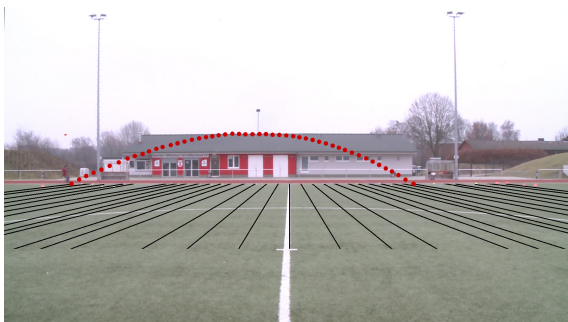


Abb.11: Serienbildaufnahme der Bananenflanke durch Kamera 1

Zum Abschluss der Videoanalyse erfolgt die Bestimmung der Flughöhe (z -Koordinate). Da an dieser Stelle die Koordinaten x und y bereits bekannt sind, ist es möglich aus den Bildern der Kamera 1 (vgl. Abb.11) wiederum die zugehörige

Koordinatenlinie zu bestimmen (x -Koordinate) und den vertikalen Abstand h des Balles zu dieser Linien im Bild zu messen. Aus einer durch die Testmessungen, d. h. die Kalibrierung, bekannten Beziehung $z(h)$ lässt sich somit die z -Koordinate berechnen.

5. Vergleich des theoretischen Modells mit dem Ergebnis der Videoanalyse

Zunächst ist es notwendig aus der Videoanalyse der realen Bananenflanke die für die theoretische Berechnung notwendigen Parameter zu bestimmen, um einen Vergleich zu ermöglichen.

Die Videoanalyse ergibt aus einer Interpolation der Bahnkurve für $t \rightarrow 0$ eine Anfangsgeschwindigkeit von ca. 19 km/h bei einem Abschusswinkel von etwa 30° . Für die gesamte Flugzeit von 1,96 s ergeben sich zudem 13 Umdrehungen des Fußballs, wodurch die Winkelgeschwindigkeit berechnet werden kann.

Insgesamt werden für die theoretische Berechnung die Werte gemäß Tab.1 mit den zugehörigen Messunsicherheiten verwendet.

Größe	Einheit	Wert	Messunsicherheit
Masse m	kg	0,4400	$\pm 0,002$
Reibungsfaktor β	kg/s	0,142	-
Anfangsgeschwindigkeit v_0	m/s	19,384	$\pm 0,004$
Abschusswinkel α	$^\circ$	29,998	$\pm 0,006$
Umdrehungen n	1	13	± 1
Gesamtzeit T	S	1,96	-
Luftdichte ρ bei 0°C [6, S. 398]	kg/m ³	1,2929	-
Ballumfang U	m	0,690	$\pm 0,003$
Auftriebsbeiwert c_s	1	5/8	-
Ortsfaktor g [6, S. 393]	m/s ²	9,80665	-

Tab.1: Notwendige Messgrößen und Naturkonstanten zur Berechnung der Bahnkurve unter Angabe der entsprechenden Messunsicherheiten

Ein Vergleich der theoretischen und experimentell bestimmten Videoanalyse ist in Abbildung 12 dargestellt. Wie zu sehen ist, entsprechen beide Kurven der erwarteten Form einer Bananenflanke. Eine absolute Übereinstimmung kann jedoch auch im Bereich der abgeschätzten Messunsicherheiten nicht erreicht werden.

Der Grund dafür liegt insbesondere in quantitativ schwer abschätzbaren Einflüssen und Unsicherheiten.

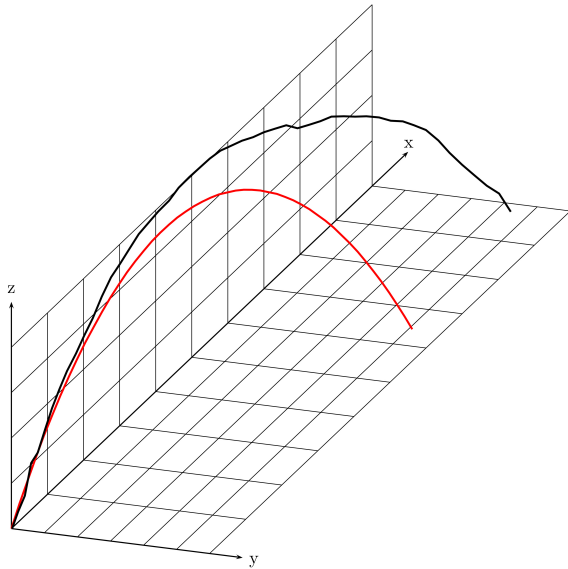


Abb.12: Darstellung der Bahnkurve der Bananenflanke im Vergleich der quantitativen Ergebnisse (schwarz = Videoanalyse, rot = analytische Berechnung)

6. Fazit und Ausblick

Für das theoretische Modell lässt sich feststellen, dass der Verlauf der Bahnkurve stark von den Anfangsparametern (Winkelgeschwindigkeit, Anfangsgeschwindigkeit, Abschusswinkel) abhängt. Unsicherheiten in der Berechnung dieser Größen wirken sich somit bedeutsam in der Form der Bahnkurve aus. Da die Anfangsgeschwindigkeit ein zentraler Faktor für die Schussweite ist und die beiden Bahnkurven vor allem im Bezug auf die x-Koordinate abweichen, kann hier eine größere Messunsicherheit vermutet werden.

Dazu wurden für die theoretische Berechnung Annahmen gemacht, um die Modellierung zu vereinfachen. So wurde der Wind ebenso vernachlässigt wie die Deformation des Balls beim Abschuss. Auch die Annahme konstanter Reibungsfaktoren bei Luftwiderstand und Magnuskraft kann nur als Näherung angesehen werden. Ebenfalls könnte die angenommene lineare Abhängigkeit des Luftwiderstands von der Geschwindigkeit zu weit von der Realität abweichen.

Seitens der Videoanalyse kann festgestellt werden, dass die Messunsicherheiten sich vor allem auf Grund teilweise „verwischter“ Einzelbilder ergeben (vgl. Abb.13 und Abb.14). Dieser technische Mangel bewirkt eine große Unsicherheit in der Messung der Position und des Balldurchmessers im Bild. Dazu muss berücksichtigt werden, dass Kamera 1 die Bananenflanke von der Seite

betrachtet. Die Auswertung erfolgt somit nicht exakt in der Ebene der eigentlichen Schussbewegung, die leicht schräg zur Kamera verläuft und eine zusätzliche Krümmung beinhaltet.

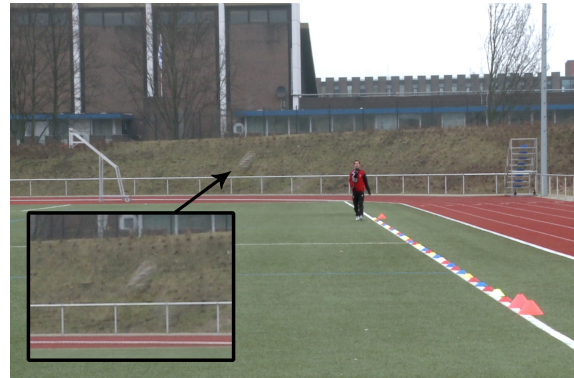


Abb.13: Einzelner Videoframe von Kamera 2 mit hoher Unschärfe des Balles auf Grund der positionsbedingt hohen Relativgeschwindigkeit zur Kamera

Insgesamt zeigt sich, dass es prinzipiell möglich ist, den Flug einer Bananenflanke unter idealisierten Bedingungen zu modellieren. Der Mangel an Literatur hat jedoch dazu geführt, dass für die Videoanalyse mit zwei Kameras ein vollständig neues System entwickelt werden musste. Insgesamt müssen jedoch bei beiden Verfahren erhebliche Messunsicherheiten berücksichtigt werden, die die Abweichung der Bahnkurven begründen und zudem quantitativ schwer abgeschätzt werden konnten (Wind, etc.). Insbesondere ein verbessertes Videosystem mit weniger Unschärfe, d. h. kürzeren Verschlusszeiten, würde die Auswertung erheblich vereinfachen.

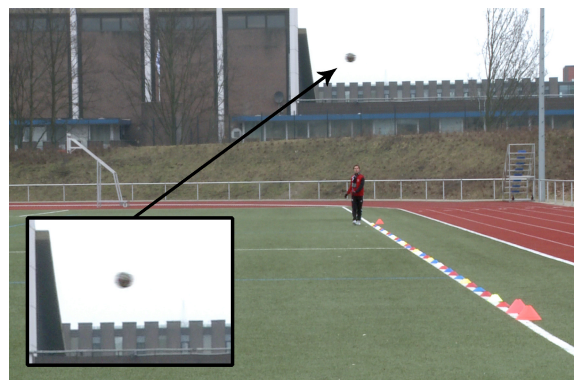


Abb.14: Einzelner Videoframe von Kamera 2 mit geringer Unschärfe des Balles auf Grund der positionsbedingt niedrigen Relativgeschwindigkeit zur Kamera

Das neuartige Videoanalyzesystem weist jedoch den deutlichen Vorteil auf, dass es mit einfachen technischen Mitteln realisiert werden kann. Die

Auswertung der Einzelbilder erfolgt ebenfalls nach simplen mathematischen Methoden, sodass das Verfahren für jeden Anwender nachvollziehbar bleibt.

7. Literatur

- [1] K. Bray: *Wie man richtig Tore schießt*. München & Zürich: Pendo, 2006.
- [2] M. Tolan: *So werden wir Weltmeister – Die Physik des Fußballspiels*. München & Zürich: Piper, 2010.
- [3] J. Wesson: *Fußball: Wissenschaft mit Kick – Von der Physik fliegender Bälle und der Statistik des Spielausgangs*. München: Elsevier, 2006.
- [4] M. Tolan: *Die „Coca-Cola-Formel“ eines Fußballs*. <http://www.weltderphysik.de/gebiet/leben/fussball/coca-cola-formel>, Stand: 4/2014.
- [5] W. Demtröder: *Experimentalphysik 1 – Mechanik und Wärme*. Berlin & Heidelberg: Springer, 2006.
- [6] W. Walcher: *Praktikum der Physik*. Wiesbaden: Teubner, 2006.

8. Appendix

Die zeitabhängigen Geschwindigkeitskomponenten ergeben sich aus der analytischen Berechnung als:

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_0 \cos(\alpha) \cdot \cos\left(\frac{\gamma\omega}{m}t\right) \cdot e^{-\frac{\beta}{m}t} \\ v_0 \cos(\alpha) \cdot \sin\left(\frac{\gamma\omega}{m}t\right) \cdot e^{-\frac{\beta}{m}t} \\ v_0 \sin(\alpha) \cdot e^{-\frac{\beta}{m}t} - \frac{mg}{\beta} \left(1 - e^{-\frac{\beta}{m}t}\right) \end{pmatrix}$$

Aus diesem Ergebnis lassen sich wie in Abschnitt 3 beschrieben die Ortskoordinaten der Bahnkurve in allen drei Raumrichtungen bestimmen. Hier ergibt sich der Zusammenhang:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \frac{m}{\gamma^2\omega^2 + \beta^2} \cdot v_0 \cos(\alpha) \cdot \left(\beta + \left(\gamma\omega \sin\left(\frac{\gamma\omega}{m}t\right) - \beta \cos\left(\frac{\gamma\omega}{m}t\right) \right) \cdot e^{-\frac{\beta}{m}t} \right) \\ \frac{m}{\gamma^2\omega^2 + \beta^2} \cdot v_0 \cos(\alpha) \cdot \left(\gamma\omega - \left(\beta \sin\left(\frac{\gamma\omega}{m}t\right) + \gamma\omega \cos\left(\frac{\gamma\omega}{m}t\right) \right) \cdot e^{-\frac{\beta}{m}t} \right) \\ -\frac{m}{\beta} \cdot \left(gt + \left(v_0 \sin(\alpha) + \frac{mg}{\beta} \right) \cdot \left(e^{-\frac{\beta}{m}t} - 1 \right) \right) \end{pmatrix}$$