Didaktische Konzeption eines Lehrbuches zur Geometrischen Algebra

Martin Erik Horn

bbw Hochschule des Bildungswerks der Wirtschaft Berlin-Brandenburg
mail@grassmann-algebra.de, mail@martinerikhorn.de

Kurzfassung

Mit Hilfe der Geometrischen Algebra können physikalische Sachverhalte strukturell übersichtlich und konzeptuell anschaulich dargestellt und verstanden werden. Dabei gelingt insbesondere die Verknüpfung algebraischer und geometrischer Sichtweisen in einer didaktisch überzeugenden Weise. Deshalb verstehen Naturwissenschaftler und Naturwissenschaftsdidaktiker wie David Hestenes, auf den die Formulierung der modernen Geometrischen Algebra zurückgeht, diese als universelle mathematische Sprache der Naturwissenschaften.

Aus diesem Grund sollte die Aufarbeitung der Geometrischen Algebra für den schulischen und hochschulischen Bereich ein vordringliches Ziel der Physik- und Mathematikdidaktiken sein. Zu diesem Zweck wird die didaktische Konzeption eines Lehrbuchansatzes vorgestellt, der eine variable Schwerpunktsetzung zulässt. Zum einen ist ein algebraischer Einstieg über die Pauli-Matrizen möglich. Zum anderen kann dieser Themenbereich unter Vernachlässigung von Matrizendarstellungen geometrisch erschlossen werden.

Die Umsetzung dieses Ansatzes in Form eines Lehrbuchs wird vorgestellt und diskutiert. Dieses Buch, das vorrangig für den Hochschulbereich konzipiert wurde, ist seit Kurzem unter www.bookboon.com/de erhältlich und kann dort kostenlos heruntergeladen werden.

1. Kurzer Rückblick auf die bisherige Rezeption der Geometrischen Algebra

In den letzten zehn Jahren habe ich mich in zahlreichen Beiträgen und Forschungsarbeiten mit der Geometrischen Algebra und deren didaktischer Ausgestaltung im Kontext der bundesdeutschen Physik- und Mathematikdidaktiklandschaft beschäftigt [1] – [33]. Es mag also Zeit für einen kurzen Rückblick auch auf die verhaltene Rezeption der Geometrischen Algebra durch meine Fachkolleginnen und Fachkollegen sein.

Einer der Gründe für die intensive Fixierung auf ein einzelnes Thema ist meine Überzeugung, hier auf eine mathematische Schatzkiste gestoßen zu sein.

Die Geometrische Algebra stellt meiner Überzeugung nach ein mathematisches Werkzeug dar, das die Modellierung komplexer Sachverhalte nicht nur in der Physik, sondern in allen Domänen, die im Kontext der Linearen Algebra zu beschreiben sind, konzeptuell stark vereinfacht und didaktisch außerordentlich erleichtert. Die Geometrische Algebra ist der Linearen Algebra, wie wir sie heute in Lehr- und Schulbüchern formuliert finden, haushoch überlegen.

Umso mehr erstaunt es mich, dass dieser Ansatz in der bundesdeutschen Physikdidaktik-Community bisher nur sehr zurückhaltend oder gar nicht diskutiert wird. Mit diesem Erstaunen bin ich nicht allein, denn diese Zurückhaltung ist kein bundesdeutsches Spezifikum. Zahlreiche Kolleginnen und Kollegen aller möglichen Fachrichtungen, die die Geometrische Algebra nutzen und weiterentwickeln, machten und machen auch heute noch ähnliche Erfahrungen: „I firmly believed at the time *(1967, M.H.)* that within 10 years geometric algebra would be a household name,“ schrieb Sobczyk [34, S. 1292] in einer Zwischenbilanz 1993 und stellt gleichzeitig fest: „Twenty-five years later I still find myself asking these same questions. (…) But geometric algebra is still a long way from being a household name.“ [34, S. 1291]. Nicht anders ist die Situation heute, weitere 20 Jahre später.

Eine der Gründe für diesen Befund mag in der Tatsache begründet liegen, dass kaum einführende Lehrbücher auf akademischem Anfängerniveau vorliegen, die einen einfachen Einstieg in die Geometrische Algebra erlauben. Standardbücher von Hestenes [35], Snygg [34] oder Lasenby und Doran aus Cambridge [35] setzen zwar „little more than a basic knowledge of linear algebra“ [35, S. x] und damit sehr wenig voraus. Sie setzen jedoch offenkundig so viel voraus, dass Lernanfänger nicht automatisch mit diesen Werken zurecht kommen.

Lehrbücher, die noch eine Niveaustufe unterhalb der erwähnten, gleichwohl exzellent geschriebenen Werke [35], [36] und [37] liegen, werden also benötigt. Hier besteht ein Nachholbedarf, der nur langsam aufgearbeitet wird – im englischen Sprachraum beispielsweise durch Vince, dessen Lehrbuch [38] auf tatsächliche Lernanfänger der Informatik und der Computergraphik ohne wesentliche mathematische Vorkenntnisse ausgerichtet ist. Im deutschen Sprachraum ist mir kein solches einführendes Lehrbuch der Geometrischen Algebra bekannt. Diese Lücke zu schließen scheint aus Sicht der Physikdidaktik also sinnvoll.

Steht man allerdings auf dem Standpunkt, dass der Geometrischen Algebra die Funktion einer universellen mathematischen Sprache in der Physik zukommen kann, wird die Sache noch eindeutiger und eindringlicher. Dann ist es nicht nur sinnvoll, ein solches Einstiegsprojekt zu verfolgen, sondern sogar unumgänglich.

Die Aufarbeitung der Geometrischen Algebra für den schulischen und hochschulischen Bereich sollte deshalb ein vordringliches Ziel der Physik- und Mathematikdidaktiken sein [39, Abschnitt VIII]. Mit anderen Worten beschreibt Parra Serra die Situation: „There is no reasonable nor solid argumentation for denying its inclusion in the high school curriculum“ [40, S. 820], um dann in leicht ironischer Form auf die Unwahrscheinlichkeit einer direkten Implementation durch die heute aktiven Schul- und Hochschullehrenden hinzuweisen: „Death of the representatives of the old paradigms and not scientific conversion is behind scientific changes. So the best way to face the challenge mentioned above is that our students receive enough ‘experience’ to continue by themselves the study of books or research articles where the new tools are applied“ [40, S. 829].

Da – wie oben erwähnt – die große Mehrheit der bundesdeutschen Physikdidaktik-Community die Geometrische Algebra offenkundig ignoriert, müssen wir interessierte Studierende und Lernanfänger durch Bücher zu erreichen suchen.

2. Konzeptionelle Ausrichtung eines einführenden Lehrbuchs zur Geometrischen Algebra

Die Geometrische Algebra kann in allen Disziplinen, die mit mathematischen Strukturbildungen umzugehen haben, eingesetzt werden. Deshalb umfasst die Zielgruppe nicht nur Lernende und Lehrende aus dem Bereich von Physik und Mathematik, sondern aller naturwissenschaftlicher und technischer Fächer. Gerade im Bereich der Informatik [41], [42] findet sich eine Vielzahl von bereits heute sehr erfolgreich umgesetzten Anwendungen zur Geometrischen Algebra.

Dies führt dazu, gänzlich unterschiedliche Fachkulturen zu berücksichtigen sind. Darüber hinaus spielen auch persönliche wie interpersonal unterschiedliche Lernkulturen auf großen und kleinen Skalen eine wesentliche Rolle. Eine der ersten Fragen, die im Rahmen der Konzeption eines Lehrbuchs zur Geometrischen Algebra zu diskutieren ist, betrifft den zu wählenden Zugang. Sollte der Einstieg über einen mehr algebraisch-abstrakten Zugang oder über einen eher geometrisch-anschaulichen Zugang erfolgen?

Schließlich besteht eine der wesentlichen didaktischen Stärken der Geometrischen Algebra darin, geometrischen und algebraischen Beschreibungen einen gemeinsamen Rahmen zu geben: Algebraische Zusammenhänge können direkt in geometrische Beziehungen übersetzt werden. Und umgekehrt können geometrische Beziehungen problemlos und eineindeutig in algebraischer Form dargestellt werden. Dieser Gleichklang zwischen Geometrie und Algebra fördert und erleichtert die Analyse komplexer Sachverhalte.

Beim Einstieg ist man aber noch nicht so weit, da die beiden sich ergänzenden Sichtweisen aus algebraischer und geometrischer Perspektive noch nicht zur Verfügung stehen. Es kann auch nicht eindeutig gesagt werden, welcher Zugang wirkungsmächtiger ist. Auf kleinen Skalen ist zwar anzunehmen, dass in unserer visuell geprägten Welt die meisten Lernanfänger individuell besser auf einen geometrisch-anschaulichen Zugang ansprechen. Aber das ist eine vage Vermutung, denn es gibt hier deutlich formulierte Ausnahmen. So berichtet Donald Knuth, dass er bei einer visuell-anschaulich geformten Wissensrepräsentation immer das Gefühl habe, etwas sei

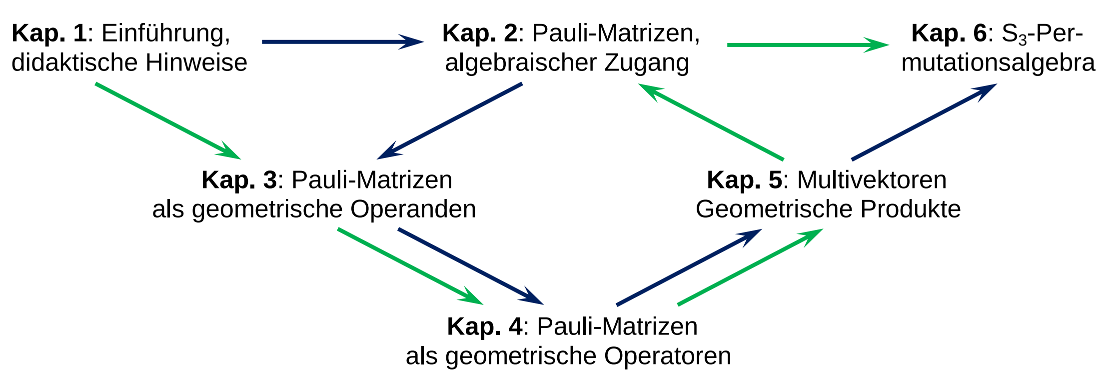


Abb.1: Alternative Lernwege zur Geometrischen Algebra:
Geometrische Orientierung (grüner Lernweg) und algebraische Orientierung (blauer Lernweg).

„strange about my head“ [43, S. 4] und er fühle sich dabei „like a dog standing on his hind legs“ [43, S. 5]. Und er fährt fort: „To me, the symbols are reality, in a way. I take a mathematical problem, I translate it into formulas, and then the formulas are the reality“ [43, S. 5]. Lernende, die diese individuelle Ausprägung aufweisen, kommen mit einem algebraisch-abstrakten Zugang mit Sicherheit besser zurecht als mit einem geometrisch-anschaulichen Zugang.

Die hohe Akzeptanz der Hypothese, dass ein geometrisch-anschaulicher Zugang Lernanfänger besser erreicht als ein algebraisch-abstrakter Zugang, mag in Europa und Nordamerika auch durch kulturelle Effekte auf großen Skalen motiviert sein. So berichtet Abdus Salam über ein Gespräch mit Dirac: „Once Dirac asked me if I thought algebraically or geometrically. I did not know what he meant, but after further questioning, Dirac said ‘Precisely as I thought. You think algebraically as most people in the Indian subcontinent do.’ Dirac, it appeared, thought geometrically“ [44, S. 116], [45, S. 269].

Der Hypothese Diracs zufolge sind wir hier in Europa und Nordamerika geometrisch-anschaulich geprägt, während im indisch-asiatischen Raum eine kulturelle Prägung algebraisch-abstrakter Art vorliegt.

Die Frage ist nun, ob dieser nordamerikanisch-europäischen Prägung beim Einstieg gefolgt werden sollte. Die dabei auftretenden Gefahren benennt Knuth in seinem Gespräch sehr deutlich: „A lot of very bright students today don’t see any need for algebra. (…) They’re so smart they don’t need algebra. They go on seeing lots of problems and they can just do them, without knowing how they do it, particularly. Then finally they get to a harder problem, where the only way to solve it is with algebra. But by that time, they haven’t learned the fundamental ideas of algebra. The fact that they were so smart prevented them from learning this important crutch (…). They do very well as biologists, doctors and lawyers“ [43, S. 6]. Durch eine zu starke geometrisch-anschauliche Fixierung verhindern wir, dass begabte Lernende aufgrund einer erfolgreichen Vermeidung algebraisch-abstrakter Formulierungen im Bereich der Physik eine Chance haben.

Dieses grundlegende Dilemma kann im Rahmen der Konzeption des Lehrbuches nicht gelöst werden. Es kann jedoch zumindest minimiert werden, indem ein multi-modaler Zugang mit beiden Zugangsalternativen ermöglicht wird: Die Leser des nun konzipierten Buches [27] können entweder einem algebraischen Zugang folgen, indem sie das Kapitel 2 mit einer algebraischen Schwerpunktsetzung entsprechend der Kapitelreihenfolge zu Beginn durcharbeiten (blauer Lernweg in Abb. 1).

Oder aber sie überspringen dieses Kapitel und folgen

Kap. 1 Einführung

Notwendige Vorkenntnisse
Didaktische Hinweise

Kap. 2 Pauli-Matrizen

Definition der Pauli-Matrizen
Algebraische Eigenschaften der Pauli-Matrizen
Zerlegung von (2 x 2)-Matrizen

Kap. 3 Pauli-Matrizen als geometrische Operanden

Unterscheidung zwischen Operanden und Operatoren
Basisvektoren und Vektoren
Basis-Bivektoren und orientierte Flächenstücke
Vektorlängen und Einheitsvektoren
Flächeninhalte und Einheits-Flächenstücke
Basis-Trivektoren und orientierte Volumina
Trivektoren als Pseudoskalare

Kap. 4 Pauli-Matrizen als geometrische Operatoren

Reflexionen an Vektoren
Reflexionen an Bivektoren
Rotationen
Rotoren und Reversion

Kap. 5 Multivektoren

Definition von Multivektoren und Paravektoren
Dimensionsoperatoren
Orientierte Parallelogramme
Inneres und äußeres Produkt
Anmerkungen zum geometrischen Produkt
Quaternionen

Kap. 6 S_3-Permutationsalgebra

Vertauschungen von drei Objekten
Die Permutationsmatrizen
Die räumliche Lage der (3 x 3)-Einheitsvektoren
Repräsentationen von Null
Negative Größen
Inneres und äußeres Produkt der S_3-Permutationsalgebra
Orientierte Flächenstücke und Konstruktion des Einheitsvektors e_4
Pauli-Algebra der (3 x 3)-Matrizen

Kap. 7 Musterlösungen der Übungsaufgaben

Anmerkungen

Literatur

Abb.2: Überblick über die inhaltliche Struktur des Buches zur Geometrischen Algebra [27].

einem geometrischen Zugang (grüner Lernweg in Abb. 1). Die Kapitel 3, 4 und 5 sind so konzipiert, dass sie auch ohne die in Kapitel 2 vorgestellten Kenntnisse erfolgreich bearbeitet werden können. Es ist jedoch sinnvoll, das übersprungene Kapitel 2 vor der etwas anspruchsvolleren Lektüre von Kapitel 6 zur S_3-Permutationsalgebra durchzuarbeiten. Für dieses letzte Kapitel werden die in Kapitel 2 diskutierten Kenntnisse zur Matrizendarstellung benötigt.

3. Inhaltliche Schwerpunkte der einzelnen Kapitel

Im algebraischen Einstiegskapitel 2 werden die Pauli-Matrizen definiert und wesentliche algebraische Eigenschaften diskutiert. Im Zentrum dieser Diskussion stehen die Vertauschungsrelationen

$$\begin{aligned} \sigma_x \sigma_y &= - \sigma_y \sigma_x \\ \sigma_y \sigma_z &= - \sigma_z \sigma_y \\ \sigma_z \sigma_x &= - \sigma_x \sigma_z \end{aligned} \qquad \{1\}$$

als der wesentliche algebraische Kern einer nicht-kommutativen Mathematik. Höhepunkt des Kapitels ist die auf Cartan [46, S. 43/44] zurückgehende Zerlegung eines Vektors R in eine Linearkombination von Pauli-Matrizen:

$$R = \begin{pmatrix} z & x - iy \\ x + iy & -z \end{pmatrix} = x\,\sigma_x + y\,\sigma_y + z\,\sigma_z \qquad \{2\}$$

Dies bietet einen ersten Hinweis auf die enge Verknüpfung von Algebra (hier in Form der Algebra von Pauli-Matrizen) und Geometrie, da Vektoren in erster Linie geometrische Größen sind. Diese werden hier algebraisch gefasst, beschreiben aber gleichzeitig den wesentlichen geometrischen Kern einer nicht-kommutativen Mathematik: Pauli-Matrizen können als Basisvektoren des dreidimensionalen, euklidischen Raumes interpretiert werden.

Diese geometrische Kernaussage stellt auch den Ausgangspunkt von Kapitel 3 dar. In diesem Kapitel wird eine umgekehrte Argumentationsreihenfolge eingeschlagen. Aufbauend auf den Pauli-Matrizen σ_x, σ_y und σ_z als Basisvektoren des dreidimensionalen Raumes werden diese multiplikativ zu Basis-Einheitsflächen $\sigma_x\sigma_y$, $\sigma_y\sigma_z$ und $\sigma_z\sigma_x$ (Basis-Bivektoren) und einem Basis-Einheitsvolumen $\sigma_x\sigma_y\sigma_z$ (Basis-Trivektor) zusammengefasst. Damit wird die zentrale Idee Graßmanns [47], die außer von Hamilton, Peirce [48] und Clifford [49] aufgrund der für seine Zeitgenossen ungewohnten Schreibweise seinerzeit kaum verstanden wurde, in eine moderne Darstellung gebracht.

Diese geometrische Einordnung von Vektoren wird in Kapitel 3 und den Folgekapiteln ohne Rückgriff auf Matrizendarstellungen in Angriff genommen. Dennoch werden algebraische Argumentationsweisen sukzessive in die mathematische Diskussion eingebracht, wenn im Folgenden Vektorlängen sowie Flächen- und Rauminhalte thematisiert und berechnet werden.

Abschließend wird in Kapitel 3 die Mathematik der komplexen Zahlen im Kontext der Geometrischen Algebra untersucht, wenn das orientierte Einheitsvolumen bzw. der Basis-Trivektor

$$\mathbf{I} = \sigma_x\sigma_y\sigma_z \quad \text{mit} \quad \mathbf{I}^2 = -1 \qquad \{3\}$$

als Pseudoskalar identifiziert wird, der als imaginäre Basiseinheit zu minus Eins quadriert.

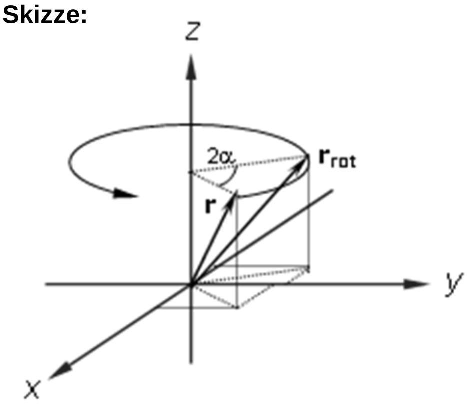
Die in Kapitel 3 eingenommene Perspektive der Pauli-Matrizen als Operanden, auf die eingewirkt wird, wird in Kapitel 4 durch die Operatorenperspektive vervollständigt. Nun werden Pauli-Matrizen als Generatoren von Reflexionen und Rotationen gesehen, die als Operatoren auf andere mathematische Objekte einwirken.

Alle diskutierten Themenbereiche werden durch Beispielaufgaben ergänzt, die die Studierenden eigenständig bearbeiten können. Als Beispiel einer sol-

Beispielaufgabe 36:

Rotieren Sie den Vektor $\mathbf{r} = 5\,\sigma_x + 8\,\sigma_y + 12\,\sigma_z$ in der xy-Ebene um einen Winkel von 50° entgegen dem Uhrzeigersinn. Stellen Sie die Situation vor Ihrer Rechnung zeichnerisch in einer Skizze dar und vergleichen Sie Ihre Rechenergebnisse mit Ihrer Skizze.

Skizze:



Musterlösung:

Eine Rotation in der xy-Ebene wird durch zwei beliebige Reflexionsvektoren in der xy-Ebene generiert, wenn der von den Reflexionsvektoren eingeschlossene Winkel α die Hälfte des Rotationswinkels beträgt:

$\mathbf{n} = \sigma_x$ und

$\mathbf{m} = \cos 25°\,\sigma_x + \sin 25°\,\sigma_y$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{rot} &= \mathbf{m\,n\,r\,n\,m} \\ &= \mathbf{m\,n}\,(5\,\sigma_x + 8\,\sigma_y + 12\,\sigma_z)\,\mathbf{n\,m} \\ &= \mathbf{m}\,(5\,\sigma_x - 8\,\sigma_y - 12\,\sigma_z)\,\mathbf{m} \\ &= (5\cos 50° - 8\sin 50°)\,\sigma_x \\ &\quad + (8\cos 50° + 5\sin 50°)\,\sigma_y + 12\,\sigma_z \\ &\approx -2{,}91\,\sigma_x + 8{,}97\,\sigma_y + 12\,\sigma_z \end{aligned} \qquad \{4\}$$

Abb.3: Musteraufgabe zur Rotation.

chen Aufgabe wird in Abb. 3 die Modellierung der Rotation eines Ortsvektors vorgestellt, wobei die vollständige Angabe der Zwischenschritte in [27, Aufg. 36, S. 111/112] zu finden ist.

In der Speziellen Relativitätstheorie werden Lorentz-Transformationen als Rotationen gedeutet. Aufgaben zur Rotation dienen deshalb auch der Vorbereitung auf Rotationen im Kontext der vierdimensionalen Raumzeit und der Speziellen Relativitätstheorie. In einem geplanten Folgeband soll deshalb in die Dirac-Algebra als Geometrische Algebra der vierdimensionalen Raumzeit eingeführt werden.

In Kapitel 5 wird ein meta-konzeptueller Standpunkt eingenommen und die Pauli-Algebra hinsichtlich ihrer Symmetrieeigenschaften vertieft analysiert. Dies führt auf die Ausbildung eines inneren und äußeren Produktes, die durch eine Standardzerlegung des Produktes zweier Vektoren in einen symmetrischen und anti-symmetrischen Teil gewonnen werden können.

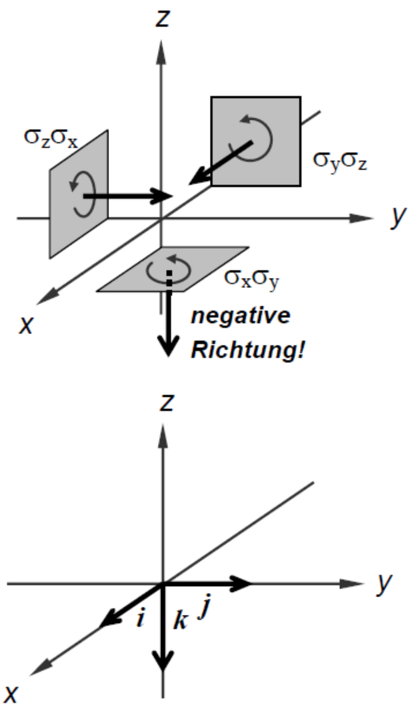


Abb.4: Lagebeziehungen der quaternionischen Basigrößen in einem rechtshändigen Koordinatensystem.

Diese Standardzerlegung oder „canonical decomposition“ in eine auf Graßmann zurückgehende „Fundamentalgleichung“ [47, S. 376, 378], sehen Riesz [50, S. 26, Gl. 1.8.5], Hestenes [39, S. 107, Gl. 7] und zahlreiche weitere Autoren als den konzeptionellen und gleichzeitig den didaktischen Mittelpunkt der Geometrischen Algebra an.

Die Ausbildung meta-konzeptueller Perspektiven wird weiterhin dadurch unterstützt, dass in Kapitel 5 alternative Formulierungen der Pauli-Algebra in Form der Paravektor-Algebra oder der Quaternionenalgebra eingeführt werden. Wichtigster Gesichtspunkt hier ist, dass die Pauli-Algebra und die Algebra komplexer Quaternionen isomorph zueinander sind. Die Basiselemente dieser Algebren können gemäß den Beziehungen

$$\begin{aligned} \boldsymbol{i} &= \sigma_y\sigma_z \\ \boldsymbol{j} &= \sigma_z\sigma_x \\ \boldsymbol{k} &= -\sigma_x\sigma_y \end{aligned} \qquad \{5\}$$

verknüpft werden (siehe auch [50, S. 20, Gl. 1.6.4]). Umgekehrt sind die Pauli-Matrizen σ_x, σ_y und σ_z eineindeutig mit Hilfe von

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\mathrm{i}\,\boldsymbol{i} \\ \sigma_y &= -\mathrm{i}\,\boldsymbol{j} \\ \sigma_z &= \mathrm{i}\,\boldsymbol{k} \end{aligned} \qquad \{6\}$$

durch die quaternionischen Basisgrößen $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ und $\boldsymbol{k}$ und die komplexe Einheit i darstellbar [27, Gl. 5.48 & Gl. 5.52].

In der geometrischen Deutung dieser Beziehungen werden somit die quaternionischen Basisgrößen $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ und $\boldsymbol{k}$ mit Einheits-Bivektoren und damit mit orientierten Flächenstücken identifiziert. Rein reelle Linearkombinationen der quaternionischen Basisgrößen repräsentieren nach Gleichung {5} keine Vektoren, sondern Bivektoren und damit orientierte Flächenstücke. Es können nach Gleichung {6} jedoch rein imaginäre Linearkombinationen der quaternionischen Basisgrößen mit Vektoren identifiziert werden.

Problematisch ist auch die historisch bedingt unterschiedliche Orientierung der durch Pauli-Algebra und Quaternionenalgebra aufgespannten Koordinatensysteme [37, S. 34]. Die üblicherweise in einem rechtshändigen Koordinatensystem verorteten Basisvektoren σ_x, σ_y und σ_z führen zu Basis-Bivektoren, deren Senkrechte ebenfalls ein rechtshändiges Koordinatensystem aufspannen. Aufgrund des zusätzlichen Minuszeichens in {5} ist das durch die

Beispielaufgabe 42:

Übersetzen Sie zur Einübung der Quaternionenschreibweise die Musterlösung von Aufgabe 36 in die Quaternionenalgebra.

Musterlösung:

$\mathbf{r} = -5\,\mathrm{i}\,\boldsymbol{i} - 8\,\mathrm{i}\,\boldsymbol{j} + 12\,\mathrm{i}\,\boldsymbol{k}$
$\mathbf{n} = -\mathrm{i}\,\boldsymbol{i}$ und
$\mathbf{m} = -\cos 25°\,\mathrm{i}\,\boldsymbol{i} - \sin 25°\,\mathrm{i}\,\boldsymbol{j}$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{\text{rot}} &= \mathbf{m\,n\,r\,n\,m} \\ &= \mathbf{m\,n}\,(-5\,\mathrm{i}\,\boldsymbol{i} - 8\,\mathrm{i}\,\boldsymbol{j} + 12\,\mathrm{i}\,\boldsymbol{k})\,\mathbf{n\,m} \\ &= \mathbf{m}\,(-5\,\mathrm{i}\,\boldsymbol{i} + 8\,\mathrm{i}\,\boldsymbol{j} - 12\,\mathrm{i}\,\boldsymbol{k})\,\mathbf{m} \\ &= (5\cos 50° - 8\sin 50°)\,(-\mathrm{i}\,\boldsymbol{i}) \\ &\quad + (8\cos 50° + 5\sin 50°)\,(-\mathrm{i}\,\boldsymbol{j}) + 12\,\mathrm{i}\,\boldsymbol{k} \\ &\approx -2{,}91\,(-\mathrm{i}\,\boldsymbol{i}) + 8{,}97\,(-\mathrm{i}\,\boldsymbol{j}) + 12\,\mathrm{i}\,\boldsymbol{k} \end{aligned}$$

Abb.5: Übersetzung von Musteraufgabe 36 in die komplexe Quaternionenalgebra.

quaternionischen Basiseinheiten aufgespannte Koordinatensystem dann jedoch linkshändig. Dies wird in Abb. 4 veranschaulicht.

Das jedoch durch imaginär multiplizierte quaternionische Basiseinheiten aufgespannte Koordinatensystem ist aufgrund der beiden Minuszeichen in {6}, die eine doppelte Richtungsumkehr bewirken, wieder ein rechtshändiges Koordinatensystem [27, Kap. 5.6].

4. Eine Mathematik ohne negative Zahlen

Die Ausbildung eines meta-konzeptuellen Bewusstsein bei Lernenden und damit der Fähigkeit von Lernenden, einen Sachverhalt aus verschiedenen Perspektiven heraus zu hinterfragen und zu analysieren, ist eines der Hauptziele meiner didaktischen Tätigkeit. Voraussetzung dafür ist, den Lernenden Zugang zu möglichst vielen Konzepten und damit möglichst vielen Blickrichtungen auf physikalische Phänomene und naturwissenschaftliche Gegebenheiten zu ermöglichen.

Erst wenn wir ein Phänomen aus unterschiedlichen Perspektiven und mit Hilfe unterschiedlicher Sichtweisen und Konzepte betrachten können, erschließt sich uns als Beobachter der eigentliche, innere Kern des Phänomens. Nehmen wir immer nur eine Perspektive ein, können wir nicht zwischen Artefakten, die durch diese einzige Blickrichtung verursacht werden, und dem tatsächlichen Kern des Phänomens unterscheiden[1].

Je ungewöhnlicher die Perspektive, desto klarer kann das eigentliche Phänomen zutage treten. Eine sehr ungewöhnliche mathematische Perspektive wird in Kapitel 6 diskutiert. Dort schrieb ich unter anderem: „In diesem Abschnitt lernen Sie eine Möglichkeit kennen, negative Größen auszudrücken, ohne negative Zahlen zu verwenden. Stattdessen verwenden wir (3 x 3)-Matrizen. Das mag unpraktisch klingen und vielleicht auch unpraktisch sein. Erkenntnistheoretisch ist dieses Vorgehen aber wichtig. Lesen Sie also nur weiter, wenn Sie hinter die Dinge blicken wollen und wenn Sie Tieferes suchen. Wenn Sie die Pauli-Algebra nur im Kontext der Geometrie des dreidimensionalen Raumes anwenden wollen, reicht aus, was Sie in den ersten fünf Kapiteln gelernt haben“ [27, S. 76].

Diese Mathematik ohne negative Zahlen baut auf einer alternativen Fassung der Geometrischen Algebra auf, die die S_3-Permutationsmatrizen [27, Gl. 6.5]

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \{7\}$$
$$e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

als Einheitsvektoren einer Ebene interpretiert [24], [25], [29], [31]. Aufbauend darauf wird in dieser mathematischen Version der Geometrischen Algebra kein rechtwinkliges Koordinatensystem, sondern ein mercedessternförmiges, dreiachsiges Koordinatensystem der geometrischen Beschreibung zugrunde gelegt (siehe Abb. 6).

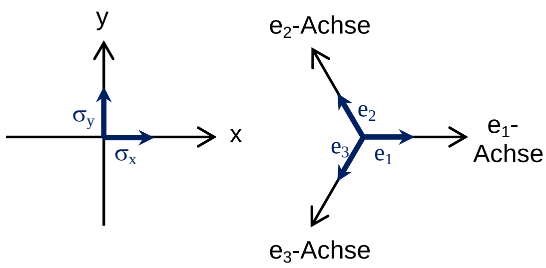


Abb. 6: Basis- bzw. Einheitsvektoren im konventionellen Koordinatensystem (links) und dreiachsigen Koordinatensystem (rechts).

Da die Addition der drei Einheitsvektoren e_1, e_2 und e_3 dem Nullvektor entspricht, besitzt dieser verschiedene Matrizendarstellungen [27, Gl. 6.25]:

$$\boldsymbol{N} = e_1 + e_2 + e_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{O} \qquad \{8\}$$

In der Physik wird die an jeder Stelle mit eins besetzte Matrix $\boldsymbol{N}$ üblicherweise als „demokratische Matrix“ bezeichnet. Da dieser Name jedoch missverständlich und geometrisch nicht unbedingt aussagekräftig scheint, habe ich mich für die Bezeichnung „Nihilationsmatrix“ [27, Anmerk. 13, S. 147] entschieden. Die Multiplikation mit $\boldsymbol{N}$ überführt jedes geometrische Objekt in ein Vielfaches der Nihilationsmatrix $\boldsymbol{N}$ und damit in die Nullmatrix. Algebraisch wird es so zum Verschwinden gebracht.

[1] Ein extremes Beispiel dafür ist der Durchgang eines Astronauten durch den Ereignishorizont eines massereichen Schwarzen Loches. Ein mit dem Astronauten mitfliegender Beobachter sieht aus seiner Perspektive, dass der Astronaut aufgrund der nur geringen Raumkrümmung am Ereignishorizont diesen lebend durchqueren kann. Ein entfernter Beobachter dagegen wird beobachten, wie sich der Astronaut bei Annäherung an den Ereignishorizont immer stärker thermisch aufheizt, wie seine Moleküle dissoziieren, seine Atome ionisiert werden und der Astronaut über den gesamten Ereignishorizont quantenmechanisch verschmiert. Der Astronaut stirbt aus Sicht dieser entfernten Beobachter [51, Kap. 15], [52]. Was also ist hier das eigentliche Phänomen und was ist Artefakt der eingenommenen Perspektive?

Ergänzung zur Beispielaufgabe 36:

Übersetzen Sie die Musterlösung von Aufgabe 36 in die Mathematik der S_3-Permutationsalgebra.

Musterlösung:

$$\mathbf{r} = 5\,\sigma_x + 8\,\sigma_y + 12\,\sigma_z = 5\,e_1 + \frac{8}{\sqrt{3}}\,(e_1 + 2\,e_2) + 12\,e_4 = \frac{15+8\sqrt{3}}{3}\,e_1 + \frac{16\sqrt{3}}{3}\,e_2 + 12\,e_4$$

$$\mathbf{n} = \sigma_x = e_1 \qquad \text{und} \qquad \mathbf{m} = \cos 25°\,e_1 + \sin 25°\,\frac{1}{\sqrt{3}}\,(e_1 + 2\,e_2)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_{rot} &= \mathbf{m\,n\,r\,n\,m} \\
&= \mathbf{m\,n} \left(\frac{15+8\sqrt{3}}{3} e_1 + \frac{16\sqrt{3}}{3} e_2 + 12\,e_4 \right) \mathbf{n\,m} \\
&= \mathbf{m} \left(\frac{15+8\sqrt{3}}{3} e_1 + \frac{16\sqrt{3}}{3} e_3 + \ominus\,12\,e_4 \right) \mathbf{m} \\
&= \left(\frac{15+8\sqrt{3}}{3} \cos^2 25° + \frac{\ominus\,48+10\sqrt{3}}{3} \cos 25° \sin 25° + \ominus\,\frac{15+8\sqrt{3}}{3} \sin^2 25° \right) e_1 \\
&\qquad + \left(\frac{16\sqrt{3}}{3} \cos^2 25° + \frac{20\sqrt{3}}{3} \cos 25° \sin 25° + \ominus\,\frac{16\sqrt{3}}{3} \sin^2 25° \right) e_2 + 12\,e_4 \\
&= \left(\frac{15+8\sqrt{3}}{3} \cos 50° + \frac{\ominus\,24+5\sqrt{3}}{3} \sin 50° \right) e_1 + \left(\frac{16\sqrt{3}}{3} \cos 50° + \frac{10\sqrt{3}}{3} \sin 50° \right) e_2 + 12\,e_4 \\
&\approx 2{,}27\,e_1 + 10{,}36\,e_2 + 12\,e_4 \approx -2{,}91\,\sigma_x + 8{,}97\,\sigma_y + 12\,\sigma_z
\end{aligned}$$

Abb.7: Bearbeitung von Musteraufgabe 36 mit Hilfe der S_3-Permutationsalgebra.

Die direkte konzeptuelle Folge dieser Tatsache ist, dass nun die in [27, Gl. 6.32] mit dem Latex-Symbol „ominus“ bezeichnete Matrix $\ominus$ als Summe der Matrixprodukte $e_{12} = e_1e_2$ und $e_{21} = e_2e_1$

$$\ominus = e_{12} + e_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \{9\}$$

geometrisch und algebraisch im Kontext der S_3-Permutationsalgebra genau das bewerkstelligt, was im Kontext der klassischen Geometrischen Algebra und im Kontext der üblichen Mathematik ein Minuszeichen bzw. der Skalar „– 1“ vollbringt.

Geometrisch führt die Multiplikation mit $\ominus$ (genauso wie die Multiplikation mit – 1) zu einer Richtungsumkehr. Algebraisch reduziert die Addition eines Skalars mit $\ominus$ (genauso wie die Addition mit – 1) zu einer Verringerung des Skalars um eine Einheit e_0. Wie erwartet werden sollte, entspricht auch das Quadrat von $\ominus$ (genauso wie das Quadrat von – 1) dem Einheitsskalar e_0.

Abschließend wird im letzten Abschnitt [27, Kap. 6.8] die Identifikation von Pauli-Matrizen mit unterschiedlichen (3 x 3)-Matrizen diskutiert. Es ist schließlich nichts als ein historischer Zufall, dass Pauli-Matrizen heute als (2 x 2)-Matrizen dargestellt und diskutiert werden. Sie könnten in einer alternativen mathematischen Welt ebenso als (3 x 3)-Matrizen ausformuliert werden Zwei solche Möglichkeiten werden in diesem letzten Kapitel aufgeführt. Beispielsweise kann mit Hilfe der Beziehungen

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= e_1 \\
\sigma_y &= \frac{1}{\sqrt{3}}\,(e_1 + 2\,e_2) \qquad \{10\} \\
\sigma_z &= e_4 = \frac{1}{\sqrt{3}}\,i\,(e_0 + 2\,e_{21})
\end{aligned}$$

die bereits vorgestellte Beispielaufgabe 36 in einer weiteren alternativen mathematischen Formulierung gelöst werden (siehe Abb. 7).

Der gesamte formale Apparat der Geometrischen Algebra des dreidimensionalen Raumes (und damit der Pauli-Algebra) kann auf gleiche Art und Weise in die Mathematik der S_3-Permutationsalgebra übertragen werden.

Außer von dem in Abb. 8 dargestellten Buch [27] wurde dieser Sachverhalt bisher im deutschsprachigen Raum noch von keinem anderen Lehrbuch so explizit aufgebarbeitet und einführend dargestellt.

5. Ausblick

„Clifford algebra (…) can be explained to the first person you meet in the street,“ ist ein Satz Parra Serras aus [40, S. 820], den ich gelegentlich zitiere. Ich bin überzeugt, er trifft zu. Es sollte uns also gelingen, nicht nur die erstbeste Person auf der Straße von der Geometrischen Algebra zu überzeugen, sondern auch Studierende als zukünftige Spezialisten ihres Faches.

In zwei Richtungen lohnt eine weitere Aufarbeitung für solche Leserinnen und Leser aus dem hochschu-

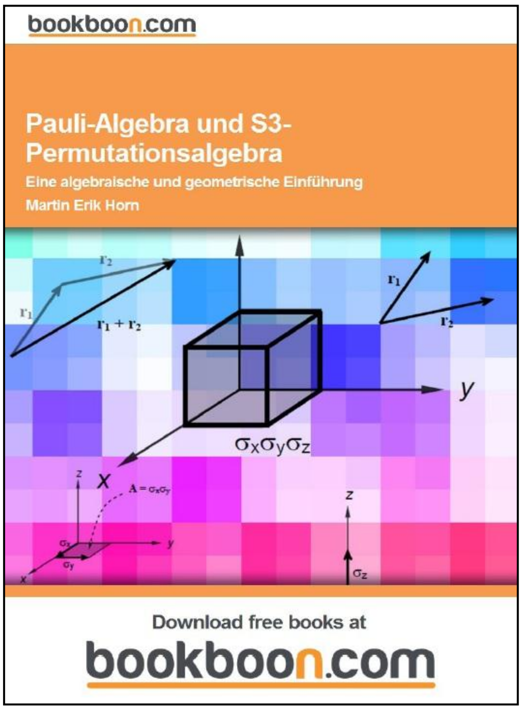


Abb.8: Buchcover und Link zum Buchdownload:
http://bookboon.com/de/studium/mathematik/pauli-algebra-und-s3-permutationsalgebra

lischen Bereich mit Sicherheit: zum einen sind höherdimensionale Räume und Raumzeiten mit Hilfe der Geometrischen Algebra leicht modellierbar und werden mit ihrer Hilfe mathematisch zugänglicher.

Hier ist insbesondere die Anschlussfähigkeit zur Dirac-Algebra erwähnenswert. Im Zentrum einer solchen Aufarbeitung wird die enge Beziehung zwischen Pauli- und Dirac-Matrizen [53, S. 695, Gl. 43]:

$$\sigma_x = \gamma_x \gamma_t$$
$$\sigma_y = \gamma_y \gamma_t \qquad \{11\}$$
$$\sigma_z = \gamma_z \gamma_t$$

stehen, die den Zusammenhang zwischen dem von uns wahrgenommenen dreidimensionalen Raum und der vierdimensionalen Raumzeit, in dem dieser Raum eingebettet liegt, beschreibt.

Zum zweiten ist die Erweiterung in Richtung konformer Geometrischer Algebren sowohl mathematisch wie auch physikalisch interessant. Hier liegt noch eine physikdidaktische Welt vor uns, die im deutschen Sprachraum von uns Physikdidaktikerinnen und Physikdidaktikern nahezu überhaupt nicht aufgearbeitet ist.

Das ist umso bedauerlicher, da wir in diesem Bereich von anderen Disziplinen wie der Informatik lernen können. Es ist kein Zufall, dass Programme, die auf Grundlage der fünfdimensionalen konformen Geometrischen Algebra erstellt wurden, eine exzellente Performanz aufweisen und rechenökonomisch hervorragend abschneiden [41]. Sie sind deshalb so effektiv, weil die Geometrische Algebra eines der effektivsten mathematischen Instrumente darstellt, das uns zur Verfügung steht.

Es wäre fahrlässig von uns Didaktikerinnen und Didaktikern, diese Vorteile zu übersehen oder zu übergehen. Wir sollten sie gemeinsam in didaktische Vorteile wenden.

6. Literatur

6.1. Bibliographie der Arbeiten des Autors zur Geometrischen Algebra

[1] Horn, Martin Erik (2004): Eine didaktische Reduktion der Geometrischen Algebra. In: Anja Pitton (Hrsg.): Chemie- und physikdidaktische Forschung und naturwissenschaftliche Bildung, Beiträge zur Jahrestagung der GDCP in Berlin, Band 24, S. 105 – 107, LIT-Verlag, Münster.

[2] Horn, Martin Erik (2004): Grass, Mann! Das Clifford-Kinder-Rechenbuch. In: Volkhard Nordmeier, Arne Oberländer (Hrsg.): Didaktik der Physik, Beiträge zur Frühjahrstagung in Düsseldorf, Tagungs-CD des Fachverbands Didaktik der Physik der Deutschen Physikalischen Gesellschaft, Beitrag 8.5, LOB – Lehmanns Media, Berlin.

[3] Horn, Martin Erik (2005): Was sind Pauli-Matrizen? Kasper, Seppel und das böse Krokodil erklären die Geometrische Algebra. In: Volkhard Nordmeier, Arne Oberländer (Hrsg.): Didaktik der Physik, Beiträge zur Frühjahrstagung in Berlin, Tagungs-CD des Fachverbands Didaktik der Physik der Deutschen Physikalischen Gesellschaft, Beitrag 15.3, LOB – Lehmanns Media, Berlin.

[4] Horn, Martin Erik (2006): Rotationsbewegungen im Kontext der Geometrischen Algebra. In: Anja Pitton (Hrsg.): Lehren und Lernen mit neuen Medien, Beiträge zur Jahrestagung der GDCP in Paderborn, Band 26, S. 374 – 376, LIT-Verlag, Münster.

[5] Horn, Martin Erik (2006): Quaternionen und Geometrische Algebra. In: Volkhard Nordmeier, Arne Oberländer (Hrsg.): Didaktik der Physik, Beiträge zur Frühjahrstagung in Kassel, Tagungs-CD des Fachverbands Didaktik der Physik der Deutschen Physikalischen Gesellschaft, Beitrag 28.2, LOB – Lehmanns Media, Berlin.

[6] Horn, Martin Erik (2007): Die didaktische Relevanz des Pauli-Pascal-Dreiecks. In: Dietmar Höttecke (Hrsg.): Naturwissenschaftlicher Unterricht im internationalen Vergleich, Beiträge

zur Jahrestagung der GDCP in Bern, Band 27, S. 557 – 559, LIT-Verlag Dr. W. Hopf, Berlin.

[7] Horn, Martin Erik (2009): Vom Raum zur Raumzeit. In: Dietmar Höttecke (Hrsg.): Chemie- und Physikdidaktik für die Lehramtsausbildung, Beiträge zur Jahrestagung der GDCP in Schwäbisch Gmünd, Band 29, S. 455 – 457, LIT-Verlag Dr. W. Hopf, Berlin.

[8] Horn, Martin Erik (2009): Die Spezielle Relativitätstheorie im Kontext der Raumzeit-Algebra. In: Volkhard Nordmeier, Helmuth Grötzebauch (Hrsg.): Didaktik der Physik, Beiträge zur Frühjahrstagung in Bochum, Tagungs-CD des Fachverbands Didaktik der Physik der Deutschen Physikalischen Gesellschaft, Beitrag 30.40, LOB – Lehmanns Media.

[9] Horn, Martin Erik (2009): Arbeitsbögen zur Geometrischen Algebra und zur Raumzeit-Algebra. Veröffentlicht als Anlage des Beitrags 30.40 in: Volkhard Nordmeier, Helmuth Grötzebauch (Hrsg.): Didaktik der Physik, Beiträge zur Frühjahrstagung in Bochum, Tagungs-CD des Fachverbands Didaktik der Physik der Deutschen Physikalischen Gesellschaft, LOB – Lehmanns Media, Berlin.

[10] Horn, Martin Erik (2010): Die Raumzeit-Algebra im Abitur. In: Helmuth Grötzebauch, Volkhard Neumeier (Hrsg.): PhyDid B – Didaktik der Physik, Beiträge zur DPG-Frühjahrstagung des Fachverbands Didaktik der Physik in Hannover, Beitrag 28.4.

[11] Horn, Martin Erik (2010): Die Spezielle Relativitätstheorie in der Mathematikerausbildung. In: Helmuth Grötzebauch, Volkhard Neumeier (Hrsg.): PhyDid B – Didaktik der Physik, Beiträge zur DPG-Frühjahrstagung des Fachverbands Didaktik der Physik in Hannover, Beitrag 19.35.

[12] Horn, Martin Erik (2010): Pauli-Algebra und Dirac-Algebra. OH-Folien zur Einführung in die Spezielle Relativitätstheorie im Rahmen eines Kurses zur Physik für Mathematiker. Veröffentlicht als Anlage des Beitrags 19.35 in: Helmuth Grötzebauch, Volkhard Nordmeier (Hrsg.): PhyDid B – Didaktik der Physik, Beiträge zur DPG-Frühjahrstagung des Fachverbands Didaktik der Physik in Hannover.

[13] Horn, Martin Erik (2010): Reconsidering and Rethinking Quaternionic Special Relativity. In: Vaclav Skala, Eckhard M. Hitzer (Hrsg.): Gravisma 2010 Workshop Proceedings, 2nd International Workshop on Computer Graphics, Computer Vision and Mathematics Brno, S. 123 – 129, Verlag Vaclav Skala Union Agency, Plzen.

[14] Horn, Martin Erik (2010): Eine Einführung in Pauli-Matrizen und Dirac-Matrizen: Reflexionen und Rotationen in Raum und Raumzeit. In: Anke Lindmeier, Stefan Ufer (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2010, Tagungs-CD der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, S. 417 – 420 und Beiträge zum Mathematikunterricht 2010, Tagungsband der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, S. 417 – 420, WTM-Verlag, Münster.

[15] Horn, Martin Erik (2010): Graßmann, Pauli, Dirac: Die Spezielle Relativitätstheorie in der Schule (Grassmann, Pauli, Dirac: special relativity in the schoolroom), Talk held in Session III „Through the ages – Present and future of Grassmann's ideas“ (in German). Veröffentlicht als Teil der DVD-Video-Dokumentation in: Hans-Joachim Petsche, Peter Lenke (Hrsg.): International Grassmann Conference, Hermann Grassmann Bicentennial at Potsdam and Szczecin, 16 – 19. September 2009; Video Recording of the Conference, 4 DVD's, 16:59:25, ISBN 978-3-86956-093-9, Universitätsverlag/AVZ Multimedia, Potsdam.

[16] Horn, Martin Erik (2011): Grassmann, Pauli, Dirac: Special Relativity in the Schoolroom. In: Hans-Joachim Petsche, Albert C. Lewis, Jörg Liesen, Steve Russ (Hrsg.): From Past to Future – Graßmann's Work in Context, S. 435 – 450, Birkhäuser-Verlag, Basel, Berlin.

[17] Horn, Martin Erik (2011): Die fünfdimensionale Welt der Kosmologischen Relativität. In: Dietmar Höttecke (Hrsg.): Naturwissenschaftliche Bildung als Beitrag zur Gestaltung partizipativer Demokratie, Beiträge zur Jahrestagung der GDCP in Potsdam, Band 31, S. 158 – 160, LIT-Verlag Dr. W. Hopf, Berlin.

[18] Horn, Martin Erik (2011): Teaching Special Relativity with Geometric Algebra. In: Klaus Gürlebeck (Hrsg.): Proceedings of the 9th International Conference on Clifford Algebras and their Applications in Mathematical Physics, Digital Proceedings/Tagungs-CD der ICCA9 in Weimar, Bauhaus-Universität, Weimar.

[19] Horn, Martin Erik (2011): Mathematische und didaktische Modellierung fünfdimensionaler Räume am Beispiel der Kosmologischen Relativität. In: Reinhold Haug, Lars Holzäpfel (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2011, Tagungs-CD der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, S. 403 – 406 und Beiträge zum Mathematikunterricht 2011, Tagungsband der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, Band 1, S. 403 – 406, WTM-Verlag, Münster.

[20] Horn, Martin Erik (2011): Wie konstruieren wir eine sieben- oder neundimensionale Welt? In: Reinhold Haug, Lars Holzäpfel (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2011, Tagungs-CD der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, S. 407 – 410 und Beiträge zum Mathematikunterricht 2011, Tagungsband der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, Band 1, S. 407 – 410, WTM-Verlag, Münster.

[21] Horn, Martin Erik (2011): Die fünfdimensionale Raumzeit-Algebra am Beispiel der Kosmolo-

gischen Relativität. In: Helmuth Grötzebauch, Volkhard Nordmeier (Hrsg.): PhyDid B – Didaktik der Physik, Beiträge zur DPG-Frühjahrstagung des Fachverbands Didaktik der Physik in Münster, Beitrag 17.1.

[22] Horn, Martin Erik (2011): Geometrische Algebra in höheren Dimensionen. In: Helmuth Grötzebauch, Volkhard Nordmeier (Hrsg.): PhyDid B – Didaktik der Physik, Beiträge zur DPG-Frühjahrstagung des Fachverbands Didaktik der Physik in Münster, Beitrag 18.5.

[23] Drechsel, Paul; Hildenbrand, Dietmar; Horn, Martin Erik (2012): Didaktische Wege zum Quanten-Computing. In: Sascha Bernholt (Hrsg.): Konzepte fachdidaktischer Strukturierung für den Unterricht, Beiträge zur Jahrestagung der GDCP in Oldenburg, Band 32, S. 649 – 651, LIT-Verlag Dr. W. Hopf, Berlin.

[24] Horn, Martin Erik (2012): Die Geometrische Algebra der (3 x 3)-Matrizen. In: Matthias Ludwig, Michael Kleine (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2012, Tagungs-CD der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, S. 393 – 396 und Beiträge zum Mathematikunterricht 2012, Tagungsband der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, Band 1, S. 393 – 396, WTM-Verlag, Münster.

[25] Horn, Martin Erik (2012): Geometric Algebra of Quarks. In: Michel Berthier, Laurent Fuchs, Christophe Saint-Jean (Hrsg.): Digital Proceedings of the International Conference on Applied Geometric Algebra and Engineering in La Rochelle (AGACSE), USB flash drive version, University of La Rochelle.

[26] Horn, Martin Erik (2012): Living in a World without Imaginaries. In: Dieter Schuch, Michael Ramek (Hrsg.): Symmetries in Science XV, Proceedings of the International Symposium in Bregenz 2011, Journal of Physics: Conference Series, Vol. 380 (2012) 012006, Institute of Physics, IOP Science, Bristol.

[27] Horn, Martin Erik (2012): Pauli-Algebra und S_3-Permutationsalgebra – Eine algebraische und geometrische Einführung. Elektronische Veröffentlichung unter www.bookboon.com/de, Ventus Publishing ApS, London.

[28] Horn, Martin Erik (2012): Translating Cosmological Special Relativity into Geometric Algebra. In: Seenith Sivasundaram (Hrsg.): Proceedings of the 9th International Conference on Mathematical Problems in Engineering, Aerospace and Sciences in Vienna (ICNPAA), American Institute of Physics, AIP Conference Proceedings, Vol. 1493, S. 492 – 498, Melville, New York.

[29] Horn, Martin Erik (2012): Eine andere Geometrische Algebra. In: Helmuth Grötzebauch, Volkhard Nordmeier (Hrsg.): PhyDid B – Didaktik der Physik, Beiträge zur DPG-Frühjahrstagung des Fachverbands Didaktik der Physik in Mainz, Beitrag 7.02.

[30] Horn, Martin Erik; Drechsel, Paul; Hildenbrand, Dietmar (2012): Quanten-Computing und Geometrische Algebra. In: Helmuth Grötzebauch, Volkhard Nordmeier (Hrsg.): PhyDid B – Didaktik der Physik, Beiträge zur DPG-Frühjahrstagung des Fachverbands Didaktik der Physik in Mainz, Beitrag 15.35.

[31] Horn, Martin Erik (2013): Die Raumzeit-Algebra der (3 x 3)-Matrizen. In: Sascha Bernholt (Hrsg.): Inquiry-based Learning – Forschendes Lernen, Beiträge zur Jahrestagung der GDCP in Hannover, Band 33, S. 320 – 322, Institut für die Pädagogik der Naturwissenschaften und Mathematik (IPN), Kiel.

[32] Horn, Martin Erik (2013): Zur Beziehung zwischen inneren und äußeren Produkten in der Geometrischen Algebra. In: Gilbert Greefrath, Friedhelm Käpnick, Martin Stein (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2013, Tagungs-CD der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, S. 480 – 483 und Beiträge zum Mathematikunterricht 2013, Tagungsband der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, Band 1, S. 480 – 483, WTM-Verlag, Münster

[33] Horn, Martin Erik (2013): Eine Einführung in unterschiedliche Darstellungen der Pauli-Algebra: Konzeption eines Lehrbuchs. In: Gilbert Greefrath, Friedhelm Käpnick, Martin Stein (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2013, Tagungs-CD der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, S. 1136 – 1137, und Beiträge zum Mathematikunterricht 2013, Tagungsband der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, Band 2, S. 1136 – 1137, WTM-Verlag, Münster.

6.2. Weitere im Text zitierte Literatur

[34] Sobczyk, Garret (1993): David Hestenes – The Early Years. In: Foundations of Physics, Vol. 23, No. 10, S. 1291 – 1293.

[35] Hestenes, David (2002): New Foundations for Classical Mechanics. 2. Auflage, Kluwer Academic Publishers, New York, Boston.

[36] Snygg, John (1997): Clifford Algebra. A Computational Tool for Physicists. Oxford University Press, New York, Oxford.

[37] Doran, Chris; Lasenby, Anthony (2003): Geometric Algebra for Physicists. Cambridge University Press, Cambridge.

[38] Vince, John (2008): Geometric Algebra for Computer Graphics. Springer-Verlag, London.

[39] Hestenes, David (2003): Oersted Medal Lecture 2002: Reforming the Mathematical Language of Physics. In: American Journal of Physics, Vol. 71, No. 2, S. 104 – 121.

[40] Parra Serra, Josep Manel (2009): Clifford Algebra and the Didactics of Mathematics. In:

Advances of Applied Clifford Algebras, Vol. 19, No. 3/4, S. 819 – 834.
[41] Hildenbrand, Dietmar (2013): Foundations of Geometric Algebra Computing. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.
[42] Perwass, Christian (2009): Geometric Algebra with Applications in Engineering. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.
[43] Feigenbaum, Edward (2007): Oral History of Donald Knuth. Recorded at March 14, 2007 and March 21, 2007, Computer History Museum, Mountain View, California.
[44] Fraser, Gordon (2008): Cosmic Anger. Abdus Salam – The First Muslim Nobel Scientist. Oxford University Press, Oxford.
[45] Salam, Abdus (1990): Dirac and Finite Field Theories. In: Behram N. Kursunoglu, Eugene P. Wigner (Hrsg.): Reminiscenes About a Great Physicist – Paul Adrien Maurice Dirac. First paperback edition, Kap. 22, S. 263 – 275, Cambridge University Press, Cambridge.
[46] Cartan, Élie (1981): The Theory of Spinors. Unabridged republication of the complete English translation first published in 1966, Dover Publications, New York.
[47] Graßmann, Hermann (1877): Der Ort der Hamilton'schen Quaternionen in der Ausdehnungslehre. In: Mathematische Annalen, Vol. 12, S. 375 – 386.
[48] Peirce, Charles Sanders (1877): Note on Grassmann's Calculus of Extensions. In: Proceedings of the American Academy of Arts and Scienes, Vol. 13 (May 1877 – May 1878), S. 115 – 116.
[49] Clifford, William Kingdon (1878): Applications of Grassmann's Extensive Algebra. In: American Journal of Mathematics, Vol. 1, No. 4, S. 350 – 358.
[50] Riesz, Marcel (1958): Clifford Numbers and Spinors. Chapters I – IV, Lecture Series No. 38, Lectures delivered October 1957 – January 1958. The Institute for Fluid Dynamics and Applied Mathematics, University of Maryland, College Park.
[51] Susskind, Leonard (2008): The Black Hole War. My Battle with Stephen Hawking to Make the World Safe for Quantum Mechanics. Little Brown & Co, New York, Boston.
[52] Horn, Martin Erik (2010): Das holographische Prinzip in der Kosmologie. In: Dietmar Höttecke (Hrsg.): Entwicklung naturwissenschaftlichen Denkens zwischen Phänomenen und Systematik, Beiträge zur Jahrestagung der GDCP in Dresden, Band 30, S. 470 – 472, LIT-Verlag Dr. W. Hopf, Berlin.
[53] Hestenes, David (2003): Spacetime Physics with Geometric Algebra. In: American Journal of Physics, Vol. 71, No. 7, S. 691 – 714.