Didaktische Konzeption eines Lehrbuchs zur Geometrischen Algebra

Martin Erik Horn, Email: mail@grassmann-algebra.de

Motivation:

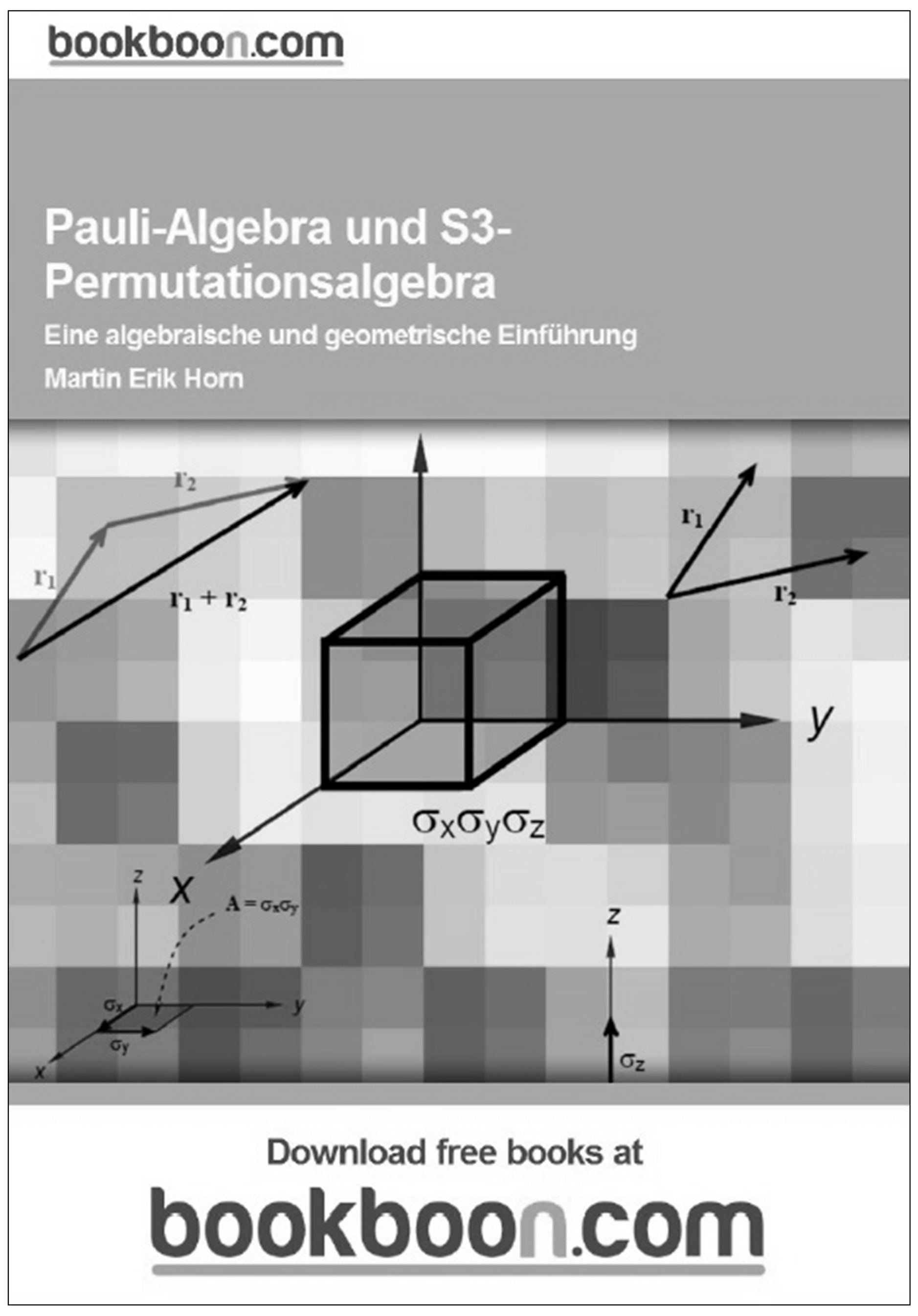
- Mit Hilfe der Geometrischen Algebra können physikalische Sachverhalte strukturell übersichtlich und konzeptuell anschaulich dargestellt und verstanden werden. Unter anderem sind auch nicht-kommutative Beziehungen einfach zu beschreiben.
- Die Verknüpfung algebraischer und geometrischer Sichtweisen gelingt in didaktisch überzeugender Weise.
- Zahlreiche Naturwissenschaftsdidaktikerinnen und -didaktiker (wie z.B. David Hestenes, auf den die Formulierung der modernen Geometrischen Algebra zurückgeht) verstehen diese als universelle mathematische Sprache der Naturwissenschaften.
- Die Aufarbeitung der Geometrischen Algebra für den schulischen und hochschulischen Bereich sollte somit ein vordringliches Ziel der Physik- und Mathematikdidaktik sein. Ein deutschsprachiges Lehrbuch zur Geometrischen Algebra fehlt bisher.

Zielgruppen:

Lehrende und Lernende aus dem Bereichen

- der naturwissenschaftlichen Fächer,
- der Mathematik,
- der Informatik und der anwendungsbezogenen Programmierung
- auf Hochschulniveau der Anfangssemester,
- die einen sowohl anschaulichen wie auch grundlegenden Einstieg in die Geometrische Algebra suchen.

Die Geometrische Algebra (und mit ihr die Pauli-Algebra) ***bietet eine tragfähige Alternative zur heute gebräuchlichen Standardformulierung der Linearen Algebra.***



In diesem Buch wird auf grundlegende Art und Weise in die Pauli-Algebra eingeführt. Dabei werden die algebraischen Eigenschaften dieses mathematischen Strukturgebäudes aus geometrischer Sicht dargestellt und die Pauli-Algebra im Sinne der Geometrischen Algebra erläutert.

Konkret bedeutet dies, dass in diesem Buch nicht nur abstrakt mit Pauli-Matrizen gearbeitet wird, sondern dass immer die Interpretation von Pauli-Matrizen mitschwingt. Wir rechnen also tatsächlich nicht mit Pauli-Matrizen, wir rechnen hier mit orientierten Strecken, Flächenstücken und Volumina. Diese orientierten Strecken, Flächenstücke und Volumina werden lediglich zufällig durch (2 x 2)-Matrizen repräsentiert.

Dass die Repräsentation von Pauli-Matrizen durch (2 x 2)-Matrizen tatsächlich ein historischer Zufall ist, wird im letzten Teil dieses Buches gezeigt. In diesem Teil wird die Pauli-Algebra auf Grundlage der (3 x 3)-Matrizen der S_3-Permutationsalgebra dargestellt.

Didaktische Hinweise:

Dieses Buch kann auf zwei verschiedene Arten gelesen werden. Ein algebraischer Einstieg ist über Kapitel zwei gegeben.
Für Lernende mit einer mehr anschaulich-graphischen Vorprägung ist auch ein geometrischer Einstige direkt mit Kapitel drei möglich. Kapitel zwei zwei sollte dann zu einem späteren Zeitpunkt erarbeitet werden.

Zentraler Punkt von Kapitel 2:

Eineindeutige Zerlegung von (2 x 2)-Matrizen in eine Linearkombination von Pauli-Matrizenprodukten

$$\begin{pmatrix} a_{11} + ib_{11} & a_{12} + ib_{12} \\ a_{21} + ib_{21} & a_{22} + ib_{22} \end{pmatrix} = \tfrac{1}{2}(a_{11} + a_{22})\,\mathbf{1} + \tfrac{1}{2}(a_{12} + a_{21})\,\boldsymbol{\sigma_x} + \tfrac{1}{2}(-b_{12} + b_{21})\,\boldsymbol{\sigma_y} + \tfrac{1}{2}(a_{12} - a_{21})\,\boldsymbol{\sigma_z} + \tfrac{1}{2}(b_{11} - b_{22})\,\boldsymbol{\sigma_x\sigma_y} + \tfrac{1}{2}(b_{12} + b_{21})\,\boldsymbol{\sigma_y\sigma_z} + \tfrac{1}{2}(b_{11} - b_{22})\,\boldsymbol{\sigma_z\sigma_x} + \tfrac{1}{2}(b_{11} + b_{22})\,\boldsymbol{\sigma_x\sigma_y\sigma_z}$$

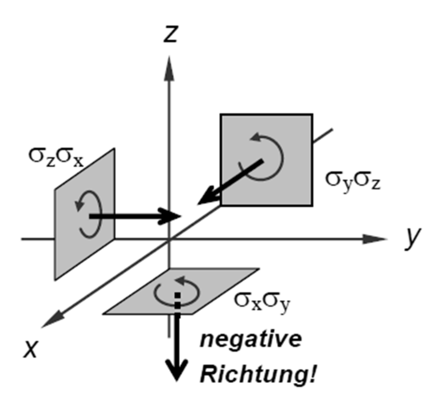
Zentraler Punkt von Kapitel 3:

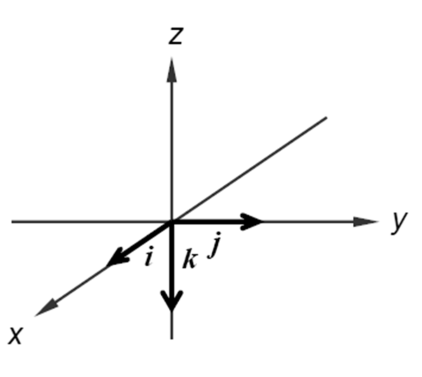
Die Pauli-Matrizen $\boldsymbol{\sigma_x}$, $\boldsymbol{\sigma_y}$ und $\boldsymbol{\sigma_z}$ repräsentieren Basisvektoren eines dreidimensionalen, euklidischen Raums. Jeder Vektor kann somit eineindeutig geschrieben werden als $\mathbf{r} = x\,\boldsymbol{\sigma_x} + y\,\boldsymbol{\sigma_y} + z\,\boldsymbol{\sigma_z}$

Pseudoskalare:

Die Pauli-Algebra enthält die Mathematik komplexer Zahlen in geometrischer Form:

$\mathbf{I} = \boldsymbol{\sigma_x\sigma_y\sigma_z}$ stellt ein orientiertes Einheitsvolumen dar und führt auf $\mathbf{I}^2 = -\mathbf{1}$





Förderung meta-konzeptueller Sichtweisen durch Einbezug und geometrische Deutung weiterer algebraischer Systeme:

- Paravektor-Algebra
- S_3-Permutationsalgebra
- Quaternionen-Algebra

Beispiel:

Graphische Veranschaulichung der Beziehung zwischen Pauli-Matrizen und Quaternionen **(siehe Abbildung links)**

$$i = \boldsymbol{\sigma_y\sigma_z} \qquad j = \boldsymbol{\sigma_z\sigma_x} \qquad k = -\boldsymbol{\sigma_x\sigma_y}$$

oder $\quad \boldsymbol{\sigma_x} = -\mathrm{i}\,i \qquad \boldsymbol{\sigma_y} = -\mathrm{i}\,j \qquad \boldsymbol{\sigma_z} = \mathrm{i}\,k$

$\Rightarrow$ Quaternionen stellen orientierte Flächenstücke in einem linkshändigen Koordinatensystem dar.

Inhaltsübersicht (Auszug)

Notwendige mathematische Vorkenntnisse:

Vorausgesetzt werden lediglich elementare Grundkenntnisse der Matrizenrechnung. Diese Herangehensweise folgt der Einschätzung von Abdus Salam: „... a battle has raged between the amateur and professional group theorists. The amateurs have maintained that everything one needs in the theory of groups can be discovered by the light of nature provided one knows how to multiply two matrices. In support of this claim, they of course, justifiably, point to the success of that prince of amateurs in this field, Dirac, particularly with the spinor representations of the Lorentz group. As an amateur myself, I strongly believe in the truth of the non-professionalist creed."

Zentraler Punkt von Kapitel 4:

Reflexionen und Rotationen werden durch simple Multiplikationen dargestellt.

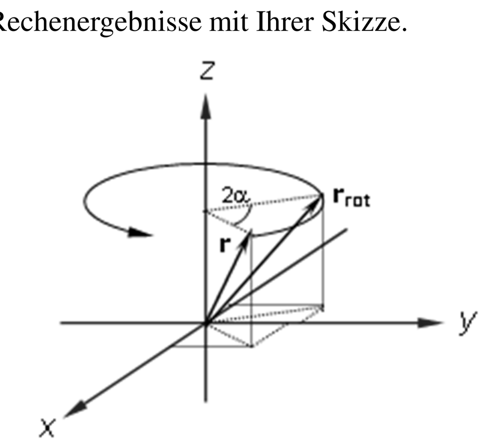
Aufgaben und Musterlösungen unterstützen die eigenständige Erarbeitung der Pauli-Algebra.

Beispielaufgabe 36:

Rotieren Sie den Vektor $\mathbf{r} = 5\,\boldsymbol{\sigma_x} + 8\,\boldsymbol{\sigma_y} + 12\,\boldsymbol{\sigma_z}$ in der xy-Ebene um einen Winkel von 50^o entgegen dem Uhrzeigersinn. Stellen Sie die Situation vor Ihrer Rechnung zeichnerisch in einer Skizze dar und vergleichen Sie Ihre Rechenergebnisse mit Ihrer Skizze.

Musterlösung:

Eine Rotation in der xy-Ebene wird durch zwei beliebige Reflexionsvektoren in der xy-Ebene generiert, wenn der von den Reflexionsvektoren eingeschlossene Winkel α die Hälfte des Rotationswinkels beträgt:



$\mathbf{n} = \boldsymbol{\sigma_x}$ und

$\mathbf{m} = \cos 25^o\,\boldsymbol{\sigma_x} + \sin 25^o\,\boldsymbol{\sigma_y}$

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_{rot} &= \mathbf{m\,n\,r\,n\,m} \\
&= (\cos 25^o\,\boldsymbol{\sigma_x} + \sin 25^o\,\boldsymbol{\sigma_y})\,\boldsymbol{\sigma_x}\,(5\,\boldsymbol{\sigma_x} + 8\,\boldsymbol{\sigma_y} + 12\,\boldsymbol{\sigma_z})\,\boldsymbol{\sigma_x}\,(\cos 25^o\,\boldsymbol{\sigma_x} + \sin 25^o\,\boldsymbol{\sigma_y}) \\
&= (\cos 25^o\,\boldsymbol{\sigma_x} + \sin 25^o\,\boldsymbol{\sigma_y})\,(5\,\boldsymbol{\sigma_x} - 8\,\boldsymbol{\sigma_y} - 12\,\boldsymbol{\sigma_z})\,(\cos 25^o\,\boldsymbol{\sigma_x} + \sin 25^o\,\boldsymbol{\sigma_y}) \\
&= ((5 \cos 25^o - 8 \sin 25^o\,\mathbf{1} + (-8 \cos 25^o - 5 \sin 25^o)\,\boldsymbol{\sigma_x\sigma_y} \\
&\qquad - 12 \sin 25^o\,\boldsymbol{\sigma_y\sigma_z} + 12 \cos 25^o\,\boldsymbol{\sigma_z\sigma_x})\,(\cos 25^o\,\boldsymbol{\sigma_x} + \sin 25^o\,\boldsymbol{\sigma_y}) \\
&= (5 \cos^2 25^o - 8 \sin 25^o \cos 25^o - 8 \sin 25^o \cos 25^o - 5 \sin^2 25^o)\,\boldsymbol{\sigma_x} \\
&\quad + (5 \sin 25^o \cos 25^o - 8 \sin^2 25^o + 8 \cos^2 25^o + 5 \sin 25^o \cos 25^o)\,\boldsymbol{\sigma_y} \\
&\quad + (12 \cos^2 25^o + 12 \sin^2 25^o)\,\boldsymbol{\sigma_z} + (12 \sin 25^o \cos 25^o - 12 \sin 25^o \cos 25^o)\,\boldsymbol{\sigma_x\sigma_y\sigma_z}
\end{aligned}$$

Mit Hilfe der trigonometrischen Additionstheoreme ergibt sich:

$$\mathbf{r}_{rot} = (5 \cos 50^o - 8 \sin 50^o)\,\boldsymbol{\sigma_x} + (8 \cos 50^o + 5 \sin 50^o)\,\boldsymbol{\sigma_y} + 12\,\boldsymbol{\sigma_z}$$

In der Speziellen Relativitätstheorie werden Lorentz-Transformationen als Rotationen gedeutet. Solche Aufgaben zur Rotation dienen deshalb auch der Vorbereitung der Dirac-Algebra und der Speziellen Relativitätstheorie, in die in einem Folgeband im Kontext der Geometrischen Algebra eingeführt werden wird.

M. Horn: Pauli-Algebra und S_3-Permutationsalgebra. Eine algebraische und geometrische Einführung.

kostenloser Internet-Download unter: www.bookboon.com/de (pdf-Datei, ca. 2,4 MB)

Hinweis: Das Buch finanziert sich über die eingebundene Werbung. Bitte lassen Sie sich davon nicht irritieren.