

## Der Übergang von Wechsel- zu Drehstrom

Martin Erik Horn\*

\*bbw Hochschule des Bildungswerks der Wirtschaft Berlin-Brandenburg  
Leibnizstr. 11 - 13, 10625 Berlin — www.bbw-hochschule.de  
mail@martinerikhorn.de

### Kurzfassung

Im Physikunterricht der Sekundarstufe II kann im Themenbereich der elektromagnetischen Wechselwirkungen außer der standardmäßig vorgesehenen Behandlung des Wechselstroms auch vertiefend auf den Drehstrom eingegangen werden. Dabei überzeugen die anwendungsorientierten und technisch interessanten Einsatzmöglichkeiten der Drehstromphysik.

Die mathematisch-konzeptuelle Beschreibung des Drehstroms als Dreiphasenstrom ist jedoch kognitiv anspruchsvoll und stellt Lehrende vor das Problem einer sachangemessenen Mathematisierung. In diesem Beitrag wird aufgezeigt, wie ein konzeptueller Übergang von Wechsel- zu Drehstromvorstellungen nicht nur anhand einer physikalischen Modellierung, sondern parallel dazu auch mit Hilfe verschiedener mathematischer Ansätze gelingen kann. Dabei können auch Aspekte der Geometrischen Algebra eine didaktisch überzeugende Rolle spielen.

### 1. Historische Einordnung

Physikgeschichtlich spielt die Stadt Frankfurt am Main eine wichtige Rolle: Hier wurde im Rahmen der internationalen elektrotechnischen Ausstellung am 24. August 1891 weltweit zum ersten Mal Dreiphasen-Wechselstrom über eine größere Entfernung übertragen. Der Generator befand sich 175 km entfernt im Kraftwerk Lauffen am Neckar.



Abb.1: Briefmarke aus dem Jahr 1991 aus Anlass des hundertjährigen Jubiläums der Drehstromübertragung

Die damals erstmalig erprobte Technik spielt heute in unserem Alltag eine enorme Rolle. Nahezu der gesamte Strombedarf Deutschlands wird als Dreiphasen-Wechselstrom im Stromnetz zur Verfügung gestellt, unter anderem erkennbar an den drei Leitungskabeln, die zur Stromübertragung genutzt werden (siehe Abb. 1).

Diese enorme technische und gleichzeitig enorme wirtschaftliche Bedeutung kommt auch dadurch zum Ausdruck, dass dieses Ereignis von 1891 bereits

mehrmals auf Briefmarken<sup>1</sup> gewürdigt wurde (siehe auch Abb. 2).



Abb.2: Briefmarke aus dem Jahr 1966 aus Anlass des 75-jährigen Jubiläums der Drehstromübertragung

Darüber hinaus beruhen zahlreiche weitere technische Anwendungen auf der Idee drei- und mehrphasiger Ströme. So ist die Magnetschwebetechnik ohne ein Verständnis solcher Drehströme kaum denkbar.

<sup>1</sup> Die Nutzung von Briefmarken zur Veranschaulichung physikalischer und physikgeschichtlicher Sachverhalte habe ich mir von [1, S. 256] abgeschaut. Diese Illustrationsart hat mich so sehr überzeugt, dass ich im Folgenden einige Erläuterungen zur Physik des Drehstroms unter Bezug auf diese Briefmarkendarstellungen geben werde.

## 2. Schulische Einordnung

Noch vor einigen Jahrzehnten war die Physik des Drehstroms selbstverständlicher Bestandteil von Rahmenplänen und Schulbüchern der Sekundarstufe I (siehe beispielsweise [2, S. 27], [3, S. 360/361], [4, S. 179], [5, 284/285], [6, S. 336]).

Dementsprechend gut sind auch die experimentellen Grundlagen der Drehstromphysik für den Unterricht aufbereitet. Zahlreiche sehr schöne Experimente zu diesem Themenbereich finden sich etwa bei Wilhelm [7], [8], der diese Schülerversuche in Projektform für die 10. Jahrgangsstufe konzipiert hat.

Mittlerweile hat jedoch ein inhaltliches Umdenken in Bezug auf die schulische Einordnung des Drehstroms in den Physikunterricht stattgefunden. Zum einen erzwang die in etlichen Bundesländern erfolgte Schulzeitverkürzung eine damit einhergehende inhaltliche Neuausrichtung und Neustrukturierung der nun verringerten zeitlichen Ressourcen.

Zum anderen zeigten zahlreiche empirische Untersuchungen entsprechender Curricula [9, S. 226], dass die Grundlagen der elementaren Elektrizitätslehre und insbesondere ein tragfähiges Verständnis des Spannungsbegriffs bei zahlreichen Mittelstufenschülern nur bedingt vorhanden waren [9, S. 314 ff]. Auch dies führte dazu, Rahmenpläne und Schulbücher umzustellen.

Heute ist die Drehstromphysik üblicherweise Teil der Sekundarstufe II und dort tendenziell auch eher Teil fakultativer Wahlpflichtveranstaltungen. So sprechen beispielsweise die Autoren einer Handreichung zur Umsetzung der gemeinsamen Rahmenlehrpläne in Berlin und Brandenburg ausdrücklich nur von einer „Erweiterungsmöglichkeit zur Drehstromtechnik“ [10, S. 8], wenn Generatoren im Unterricht exemplarisch in verschiedenen Einsatzbereichen beschrieben werden sollen.

Dementsprechend finden sich in den für solche Unterrichtskonzeptionen entworfenen Physik-Oberstufenbüchern Ausarbeitungen zur Drehstromphysik in unterschiedlicher fachlicher Tiefe (siehe beispielsweise [11, S. 186-188], [12, S. 117], [13, S. 294-295], [14, S.148-149]).

## 3. Zweiphasen-Wechselstrom

Eine Briefmarke zur Veranschaulichung des klassischen Wechselstroms hätte (in Anlehnung an die Gestaltung der Drehstrombriefmarke) in etwa das Aussehen von Abbildung 3.

Nicht erkennbar ist allerdings, wie der Spannungsabgriff erfolgt. Da dieser Spannungsabgriff jedoch im Zusammenspiel der beiden Spulen entscheidend für die Gesamtspannung ist, wird die Situation in den Abbildungen 4 und 5 noch einmal differenziert dargestellt. Während an der ersten Spule (siehe Abb. 4 und 5) eine sinusförmige Wechselspannung von

$$U_1(t) = U_0 \cdot \sin(\omega t) \quad \{1\}$$

abgegriffen wird, liegt aufgrund der zeitlichen Verzögerung einer halben Periodendauer an der zweiten Spule eine in der Phase um  $\pi$  verschobene Wechselspannung von

$$U_2(t) = U_0 \cdot \sin(\omega t - \pi) = -U_0 \cdot \sin(\omega t) \quad \{2\}$$

an. Symbolisiert die fiktive Briefmarke von Abbildung 3 eine eventuelle Schaltung der beiden Spulen in Reihe (Abb. 4: das spitze Spulenende der ersten Spule wird leitend mit dem flachen Spulenende der zweiten Spule verbunden), so folgt die gegenseitige Kompensation der beiden Teilspannungen und eine Gesamtspannung von Null:

$$U_{\text{ges}}(t) = U_1(t) + U_2(t) = 0 \text{ V} \quad \{3\}$$

Eine Spannungsverdopplung tritt erst dann ein, wenn eine Umpolung der zweiten Spule und damit eine Vorzeichenumkehr von  $U_2(t)$  erfolgt (siehe Abb. 5).

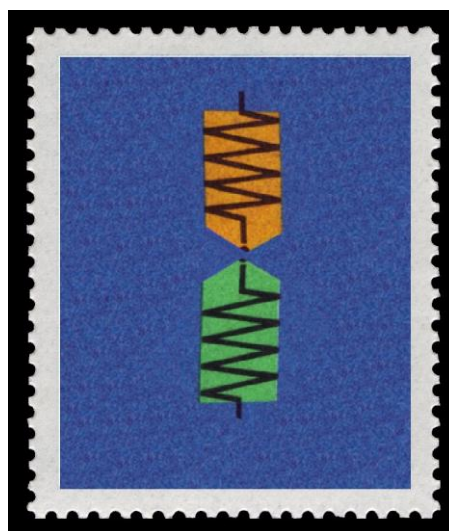


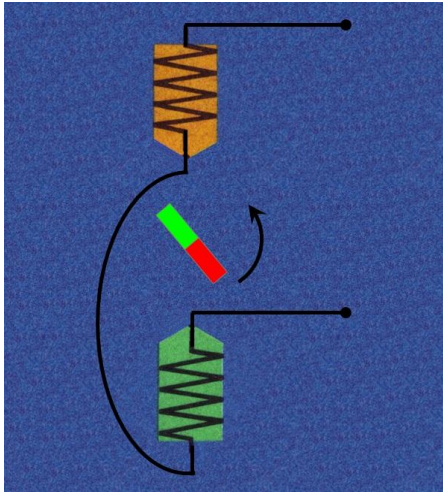
Abb.3: Fiktive Briefmarke zur Veranschaulichung von Wechselstrom

Der Wechselstrom, über den wir uns in der Schule mit den Schülerinnen und Schülern unterhalten, ist in dieser Darstellung tatsächlich ein Zweiphasen-Wechselstrom mit zusätzlicher Vorzeichenumkehr bei einer der beiden Spulenspannungen:

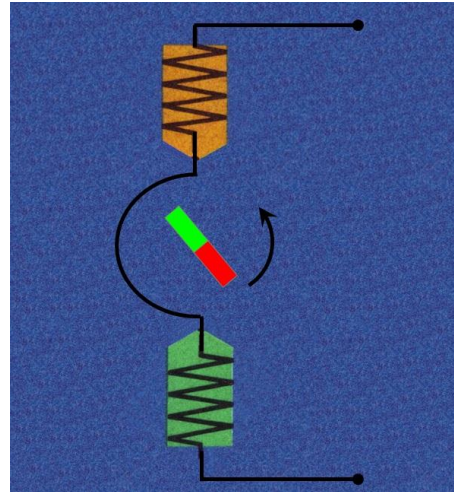
$$U_{\text{Wechsel}}(t) = U_1(t) - U_2(t) = 2 U_0 \cdot \sin(\omega t) \quad \{4\}$$

Eine ausführliche Diskussion dieses Sachverhalts eröffnet beim Übergang zum Dreiphasen-Wechselstrom mehrere didaktisch gangbare Wege. Dazu ist es jedoch notwendig, die Spulendenen zu unterscheiden und mit den Lernenden die Phasenlage der in den Spulen induzierten Wechselspannungen zu klären.

Durch eine ausführliche Diskussion dieser simplen Anordnung kann an dieser Stelle bereits eine didaktische Brücke zur Einführung eines Neutralleiters, der beim Dreiphasen-Wechselstrom eine entscheidende Rolle spielen wird, geschaffen werden. Zu die-



**Abb.4:** Sich gegenseitig kompensierende Zweiphasen-Wechselspannungen ( $\Delta\varphi = \pi$ )



**Abb.5:** Sich gegenseitig verstärkende Zweiphasen-Wechselspannungen ( $\Delta\varphi = 0$ )

sem Zweck betrachten wir eine fiktive Briefmarke, bei der die beiden Spulen sich nicht gegenüber stehen (siehe Abb. 6), sondern in identischer Ausrichtung an nahezu identischer Stelle parallel im Generator platziert sind.

Nun sind die beiden induzierten Wechselspannungen der ersten Spule  $U_1(t)$  und der neuen, in Abb. 6 lila markierten Spule  $U_3(t)$  zu jedem Zeitpunkt gleich:

$$U_1(t) = U_3(t) = U_0 \cdot \sin(\omega t) \quad \{5\}$$

Eine Addition dieser beiden Wechselspannungen in Analogie zu Gleichung {3} erhält man wieder durch eine Reihenschaltung: Das spitze Spulenende der ersten, orange-gelben Spule wird leitend mit dem flachen Spulenende der neuen, lilafarbenen Spule verbunden (siehe Abb. 7). Hier tritt eine Spannungsverdopplung auf, da beide Spulenspannungen phasengleich sind:

$$U_{\text{ges}}(t) = U_1(t) + U_3(t) = U_0 \cdot \sin(\omega t) \quad \{6\}$$

Für den im folgenden Abschnitt dargestellten Übergang zum Drehstrom didaktisch relevant ist jedoch auch die Diskussion der alternativen Kabelführung (siehe Abb. 8), bei der die beiden spitzen Spulenden leitend verbunden werden.

Dadurch erhalten wir wieder eine Vorzeichenumkehr (siehe Gl. {7}), die einer Phasenverschiebung beider Spulenspannungen um  $\pi = 180^\circ$  äquivalent ist. Die beiden Teilspannungen kompensieren sich bei identischem Spulenaufbau zu jedem Zeitpunkt vollständig und es ergibt sich eine Gesamtspannung von Null:

$$U_{\text{ges}}^*(t) = U_1(t) - U_3(t) = 0 \text{ V} \quad \{7\}$$

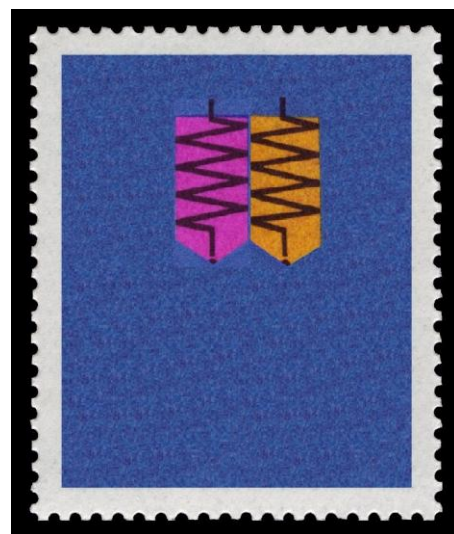
Diese zweite Kabelführung kann als zweiter Ausgangspunkt einer diskursiven Annäherung an eine Dreiphasen-Wechselspannung genutzt werden. In

Abbildung 8 ist im Vorgriff auf diese diskursive Annäherung der Neutralleiter bereits gestrichelt eingefügt.

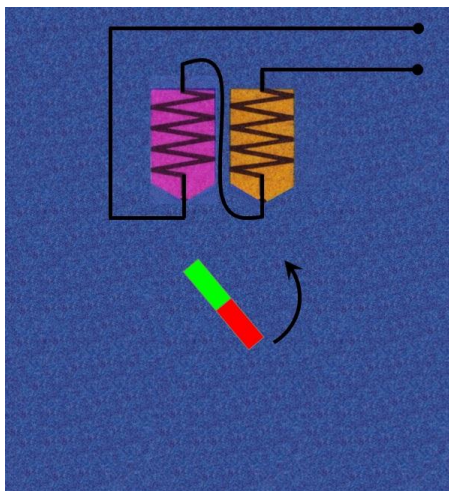
#### 4. Der Übergang von Wechsel- zu Drehstrom

Prinzipiell ergeben sich zwei verschiedene Möglichkeiten, den Übergang zum Drehstrom konzeptionell auszugestalten. Die erste Möglichkeit besteht darin, mit einer einzigen Spule zu beginnen und sodann in einem zweiten Schritt zwei weitere Spulen unter Winkeln von  $120^\circ$  und  $240^\circ$  zu platzieren.

Im dritten und letzten Schritt können dann die Leitungsverbindungen diskutiert und etwa unter dem Aspekt der Leitungsökonomie (und der Vorgabe, möglichst wenig Kabelmaterial zu verbrauchen) ein Neutralleiter motiviert werden, der die zum Magneten zeigenden Spulendenen kurzschließt.



**Abb.6:** Fiktive Briefmarke zur Veranschaulichung einer identischen Spulenpositionierung



**Abb.7:** Sich gegenseitig verstärkende Zweiphasen-Wechselspannung bei identischer Spulenposition

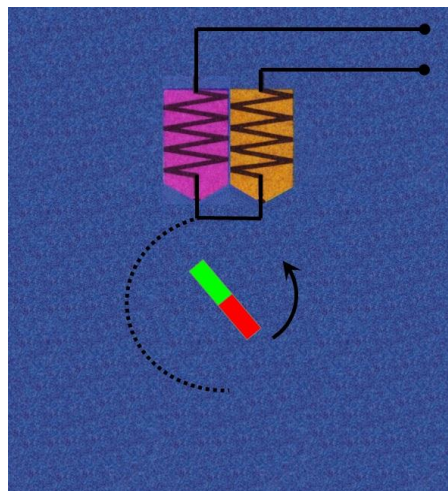
Diesen ersten möglichen Weg eines Einstiegs in den Drehstrom gehen zahlreiche Schulbücher (siehe z.B. [3, S. 360 mit Abb. 4, 5, 6]). In diesem Fall werden allerdings die Spulenpositionen nicht argumentativ ermittelt oder in einer diskursiven Annäherung anderen Spulenpositionen gegenüber gestellt, sondern unter Verweis auf technische Vorgaben (z.B. „In der Technik besitzen Generatoren meist drei Induktionsspulen“ [3, S. 360]) ohne intensives Hinterfragen eingeführt.

Die zweite Möglichkeit vermeidet dieses Defizit. Sie besteht darin, ausgehend von der in Abb. 4 gezeigten Situation gleich mit zwei Spulen zu beginnen und die Spulenpositionen zu variieren. Die Ausgangssituation ist klar: bei einem Winkel von  $\alpha = 180^\circ$  (sich gegenüberstehende Spulen in Reihenschaltung, siehe Abb. 4) kompensieren sich die beiden induzierten Spulenspannungen aufgrund der Phasenverschiebung von  $\pi$  zu jedem Zeitpunkt und die Amplitude der Gesamtspannung liegt bei 0 V.

Auch die andere Extremposition ist einsichtig: Liegen beide Spulen an derselben Stelle mit  $\alpha = 0^\circ$ , so sind die Wechselspannungen der in Reihe geschalteten Spulen (siehe Abb. 7) immer in Phase, so dass sich die Amplitude der Gesamtspannung zu  $2U_0$  verdoppelt.

Die Variation der Spulenposition ist in Abbildung 9 gezeigt. Auch hier sind die beiden Spulen wieder in Reihe geschaltet: Das spitz gekennzeichnete Spulende der ersten Spule (das zum Magneten zeigt) ist mit dem flach gekennzeichneten Spulende der zweiten Spule (das vom Magneten weg gerichtet ist) leitend verbunden.

Die mit den Lernenden zu diskutierende Kernfrage lautet dann: „Bei welcher Position erreicht die Amplitude der Gesamtspannung den ursprünglichen Wert der Amplitude  $U_0$  von genau einer Spule?“



**Abb.8:** Sich gegenseitig kompensierende Zweiphasen-Wechselspannung bei identischer Spulenposition

Diese Frage kann zum einen sehr überzeugend experimentell gelöst werden, indem die korrekte Spulenposition von  $\alpha = 120^\circ$  durch einfache Messungen der Gesamtspannung bei Variation des Spulenwinkels  $\alpha$  ermittelt wird.

Zum anderen sind auch die trigonometrischen Kenntnisse der Schülerinnen und Schüler (in der Regel spätestens ab der 10. Jahrgangsstufe) so gut, dass eine mathematische Diskussion der Fragestellung erfolgreich durchgeführt werden kann. Ausgangspunkt einer solchen Diskussion sind die beiden in den Spulen induzierten Wechselspannungen, die aufgrund der zeitlichen Verzögerung von  $\frac{1}{3}T$  eine Phasenverschiebung von  $\frac{2}{3}\pi$  aufweisen:

$$U_1(t) = U_0 \cdot \sin(\omega t) \quad \{8\}$$

$$U_2(t) = U_0 \cdot \sin\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi\right) \quad \{9\}$$

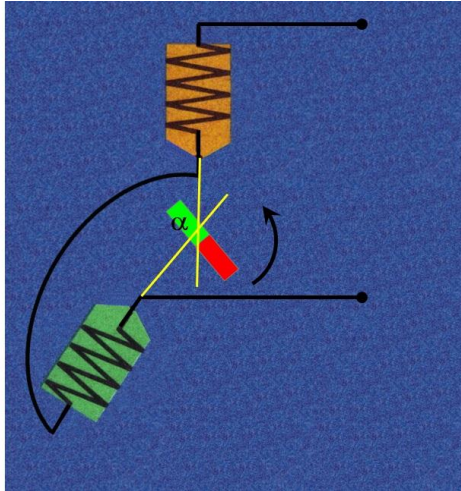
Da die beiden Spulen in Reihe geschaltet werden, müssen die Teilspannungen  $U_1(t)$  und  $U_2(t)$  zur Ermittlung der Gesamtspannung addiert werden. Diese Addition kann mit Hilfe der elementaren trigonometrischen Summenformel [15, S. 28]

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \cdot \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \quad \{10\}$$

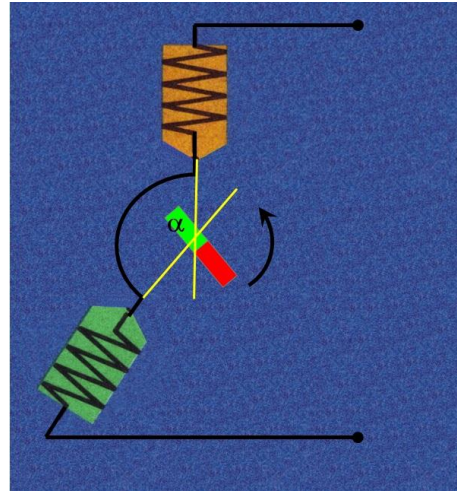
schrittweise vorgenommen werden:

$$\begin{aligned} U_1(t) + U_2(t) &= U_0 \left[ \sin(\omega t) + \sin\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi\right) \right] \\ &= U_0 \cdot 2 \sin\left(\omega t - \frac{1}{3}\pi\right) \cos\left(\frac{1}{3}\pi\right) \\ &= U_0 \cdot \sin\left(\omega t - \frac{1}{3}\pi\right) \end{aligned} \quad \{11\}$$

Dieses Ergebnis entspricht einer negativen Span-



**Abb.9:** Winkelvariation bei einer Zweiphasen-Wechselspannung mit Reihenschaltung der Spulen ( $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ )



**Abb.10:** Alternative Winkelvariation bei einer Zweiphasen-Wechselspannung ( $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ )

nungssumme von

$$U_1(t) + U_2(t) = -U_0 \cdot \sin\left(\omega t - \frac{4}{3}\pi\right) = -U_3(t) \quad \{12\}$$

Analog zu Abbildung 4 und Gleichung {3} erhält man also genau dann wieder sich insgesamt gegenseitig kompensierende Teilspannungen von

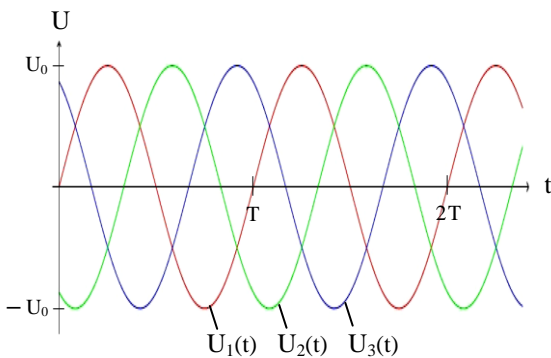
$$U_1(t) + U_2(t) + U_3(t) = 0 \text{ V} \quad \{13\}$$

wenn die beiden Spulen durch eine dritte Spule in Reihenschaltung im Winkel von  $\alpha_2 = 240^\circ$  ergänzt werden (siehe Abbildung 13). Die an einem Drehstromgenerator abfallenden Teilspannungen lauten somit vollständig:

$$U_1(t) = U_0 \cdot \sin(\omega t) \quad \{14\}$$

$$U_2(t) = U_0 \cdot \sin\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi\right) \quad \{15\}$$

$$U_3(t) = U_0 \cdot \sin\left(\omega t - \frac{4}{3}\pi\right) \quad \{16\}$$



**Abb.11:** Spannungsbeziehungen des Drehstroms

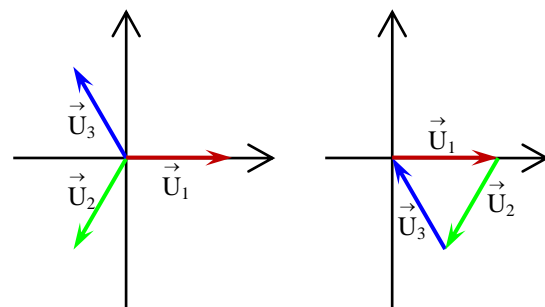
Graphisch sind die phasenverschobenen Wechselspannungen der drei Spulen in Abbildung 11 darge-

gestellt. Voraussetzung für gleiche Amplituden  $U_0$  ist dabei, dass die Spulen identisch aufgebaut sind.

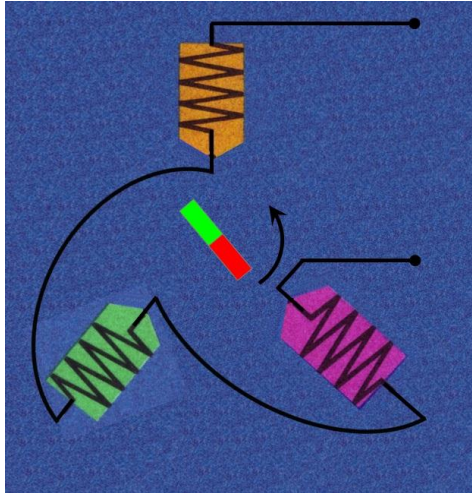
### 5. Zeigerdarstellungen

Ein schulisch sehr effektives Hilfsmittel, um diese Spannungsbeziehungen zu veranschaulichen, stellen Zeigerdiagramme dar. Standardmäßig werden diese zur Beschreibung von kapazitiven und induktiven Widerständen im Wechselstromkreis herangezogen [12, Abb.5, S 114], [13, Abb. 280.2, 282.2], [14, Abb. 153.1], [15, S. 128]. Besonders ausführlich behandeln Dorn und Bader [11] Zeigerdarstellungen und wenden diese auch im Kontext des Drehstroms [11, Abb. 186.1, 186.3, 188.1] explizit an.

Die an den drei Spulen abfallenden Spannungen werden dabei durch ihnen entsprechende Zeiger symbolisiert. So repräsentieren die in Abbildung 12a gezeigten Zeiger die Spannungen zum Zeitpunkt  $t = 0$ . In Abbildung 12b ist die Aufsummierung aller drei Spulenspannungen gezeigt, wodurch Gleichung {13} und Abbildung 13 eine Übersetzung in das Zeigerbild erfährt.



**Abb.12:** Einfache Zeigerbilder der Spannungsbeziehungen bei Phasenverschiebungen von  $\frac{2}{3}\pi$  und  $\frac{4}{3}\pi$   
 (a) Teilspannungen des Drehstroms {14}, {15} und {16}  
 (b) Spannungsaddition der Gleichung {13}



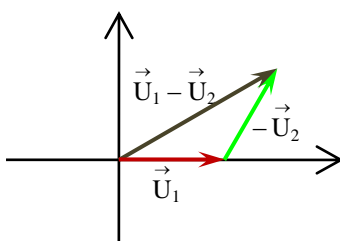
**Abb.13:** Reihenschaltung der Spulen bei einer Dreiphasenanordnung ( $\Delta\varphi_1 = \frac{2}{3}\pi$ ,  $\Delta\varphi_2 = \frac{4}{3}\pi$ )

Bei gleicher ohmscher Belastung, die beispielsweise durch Anschluss jeweils identischer Lämpchen erfolgt, entsprechen die Zeigerbilder der Spannungen den Zeigerbildern der Ströme (siehe auch [11, Abb. 186.3]).

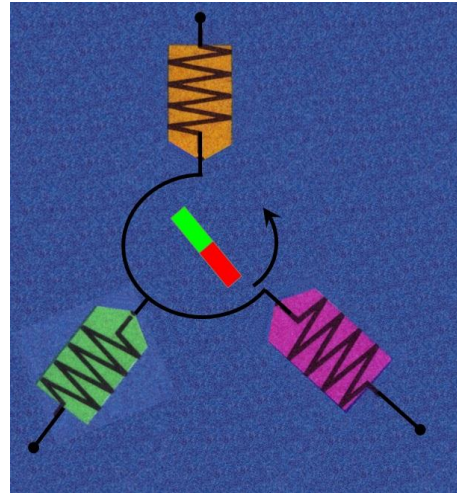
Durch Analogie zum bereits diskutierten Zweiphasen-Wechselstrom können weitere einfache Spannungsbeziehungen erarbeitet werden. Durch Umpolung wurde die durch Parallelschaltung verursachte Spannungsaddition eines Zweiphasen-Wechselstroms (siehe Gleichung {3}) in den technisch üblicherweise realisierten Fall der „Anti-Parallelschaltung“ und der damit mathematisch äquivalenten Spannungsubtraktion (siehe Gleichung {4}) überführt.

Ähnliches liefert eine Dreieckschaltung [11, S.188] beim Drehstrom. Die Spannung, die zwischen zwei Außenleitern eines Drehstromgenerators anliegt, ist experimentell wieder durch eine Winkelvariation zugänglich. Dabei wird der Winkel zwischen den gegenüberliegenden Spulen der Zweiphasen-Wechselspannung von Abbildung 5 allmählich in die Situation von Abbildung 8 überführt. Dieser Vorgang ist in Abbildung 10 graphisch angedeutet.

Bei einem Winkel von  $120^\circ$  zwischen beiden Spulen ergibt sich die gesuchte verkettete Spannung zwischen zwei Außenleitern, die im Zeigerbild von Ab-



**Abb.15:** Zeigerbild der verketteten Spannung  $U_1(t) - U_2(t)$



**Abb.14:** Spulenpositionierungen mit Neutralleiter einer Dreiphasen-Wechselspannung ( $\Delta\varphi_1 = \frac{2}{3}\pi$ ,  $\Delta\varphi_2 = \frac{4}{3}\pi$ )

bildung 15 dargestellt ist. Die rechnerische Ermittlung dieser verketteten Spannung verläuft analog zu Gleichung {11} und kann wieder mit Hilfe der elementaren trigonometrischen Summenformel [15, S. 28], die geringfügig umgeformt wird

$$\begin{aligned} \sin \alpha - \sin \beta &= \sin \alpha + \sin (-\beta) \\ &= 2 \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \end{aligned} \quad \{17\}$$

schrittweise vorgenommen werden:

$$\begin{aligned} U_1(t) - U_2(t) &= U_0 \left[ \sin(\omega t) - \sin\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi\right) \right] \\ &= U_0 \cdot 2 \sin\left(\frac{1}{3}\pi\right) \cos\left(\omega t - \frac{1}{3}\pi\right) \quad \{18\} \\ &= \sqrt{3} U_0 \cdot \cos\left(\omega t - \frac{1}{3}\pi\right) \\ &= \sqrt{3} U_0 \cdot \sin\left(\omega t + \frac{1}{6}\pi\right) \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis führt auf eine Spannungsamplitude von  $\sqrt{3} U_0$ , die auch mit Hilfe der Zeigerdarstellung von Abbildung 15 ermittelt werden kann. Sie entspricht dort der Länge des Differenzzeigers  $\vec{U}_1 - \vec{U}_2$ .

## 6. Geometrische Algebra der (3 x 3)-Matrizen

Bei allen Problemstellungen, die eine Verknüpfung von Geometrie und Algebra bedingen, kann die Geometrische Algebra als ein sehr effizientes und sehr erfolgreiches mathematisches Werkzeug eingesetzt werden. Hierunter fallen insbesondere auch elektrische Effekte, die ja (wie in den vorangegangenen Abschnitten gezeigt) geometrisch orientierte Zeigerdarstellungen und algebraisch orientierte Beschreibungen in vorzüglicher Weise verbinden.

Elektrische Erscheinungen und insbesondere die Elektrodynamik wurden im Kontext der Geometri-

schen Algebra bereits durch zahlreiche Autoren sehr gut aufgearbeitet [16], [17] und in Fachbüchern auf Hochschulniveau [18], [19], [20] didaktisch zugänglich dargestellt. Der Drehstrom kann also standardmäßig in die Sprache der Geometrischen Algebra übersetzt werden.

Im Folgenden werde ich dies auch tun, allerdings auf eine etwas ungewöhnliche Art und Weise. Denn während zahlreiche physikalische Effekte eine zweiwertige Symmetrie aufweisen, liegt der Physik des Drehstroms, wie schon die Briefmarke aus Abbildung 2 zeigt, eine dreiwertige Symmetrie zugrunde. Aus diesem Grund ist es sinnvoll, hier auch eine mathematische Herangehensweise zu wählen, die eine solche Symmetrie in natürlicher Form beschreibt.

Die Geometrische Algebra der  $S_3$ -Permutationsmatrizen stellt eine solche, in natürlicher Art und Weise dreiwertige Mathematik dar. Die Grundlagen dieser Version der Geometrischen Algebra und ihre einfache didaktische Darstellung finden Sie beispielsweise in [21], [22], [23], [24].

Die grundlegende Idee besteht dabei darin, die  $S_3$ -Permutationsmatrizen

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \{19\}$$

$$e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \{20\}$$

$$e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \{21\}$$

als Einheitsvektoren einer Ebene zu interpretieren, die jeweils einen Winkel von  $120^\circ$  zueinander einschließen. Diese Winkelbeziehungen folgen direkt aus der Reflexion der Einheitsvektoren  $e_1$ ,  $e_2$  und  $e_3$  aneinander, denn im Kontext der Geometrischen Algebra werden Einheitsvektoren auch als Generatoren von Reflexionen gedeutet.

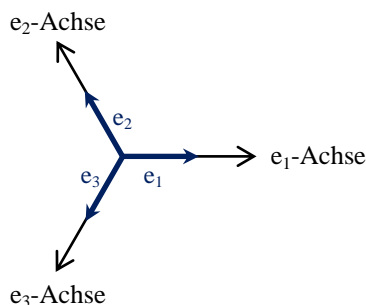


Abb. 16: Dreiachsiges Koordinatensystem der  $S_3$ -Permutationsalgebra in geometrischer Deutung

Anstelle des rechtwinkligen Koordinatensystems von Abbildung 12 wird so ein dreiachsiges Koordinatensystem gebildet, das durch die Einheitsvektoren aufgespannt wird (siehe Abbildung 16).

Da die Vektoren  $e_1$ ,  $e_2$  und  $e_3$  normiert sind und sich zum Einheitsvektor in Form der  $(3 \times 3)$ -Einheitsmatrix  $e_0$  quadrieren

$$e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = e_0 \quad \{22\}$$

können die drei Spannungszeiger von Abbildung 12a nun als

$$\bar{U}_1 = U_0 e_1 \quad \{23\}$$

$$\bar{U}_2 = U_0 e_3 \quad \{24\}$$

$$\bar{U}_3 = U_0 e_2 \quad \{25\}$$

geschrieben werden. Die Übertragung von Gleichung {13} bzw. Abbildung 12b in die Geometrische Algebra der  $(3 \times 3)$ -Matrizen

$$\bar{U}_1 + \bar{U}_2 + \bar{U}_3 = U_0 (e_1 + e_2 + e_3) = 0 \quad \{26\}$$

mit

$$N = e_1 + e_2 + e_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad \{27\}$$

zeigt, dass die an jeder Position mit 1 belegte  $(3 \times 3)$ -Matrix der Nullmatrix entspricht. In der Bootstrap-Theorie wird diese Matrix  $N$  gelegentlich als „demokratische Matrix“ bezeichnet. Da dieser Name missverständlich erscheint und geometrisch nicht unbedingt aussagekräftig ist, wird diese Bezeichnung hier vermieden.

Auch jedes Vielfache  $U_0 \cdot N$  ist der Nullmatrix  $\mathbf{0}$  äquivalent.

Die konzeptuellen Konsequenzen dieser Identifikation {27} reichen weit, denn die mit der Nullmatrix identische Matrix  $N$  kann in die Einheitsmatrix  $e_0$  und eine weitere Matrix  $\Theta$  zerlegt werden, so dass eine zur Skalargleichung

$$0 = 1 + (-1) \quad \{28\}$$

äquivalente Matrixgleichung

$$\mathbf{0} \cong N = e_0 + \Theta \quad \{29\}$$

bzw. ausführlicher geschrieben

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \{30\}$$

entsteht. Die mit dem Symbol eines eingekreisten

Minuszeichens „ominus“ bezeichnete Matrix  $\Theta$  kann somit als eine Größe betrachtet werden, die dem Skalar  $-1$  entspricht. Geometrisch kann  $\Theta$  darüber hinaus als Operator der Richtungsumkehr gedeutet werden.

Damit haben wir eine Mathematik konstruiert, die ohne Minuszeichen geschrieben und gedacht werden kann. Alles, was üblicherweise mit dem Symbol des Minuszeichens in der Schulmathematik ausgedrückt wird, kann im Kontext dieser Version der Geometrischen Algebra mit Hilfe der ominus-Matrix  $\Theta$  formuliert werden. Dass dieser erkenntnistheoretisch interessante Weg auch mathematisch tragfähig ist, zeigt die Übersetzung der in den vorigen Abschnitten diskutierten Beispiele in diese Geometrische Algebra der  $(3 \times 3)$ -Matrizen.

So lautet die Übersetzung der Gleichungen {11} und {12} ganz einfach:

$$\begin{aligned}\vec{U}_1 + \vec{U}_2 &= U_0 (e_1 + e_3) \\ &= U_0 (\underbrace{e_1 + e_2 + e_3}_N + \Theta e_2) \quad \{31\} \\ &= \Theta U_0 e_2 = -\vec{U}_3\end{aligned}$$

Ähnlich kompakt gestaltet sich die Ermittlung des Differenzzeigers der Gleichung {18}:

$$\begin{aligned}\vec{U}_1 - \vec{U}_2 &= U_0 (e_1 + \Theta e_3) \\ &= U_0 (e_1 + e_1 + e_2) \quad \{32\} \\ &= U_0 (2e_1 + e_2) = 2\vec{U}_1 + \vec{U}_3\end{aligned}$$

Dieses Ergebnis entspricht dem Zeigerbild von Abbildung 15. Da im Kontext der Geometrischen Algebra der  $(3 \times 3)$ -Matrizen jedoch auf negative Rechen- oder Vorzeichen verzichtet werden kann, kann die Deutung von Gleichung {32} mit Hilfe einer alternativen Zeigerdarstellung ohne Minuszeichen erfolgen (siehe Abbildung 17).

Der Betrag des Differenzzeigers von Gleichung {32} kann wie üblich mit Hilfe einer Quadrierung bestimmt werden:

$$\begin{aligned}(\vec{U}_1 - \vec{U}_2)^2 &= U_0^2 (2e_1 + e_3)^2 \\ &= U_0^2 (4e_0 + 2e_1e_3 + 2e_3e_1 + e_0) \\ &= U_0 (3e_0 + 2(\underbrace{e_1e_3 + e_3e_1 + e_0}_N)) \quad \{33\} \\ &= 3 U_0 e_0\end{aligned}$$

Dies führt wie bei Gleichung {18} auf eine Spannungsamplitude von

$$|\vec{U}_1 - \vec{U}_2| = \sqrt{3} U_0 e_0 \quad \{34\}$$

Damit ist gezeigt, dass die Grundlagen der Drehstromphysik mit Hilfe einer Geometrischen Algebra der  $S_3$ -Permutationsmatrizen formuliert werden können. Diese Formulierung mag zwar ungewohnt sein – sie ist aber mitnichten komplizierter und keines-

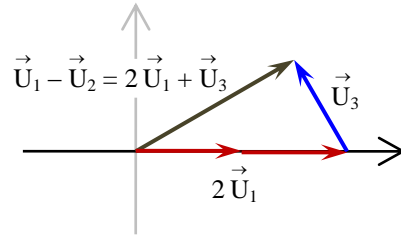


Abb.17: Alternatives Zeigerbild der verketteten Spannung  $U_1(t) - U_2(t)$

falls mathematisch anspruchsvoller als die Zeigerdarstellung. Sie ist anders, und dies ist Herausforderung und Chance zugleich.

## 7. Diskussion und Ausblick

Die Gedankengebäude von Mathematik und Physik sind trotz aller Unterschiede in Herangehensweise und geistesgeschichtlicher Einordnung verschränkt. Sie sind sogar in einer so komplexen Art und Weise verschränkt, dass sie sich in vielen Fragestellungen gegenseitig untrennbar durchdringen.

Aus dem Blickwinkel der Mathematik bieten sich Beispiele aus der Drehstromphysik zur Motivation und Veranschaulichung von Vektorbeziehungen und der komplexen Zahlen an. Immer wieder finden sich in anwendungsorientierten Mathematikbüchern Aufgaben (z.B. [25, S. 87]) mit Bezug zum Dreiphasen-Wechselstrom.

Die Physik des Drehstroms kann somit zur Fundierung mathematischer Konzepte dienen. Sie erhalten einen Realitätsbezug, der diese Konzepte tragfähiger und robuster macht. Auf den ersten Blick hat es den Anschein, dass auch in diesem Beitrag so vorgegangen wird: Die Drehstromphysik wird verwendet um eine neue Sichtweise der Geometrischen Algebra in Bekanntes einzubetten und so zum Verständnis der Geometrischen Algebra der  $(3 \times 3)$ -Matrizen beizutragen.

Doch umgekehrt tragen in gleicher Art und Weise mathematische Konzepte zum Verständnis der Physik bei. Am Beispiel des Drehstroms wird dies sehr gut im eingangs erwähnten Briefmarkenbuch von Treitz klar. Ohne Zeigerdarstellungen und trigonometrische Beziehungen ist der Drehstrom kaum zu verstehen [1, S. 254-256].

Tritt nun ein neues mathematisches Konzept in ein physikalisches Erklärungsmuster, gewinnen wir eine neue Perspektive auf den physikalischen Sachverhalt, der er- und geklärt wird. Genau dies passiert bei der hier beschriebenen Nutzung von  $S_3$ -Permutationsmatrizen.

Diese werden nicht nur mit Hilfe des Drehstroms beleuchtet. Auch der Drehstrom wird durch sie heller beleuchtet und besser verstanden als ein Strom, dem Richtungsbeziehungen in ganz anderer Form zugrunde liegen. Das durch positive und negative



Ladungen physikgeschichtlich ausgebildete und stark eingeprägte Bild von Elektrizität als einem typisch dualen, zweiwertigem Konstrukt wird ergänzt durch ein Bild, das dreiwertige und sogar multipolare Facetten zulässt.

Dabei stehen wir mit diesem neuen mathematischen Erklärungsmuster erst am Anfang. Stromflüsse und Leistungsabgriffe bei Drehstromschaltungen wurden mit Hilfe dieses Konzeptes noch nicht diskutiert. Dies bleibt ein in der Zukunft noch aufzuarbeitender Themenbereich.

Und trotz aller Anwendungsanbindung ist Ihnen als Leserin und Leser sicher nicht entgangen, welche erkenntnistheoretischen Aspekte mir für eine zukünftige Diskussion wichtig erscheinen: eine funktionierende Mathematik ohne Minuszeichen ist keine Selbstverständlichkeit, sondern eine kognitive Herausforderung und ein konzeptuelles Highlight, über das es nachzudenken lohnt.

Die Verknüpfung mit Symmetriebetrachtungen macht diese Sache umso spannender. Ist unsere physikalische Welt doch so stark durch duale Beziehungen geprägt, dass dreiwertige, tripolare Beziehungen aufgrund ihrer ungewohnten Struktur uns oft überraschen. Das ist beim Drehstrom nicht anders als bei Quarks. Sie sind dreiwertig und uns ein Rätsel, dem wir uns durch neue mathematische Perspektiven vielleicht besser anzunähern lernen.

Unter Umständen sind es nicht nur die eingefahrenen und gut ausgebauten Hauptverkehrsstraßen der konventionellen Mathematik, die uns in die Zukunft führen werden, sondern es sind wahrscheinlich auch scheinbare Umwege und Sackgassen, die sich manches Mal als mathematische Hauptverkehrsstraßen der Zukunft erweisen können.

## 8. Literatur

- [1] Treitz, Norbert (2007): Brücke zur Physik. Korrigierter Nachdruck der 3. vollständig überarbeiteten Auflage, Wissenschaftlicher Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main.
- [2] Duit, Reinders; Häußler, Peter; Mikelskis, Helmut; Westphal, Walter (1995): Physik – Um die Welt zu begreifen. Ein Lehrbuch für die Jahrgangsstufen 9 und 10 Niedersachsen, herausgegeben vom IPN/Institut für die Pädagogik der Naturwissenschaften, Verlag Moritz Diesterweg, Frankfurt am Main und Konkordia Verlag, Bühl.
- [3] Boysen, Gerd; Glunde, Hansgeorg; Heise, Harri; Muckenfuß, Heinz; Schepers, Harald; Wiesmann, Hans-Jürgen (1991): Physik für Gymnasien. Sekundarstufe I, Länderausgabe A – Gesamtband. Cornelsen-Verlag, Berlin.
- [4] Born, Gernot; Hübscher, Heinrich; Lochhaas, Horst; Pradel, Günter; Vorwerk, Bernd (1983): Querschnitt Physik und Technik. Westermann-Verlag, Braunschweig.
- [5] Kuhn, Wilfried (Hrsg.) (1990): Physik, Band 1. Westermann-Schulbuchverlag, Braunschweig.
- [6] Bergmann, Friedrich; Dmoch, Norbert; Farber, Max-Ulrich; Grill, Kurt; Ihne, Walter; Lottermoser, Jürgen; Lübke, Wolfgang; Salm, Wolfgang; Zöllner, Wolfgang (1987): Einführung in die Physik. Sekundarstufe I, Ausgabe E, zweite neubearbeitete Auflage, Verlag Moritz Diesterweg, Frankfurt am Main.
- [7] Wilhelm, Thomas (2007): Rotierende Teelichter, Linearmotore und schwebende Scheiben – Faszinierende Induktionsmotore zum einfachen Nachbau im Unterricht. In: Volkhard Nordmeier, Arne Oberländer, Helmuth Grötzebach (Hrsg.): Didaktik der Physik, Beiträge zur Frühjahrstagung in Regensburg, Tagungs-CD des Fachverbands Didaktik der Physik der Deutschen Physikalischen Gesellschaft, LOB – Lehmanns Media, Berlin.
- [8] Wilhelm, Thomas (2009): Projekt „Induktionsmotore“. In: Ernst Kircher, Raimund Girwitz, Peter Häußler: Physikdidaktik. Theorie und Praxis. Zweite Auflage, Kap. 8.2, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, S. 354 – 370.
- [9] Willer, Jörg (2003): Didaktik des Physikunterrichts. Wissenschaftlicher Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main.
- [10] Böhlemann, Ralf; Braun, Wolf-Dieter; Mai, Björn; Meyer, Kurt-Albrecht; Pechstein, Oliver; Reichl, Thomas (2008): Anregungen zur Umsetzung des Rahmenlehrplans Physik, Sekundarstufe II, Bildungsregion Berlin-Brandenburg. Landesinstitut für Schule und Medien Berlin-Brandenburg, Ludwigsfelde-Struveshof.
- [11] Dorn, Friedrich; Bader, Franz (Hrsg.) (1976): Physik – Oberstufe, Band E. Hermann Schroedel Verlag, Hannover.
- [12] Bayer, Reinhard; Bredthauer, Wilhelm; Bruns, Klaus Gerd; Klar, Gunter; Lichtfeldt, Michael; Schmidt, Martin; Wessels, Peter (1997): Impulse Physik 2, Klasse 12 – 13 der Gymnasien. Ernst Klett Verlag, Stuttgart.
- [13] Kuhn, Wilfried (Hrsg.) (1990): Physik, Band 2, Teilband 12/13. Westermann-Schulbuchverlag, Braunschweig.
- [14] Diehl, Bardo; Erb, Roger; Heise, Harri; Kottaus, Udo; Lindner, Klaus; Schlichting, Hans-Joachim; Schmalhofer, Claus; Schön, Lutz-Helmut; Schröder, Klaus; Schulze, Helmke; Schulze, Peter; Tews, Wolfgang; Tillmanns, Peter; Winter, Rolf (2008): Physik Oberstufe, Gesamtband. Cornelsen-Verlag, Berlin.
- [15] Pehle, Tilman (Red.) (2011): Das große Tafelwerk interaktiv 2.0. Formelsammlung für die Sekundarstufen I und II. Cornelsen-Verlag/Volk und Wissen, Berlin.
- [16] Hestenes, David (2002): Oersted Medal Lecture. Reforming the Mathematical Language of Physics. In: American Journal of Physics, Vol. 71, No. 2, S. 104 – 121.

- [17] Vold, Terje (1993): An Introduction to Geometric Calculus and its Application to Electrodynamics. In: American Journal of Physics, Vol. 61, No. 6, S. 505 – 513.
- [18] Snygg, John (1997): Clifford Algebra. A Computational Tool for Physicists. Oxford University Press, New York, Oxford.
- [19] Baylis, William (2002): Electrodynamics. A Modern Geometric Approach. 2. Auflage, Birkhäuser-Verlag, Boston, Basel.
- [20] Doran, Chris; Lasenby, Anthony (2003): Geometric Algebra for Physicists. Cambridge University Press, Cambridge.
- [21] Horn, Martin Erik (2012): Eine andere Geometrische Algebra. In: Helmuth Grötzebauch, Volkhard Nordmeier (Hrsg.): PhyDid B – Didaktik der Physik, Beiträge zur DPG-Frühjahrstagung des Fachverbands Didaktik der Physik in Mainz, Beitrag 7.02.
- [22] Horn, Martin Erik (2012): Die Geometrische Algebra der  $(3 \times 3)$ -Matrizen. In: Matthias Ludwig, Michael Kleine (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2012, Tagungs-CD der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, S. 393 – 396 und Beiträge zum Mathematikunterricht 2012, Tagungsband der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, Band 1, S. 393 – 396, WTM-Verlag, Münster.
- [23] Horn, Martin Erik (2012): Pauli-Algebra und  $S_3$ -Permutationsalgebra – Eine algebraische und geometrische Einführung. Elektronische Veröffentlichung unter [www.bookboon.com/de](http://www.bookboon.com/de), Ventus Publishing ApS, London.
- [24] Horn, Martin Erik (2013): Die Raumzeit-Algebra der  $(3 \times 3)$ -Matrizen. In: Sascha Bernholt (Hrsg.): Inquiry-based Learning – Forschendes Lernen. Beiträge zur Jahrestagung der GDGP in Hannover, Band 33, S. 320 – 322, Institut für die Pädagogik der Naturwissenschaften und Mathematik (IPN), Kiel.
- [25] Meyberg, Kurt; Vachnauer, Peter (1990): Höhere Mathematik 1. Differential- und Integralrechnung, Vektor- und Matrizenrechnung. Erster korrigierter Nachdruck, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.