

## Anwendung verschiedener Messmethoden bei der Analyse von Achterbahnfahrten

U. Backhaus\*, P. Gabriel\*

\*Fakultät für Physik, Universität Duisburg-Essen, [udo.backhaus@uni-due.de](mailto:udo.backhaus@uni-due.de), [patrik.gabriel@uni-due.de](mailto:patrik.gabriel@uni-due.de)

### Kurzfassung

In diesem Aufsatz werden Messwerte verglichen und ausgewertet, die mit einem GPS-Empfänger und mit einem Beschleunigungssensor bei Fahrten auf einer Holzachterbahn aufgezeichnet wurden. Es zeigt sich, dass die Daten des Beschleunigungssensors wegen der Überlagerung mit der Erdbeschleunigung nur dann kinematisch interpretiert werden können, wenn seine Orientierung relativ zur Richtung des Gravitationsfeldes während der ganzen Bewegung bekannt ist. Aus den Beschleunigungsdaten wird die Bewegung rekonstruiert.

Beschleunigungssensoren nehmen Messwerte im körpereigenen Ruhesystem auf, das in der Regel beschleunigt ist. Es wird deshalb dazu angeregt, die im Schulunterricht übliche Beschränkung neu zu überdenken, dynamische Probleme ausschließlich im Inertialsystem zu beschreiben.

### 1. Einleitung

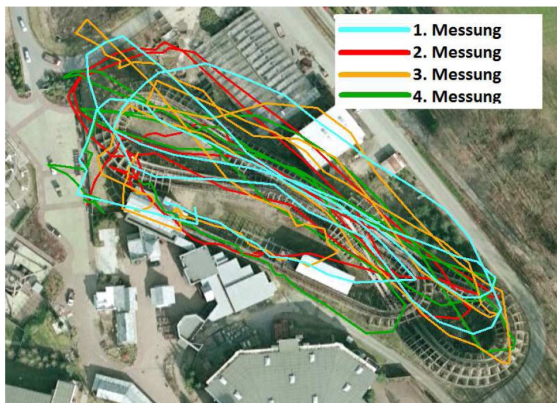


Abb. 1: Aufzeichnung von vier Fahrten mit einem Smartphone (HTC Wildfire S)

Die Erschließung neuer Messmethoden und -geräte zur Situierung des Mechanikunterrichts, wie z. B. Videoanalyse und GPS-Messungen, beschäftigen uns bereits seit einigen Jahren (z. B. [1], [2], [4], [5]). Neu hinzugekommen sind in letzter Zeit Smartphones und Tablet-PCs, die neben GPS-Empfängern auch Beschleunigungssensoren enthalten. Ausgangspunkt dieses Aufsatzes ist die Examensarbeit „Mechanik im Freizeitpark – Möglichkeiten und Grenzen moderner Messmethoden“, die im Jahr 2011 an der Universität Duisburg-Essen angefertigt worden ist ([10]). Wir konzentrieren uns deshalb auf den Vergleich und die Interpretation der Messwerte, die bei Fahrten auf einer Holzachterbahn mit verschiedenen Messgeräten und Messverfahren gewonnen wurden.

Mit dem Einsatz von Smartphones als physikalische Messgeräte, insbesondere mit den Möglichkeiten des eingebauten Beschleunigungssensors, haben sich bereits andere Autoren befasst (z. B. [6]-[8]). Dabei beschränkten sie sich jedoch auf relativ einfache Bewegungen, die auch auf herkömmliche Weise

leicht zu untersuchen sind. Eine kritische Auseinandersetzung mit der Frage, was Beschleunigungssensoren eigentlich messen und wie die von ihnen aufgenommenen Messwerte zu interpretieren sind, hat unseres Wissens bisher nicht hinreichend stattgefunden.

Wir konzentrieren uns hier auf diese Frage anhand von Beschleunigungsmessungen, die mit dem System Cobra4 der Firma Phywe<sup>1</sup> durchgeführt wurden. Entsprechende Messungen sind aber ebenso mit Smartphones möglich.

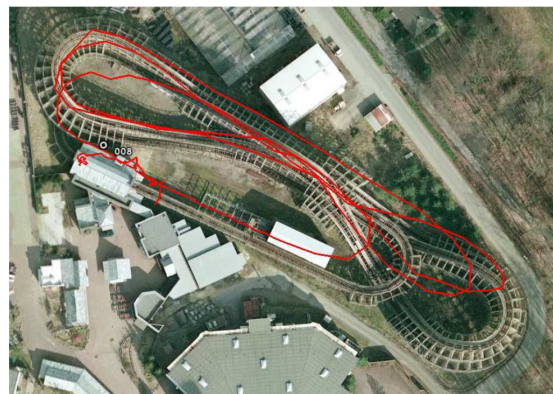


Abb. 2: Aufzeichnung einer Fahrt mit Garmin Etrex

### 2. Vergleich zwischen GPS- und Beschleunigungsdaten

Abbildungen 1 und 2 zeigen die Projektionen der Ortskurven auf den Boden als Importe in Google Maps. Sie zeigen eine nicht ganz befriedigende Übereinstimmung mit dem Google-Foto. Auch die Reproduzierbarkeit der Messungen ist nicht überzeugend. Beide Fehler sind im Wesentlichen auf die Messrate von nur einem Wert pro Sekunde zurückzuführen, die der heftigen Bewegung auf der Achterbahn nicht ganz gerecht wird. Abbildung 3 zeigt

<sup>1</sup> <http://www.phywe.de/174/Schule/Cobra4-kabellos-Messen.htm>

das Höhenprofil der Bahn, das auf der Messung mit dem barometrischen Höhenmesser des Garmin-Gerätes beruht.

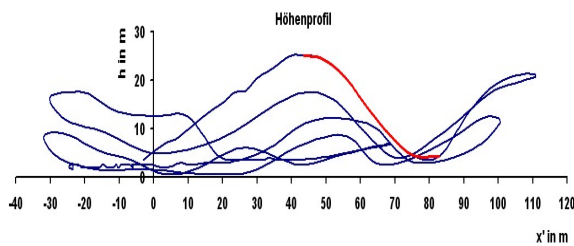


Abb. 3: Höhenprofil der Achterbahn „The Bandit“. Der „First Drop“ ist rot hervorgehoben.

Bei einer entsprechenden Fahrt wurden Daten mit einem Beschleunigungssensor aufgenommen (Abb. 4<sup>2</sup>), der so an der Brust des Experimentators befestigt war, dass eine der Achsen näherungsweise senkrecht auf der Richtung der Fahrbahnschienen stand und eine Achse etwa in Fahrtrichtung zeigte. Die Messwerte vor Beginn der Bewegung zeigen, dass die  $x^2$ -Achse des Sensors nach oben zeigt.

Um die Beschleunigungsdaten mit den GPS-Daten vergleichen zu können, müssen aus letzteren zunächst Geschwindigkeits- und Beschleunigungswerte abgeleitet werden (Abb. 5). Die Synchronisation der Messreihen gelingt durch Vergleich der Beschleunigungsdaten in  $x^2$ -Richtung mit den Höhenwerten des GPS-Empfängers (Abb. 6).

Überlagert man anschließend die Beträge der von den beiden Sensoren gemessenen Gesamtbeschleunigungen (Abb. 7), zeigen sich zwar gewisse Ähnlichkeiten, die Unterschiede sind jedoch so groß, dass sich die Frage stellt, wie die Messergebnisse des Beschleunigungssensors zu interpretieren sind.

### 3. Was messen Beschleunigungssensoren?

Ein Beschleunigungssensor besteht im Prinzip aus einem kleinen Probekörper, der von Federn in drei Raumrichtungen im Gleichgewicht gehalten wird (Abb. 8). Die Messwerte des Sensors sind ein Maß für die Kraft  $F_F$ , die diese Federn insgesamt auf den Körper ausüben: Der Sensor ist ein *Kraftmessgerät*.

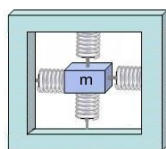


Abb. 8: Prinzipieller Aufbau eines Beschleunigungssensors

<sup>2</sup> Alle folgenden Diagramme (Abbildungen 4,-7, 9, 11-14) werden am Ende des Artikels zusammengefasst, um sie ausreichend groß darstellen zu können.

In der Ausgabe der Messwerte werden jedoch die Kräfte durch die Masse  $m$  des Probekörpers geteilt (und das Vorzeichen umgekehrt). Dadurch scheint es sich um Beschleunigungswerte zu handeln:  $a' = -F_F / m$ . Die Schwierigkeiten bei der Interpretation der Messwerte rühren daher, dass auf den Probekörper zusätzlich die Gravitationskraft  $F_g$  ausgeübt wird. Für die gesamte auf den Probekörper ausgeübte Kraft gilt deshalb

$$\vec{F}_{ges} = \vec{F}_F + \vec{F}_g \quad \{1\}$$

Die angezeigten Beschleunigungswerte geben also nicht die Beschleunigung des Probekörpers an, sondern die vektorielle Überlagerung von Beschleunigung und Schwerebeschleunigung:

$$\vec{a}' = \vec{g} - \vec{a} \quad \{2\}$$

Wenn sich der Probekörper relativ zu dem zu untersuchenden Körper in Ruhe befindet, erhält man auf diese Weise auch dessen Beschleunigung:

$$a = g - a' \quad \{3\}$$

Nur in einfachen Spezialfällen lässt sich deshalb aus den Messwerten eines Beschleunigungssensors auf die Beschleunigung der interessierenden Bewegung schließen:

- Bewegt sich der Körper geradlinig gleichförmig, zeigt der Sensor – je nach Orientierung – in allen Achsen von null verschiedene Werte an, deren Vektorsumme gerade gleich  $g$  ist.
- Wird der Körper (z. B. schräg nach oben) linear beschleunigt und ist der Sensor mit einer Achse parallel zum Schwerfeld ausgerichtet, dann werden in zwei Richtungen die entsprechenden Komponenten der Beschleunigung angezeigt (mit umgekehrtem Vorzeichen). In der dritten Richtung ist der Messwert von der Schwerebeschleunigung überlagert.
- Wenn bei einer gleichförmigen Kreisbewegung in einer horizontalen Ebene eine Achse des Sensors radial ausgerichtet ist, wird in dieser Richtung die Zentripetalbeschleunigung mit umgekehrtem Vorzeichen – also eigentlich die Zentrifugalbeschleunigung angezeigt. Die Vektorsumme der beiden anderen Messwerte ergibt die Erdbeschleunigung.
- Wenn bei der Bewegung eines Schwerependels eine Sensorachse radial ausgerichtet ist, ändert sich ständig ihre Orientierung relativ zur Schwerkraft. Die Beschleunigungsdaten sind nur schwer detailliert auszuwerten.

### 4. Rekonstruktion der Sensormesswerte aus den GPS-Daten

Um das Verständnis für die Messdaten von Beschleunigungssensoren zu vertiefen, werden in diesem Abschnitt GPS-Daten so mit der Erdbeschleunigung überlagert, dass sie mit den Sensordaten verglichen werden können. Die umgekehrte Umwandlung, die Ableitung von Beschleunigung und

Geschwindigkeit im Inertialsystem aus den Sensordaten ist Gegenstand des folgenden Abschnitts.

Da die GPS-Daten in einem raumfesten Koordinatensystem gemessen werden, können die daraus gewonnenen Beschleunigungswerte leicht mit der Erdbeschleunigung überlagert und so mit Hilfe von Gleichung (2) der Betrag des vom Beschleunigungssensor ausgehenden Vektors berechnet werden:

$$|\vec{a}'(t)| = |\vec{g} - \vec{a}(t)| \quad \{4\}$$

Tatsächlich stimmen die so berechneten Kurven befriedigend überein (Abb. 9).

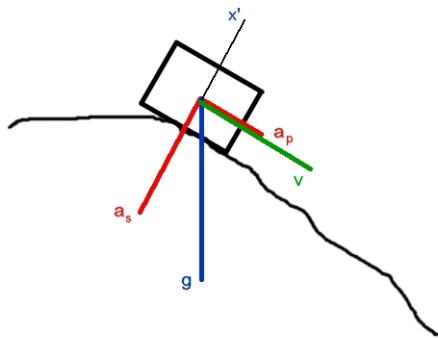


Abb. 10: Zur Definition der Beschleunigungskomponenten  $a_s$  ( $\hat{=} a_{\perp}$ ) und  $a_p$  ( $\hat{=} a_{\parallel}$ ). Die entsprechenden Komponenten der Erdbeschleunigung wurden der Übersichtlichkeit wegen weggelassen.

Der Vergleich der einzelnen Vektorkomponenten (Abb. 10) ist schwieriger. Er kann überhaupt nur gelingen, weil die Orientierung des Sensors einigermaßen bekannt ist (s. oben und Abbildung 4): Um die Anzeige  $a'_x(t)$  des Beschleunigungssensors aus den GPS-Daten zu berechnen, werden mit Hilfe der GPS-Geschwindigkeit  $v(t)$  zunächst die Komponenten in Bewegungsrichtung und dann die Komponenten quer dazu abgeleitet:

$$\vec{a}_{\parallel} = \vec{a}_v = \frac{\vec{a} \cdot \vec{v}}{v}, \quad \vec{g}_{\parallel} = \vec{g}_v = \frac{\vec{g} \cdot \vec{v}}{v} \quad \{5\}$$

$$a'_{x'} = |\vec{a}'_{\perp}| = |\vec{a}' - \vec{a}'_{\parallel}| = |\vec{g} - \vec{a} - (\vec{g}_{\parallel} - \vec{a}_{\parallel})| \quad \{6\}$$

Die so aus den GPS-Daten berechnete  $x'$ -Ausgabe des Beschleunigungssensors stimmt tatsächlich befriedigend mit den gemessenen Werten des Sensors überein (Abb. 11).

Die Annahme, dass der Beschleunigungssensor in einer der anderen Richtungen nur sehr kleine Werte anzeigt, weil die Schienen der Achterbahn stets so geneigt sind, dass keine Beschleunigungen quer zur Schiene auftauchen, bestätigt sich nicht.

## 5. Kombination von GPS- und Sensormesswerten am Beispiel des „First Drop“

Die GPS-Daten liegen mit einem zeitlichen Abstand von 1s vor. Diese Taktfrequenz ist für die z. T. heftigen Bewegungen auf der Achterbahn eigentlich deutlich zu klein. Das macht sich z. B. bemerkbar,

wenn energetische Fragen behandelt und dabei Höchstgeschwindigkeiten bestimmt werden sollen.

Abbildung 12 verdeutlicht das Problem am „First Drop“: In einer engen Kurve werden die Bogenlängen zu kurz gemessen – und deshalb zu kleine Werte für die Geschwindigkeit abgeleitet.

Da die Daten des Beschleunigungssensors mit einer Frequenz von 10Hz aufgenommen wurden, kann versucht werden, durch Kombination beider Messreihen eine höhere zeitliche Auflösung der Messung zu erzielen und dadurch zu einem besseren Wert für die Höchstgeschwindigkeit im Tal zu gelangen.

Um dieses Ziel zu erreichen, muss aus den Messdaten der beiden Sensoren die Bahnbeschleunigung, d. h. die Beschleunigung in Richtung der Bewegung, berechnet werden. Bei den Daten des Beschleunigungssensors sind dazu folgende Schritte erforderlich:

1. Aus den GPS-Daten werden die Richtung der Geschwindigkeit und damit die Orientierung des Beschleunigungssensors und die Parallelkomponente (Gleichung (5)) und die Vertikalkomponente der Erdbeschleunigung bestimmt:

$$\vec{g}_{\perp} = \vec{g} - \vec{g}_{\parallel} \quad \{7\}$$

2. Unter der Annahme, dass die Bewegungsebene lotrecht ist, ist das die Komponente der Erdbeschleunigung in Richtung der  $x'$ -Achse. Damit kann die Beschleunigung  $a_s$  senkrecht zur Schiene berechnet werden (Abb. 13):

$$a_s = a_{\perp} = g_{\perp} - a'_{x'} \quad \{8\}$$

3. Nimmt man die Vektorsumme der beiden anderen Sensormesswerte als Bahnbeschleunigung

$$a'_{\parallel} = \sqrt{a_y'^2 + a_z'^2}, \quad \{9\}$$

dann kann man mit Hilfe der Parallelkomponente der Erdbeschleunigung aus den Sensordaten auch die Bahnbeschleunigung  $a_{\parallel}$  berechnen:

$$a_{\parallel} = g_{\parallel} - a'_{\parallel} \quad \{10\}$$

4. Mit diesen, nun im 10Hz-Takt vorliegenden, Beschleunigungsdaten lassen sich schließlich Zwischenwerte für die Bahngeschwindigkeit berechnen (mit  $\Delta t = 0.1s$ ):

$$v_0 = v(t_0); \quad v_i = v_{i-1} + a_{\parallel}(t_0 + i\Delta t)\Delta t \quad \{11\}$$

Das in Abbildung 14 dargestellte Ergebnis dieser Prozedur zeigt, dass sich auf diese Weise ein um etwa 30% größerer Wert für die Höchstgeschwindigkeit ergibt<sup>3</sup>.

<sup>3</sup> Allerdings müssen die Beschleunigungsdaten für diese Anpassung zeitlich noch etwas verschoben werden.

## 6. Vorläufiges Fazit

Trotz einer Aufnahmefrequenz von nur 1Hz können Achterbahnfahrten mit GPS-Messungen recht befriedigend analysiert werden, wenn der Empfang nicht durch Stahlkonstruktionen beeinträchtigt wird (Holzachterbahn) und die Höhe barometrisch gemessen wird (siehe auch [2]).

Sehr viel einfacher sind Messungen mit Beschleunigungssensoren durchzuführen, wie sie in modernen Handys und Tablet-PCs eingebaut sind. Deren Daten sind jedoch schwieriger auszuwerten und zu interpretieren. Der wesentliche Grund dafür ist die vektorielle Überlagerung der Messwerte mit der Erdbeschleunigung, die sich nur herausrechnen lässt, wenn die Orientierung des Sensors relativ zum Gravitationsfeld während der ganzen untersuchten Bewegung bekannt ist.

In diesem Aufsatz wurde eine Möglichkeit aufgezeigt, bei komplexen Bewegungen die Ausgabedaten von Beschleunigungssensoren durch Vergleich mit GPS-Daten dadurch besser zu verstehen, dass GPS- und Beschleunigungsdaten wechselseitig ineinander umgerechnet werden. Dadurch wird es auch möglich, die 1Hz-GPS-Daten durch die 10Hz-Daten eines Beschleunigungssensors zu ergänzen, wenn beide Messungen *gleichzeitig* durchgeführt werden. Das Verfahren dazu ist allerdings anspruchsvoll.

Einige der in den hier beschriebenen Untersuchungen aufgetretenen Schwierigkeiten (Auswahl der entsprechenden Zeitintervalle, Synchronisation) beruhen darauf, dass sich die Messdaten nicht *auf dieselbe* Fahrt, sondern nur auf (nachfolgende) *entsprechende* Fahrten beziehen.

Wenn man Gleichung (3) mit der Masse  $M$  des sich bewegenden Körpers multipliziert und umstellt,

$$M \underline{a}' = M \underline{g} - M \underline{a}, \quad \{12\}$$

dann kann man sie folgendermaßen interpretieren:

$$\underline{F}'_{ges} = \underline{F}_g + \underline{F}_T \quad \{13\}$$

Ein Beschleunigungssensor ist ein Kraftmessgerät, das die im Ruhesystem des untersuchten Körpers – einem beschleunigten Bezugssystem – auf den Körper ausgeübte Gesamtkraft misst. Dabei ist  $\underline{F}_T$  die durch die Beschleunigung des Bezugssystems auftretende Trägheitskraft<sup>4</sup>.

Eine solche Interpretation setzt allerdings eine Behandlung beschleunigter Bezugssysteme voraus. Messungen an lebensweltlichen Bewegungen mit heute weit verbreiteten Beschleunigungssensoren legen es deshalb nahe, die seit Langem übliche Vernachlässigung von Bewegungsbeschreibungen in Nicht-Inertialsystemen zu überdenken (siehe auch [3]). Gerade wenn Bewegungen des eigenen Körpers untersucht werden, könnten so Messungen sehr viel

näher an der *Wahrnehmung* und damit näher an der Lebenswelt der Schüler interpretiert werden.

## 7. Literatur

- [1] Backhaus, U. (2005): Alltagsmechanik mit GPS, Vorträge der DPG in Berlin: <http://www.didaktik.physik.uni-duisburg-essen.de/~backhaus/publicat/Alltagsmechanik.pdf>
- [2] Backhaus, U., Braun, T. (2009): GPS-Messungen im Freizeitpark. Vorträge der DPG in Bochum: <http://www.didaktik.physik.uni-duisburg-essen.de/~backhaus/publicat/GPSMessungenimFreizeitpark.pdf>
- [3] Backhaus, U. (2010): Gezeiten und Bezugssysteme, Vorträge der DPG in Hannover: <http://www.phydid.de/index.php/phydid-b/article/view/220/280>
- [4] Backhaus, U., Gabriel, P. (2011): Einsatzmöglichkeiten moderner GPS-Geräte im Mechanikunterricht. Vorträge der DPG in Münster: <http://www.phydid.de/index.php/phydid-b/article/view/318/438>
- [5] Ehlers, C., Backhaus, U. (2006): Analyse von Alltagsbewegungen mit GPS. Vorträge der DPG in Kassel: <http://www.didaktik.physik.uni-duisburg-essen.de/~backhaus/publicat/GPS-Plakat.pdf>
- [6] Lück, S., Wilhelm, T. (2011): Beschleunigungspfeile mit dem iPhone. Praxis der Naturwissenschaften 60/7, 27
- [7] Schüttler, M., Wilhelm, T. (2011): Bewegungsanalyse im Freizeitpark, Praxis der Naturwissenschaften 60/6, 18
- [8] Vogt, P., Kuhn, J., Gareis, S. (2011): Beschleunigungssensoren von Smartphones – Beispielexperimente zum Einsatz im Physikunterricht. Praxis der Naturwissenschaften 60/7, 15
- [9] Riemer, W. (2010): Bewegungen mit GPS untersuchen. Grundvorstellungen der Analysis „erfahren“. In: Mathematik lehren, 160, S. 54-58
- [10] Schneider, P. (2011): Mechanik im Freizeitpark – Möglichkeiten und Grenzen moderner Messmethoden. Staatsarbeit, Universität Duisburg-Essen
- [11] Wilhelm, T. (2006): Zweidimensionale Bewegungen – Vergleich von vier verschiedenen Möglichkeiten der Messwerterfassung und Evaluationsergebnisse eines Unterrichtseinsatzes. Vorträge der DPG in Kassel

<sup>4</sup> Dabei wird vorausgesetzt, dass eine eventuell auftretende Drehung des Körpers vernachlässigt werden kann.

## 8. Anhang

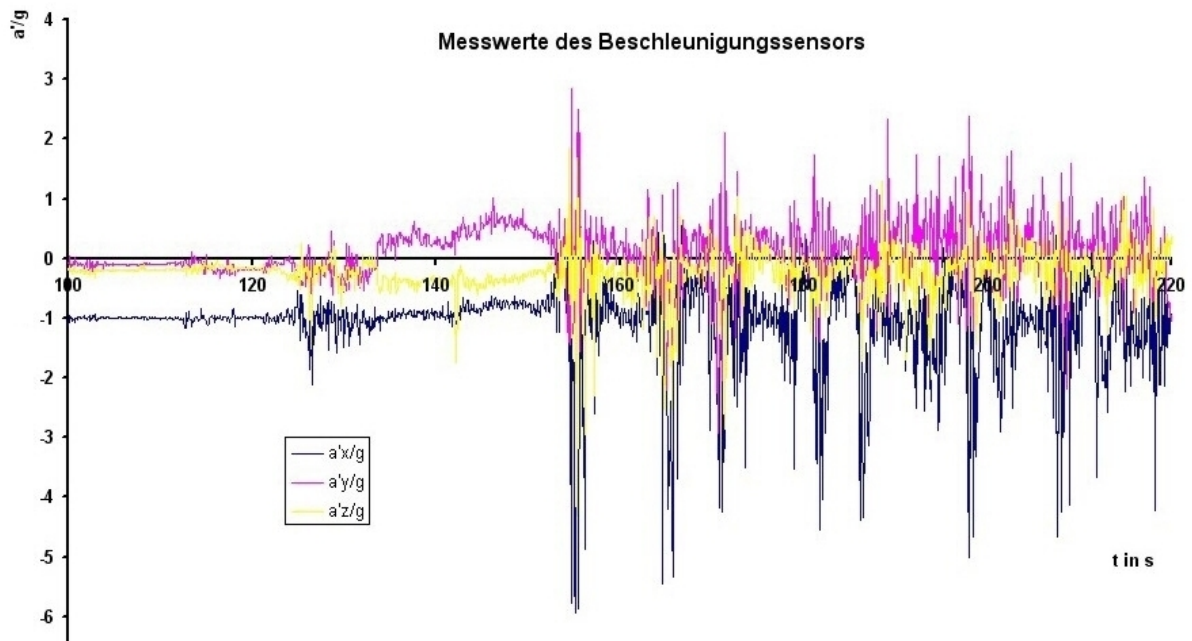


Abb. 4: Die Daten des Beschleunigungssensors in allen drei Achsen. Die  $x'$ -Achse des Sensors steht senkrecht auf der Schiene und zeigt nach oben, wenn die Bahn horizontal verläuft. Eine der beiden anderen Achsen zeigt näherungsweise in Fahrtrichtung.

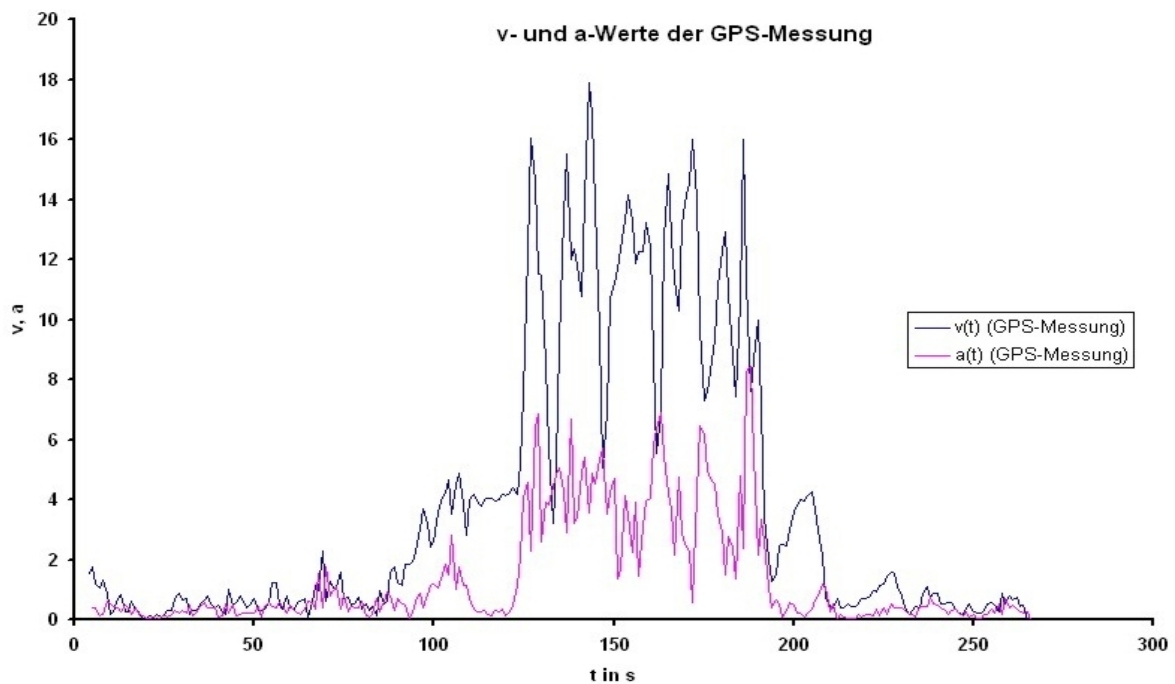


Abb. 5: Aus den GPS-Daten abgeleitete Beträge von Geschwindigkeit und Beschleunigung

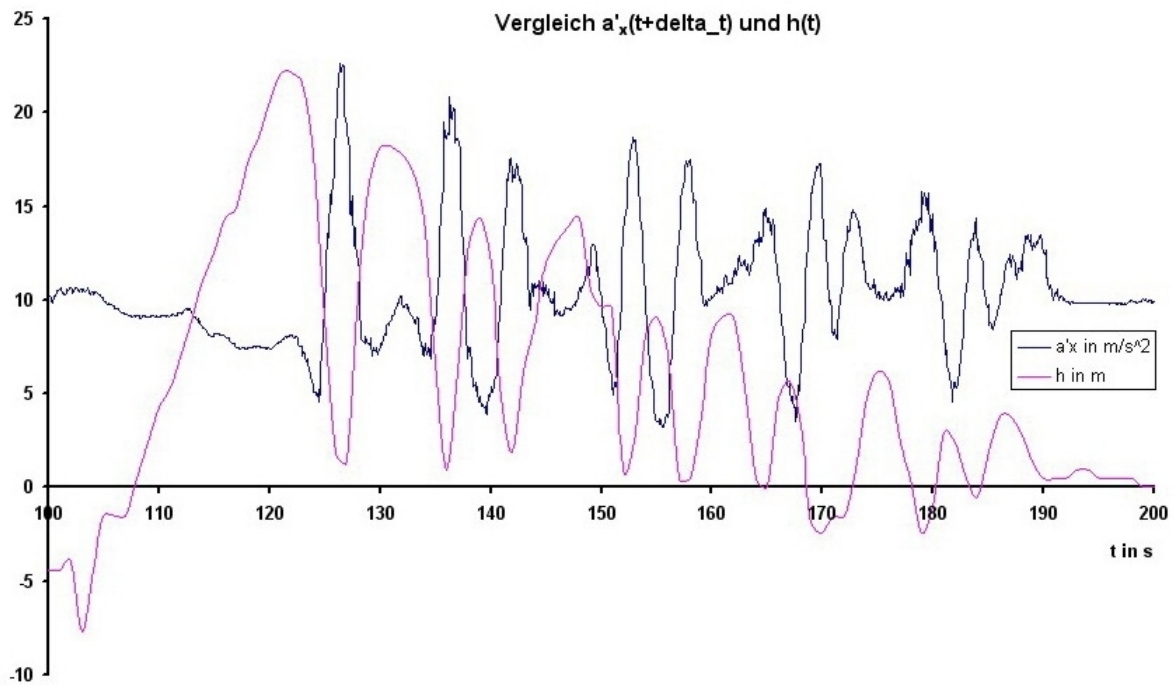


Abb. 6: Die Messwerte der beiden Sensoren werden synchronisiert, indem das erste steile Maximum der Beschleunigungsdaten senkrecht zur Schiene mit dem Höhenminimum des „First Drop“ zeitlich zur Deckung gebracht wird.

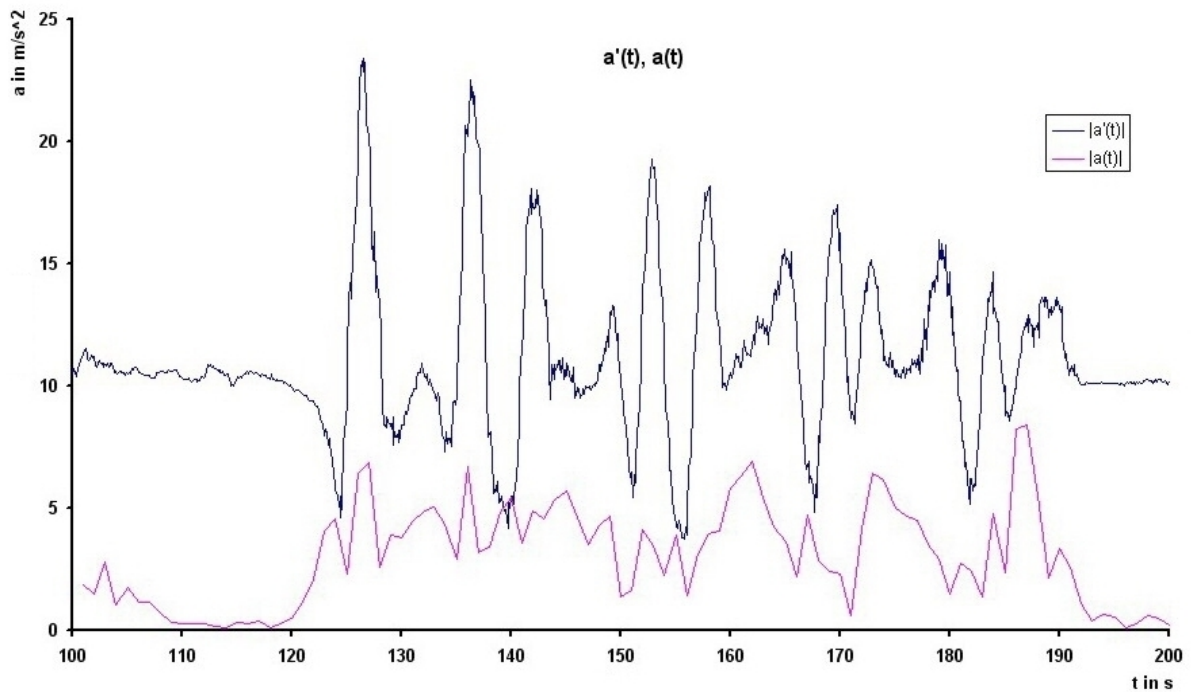


Abb. 7: Aus den GPS-Daten und in drei Achsen gemessenen Beschleunigungsdaten wurde jeweils der Betrag der Gesamtschleunigung berechnet.

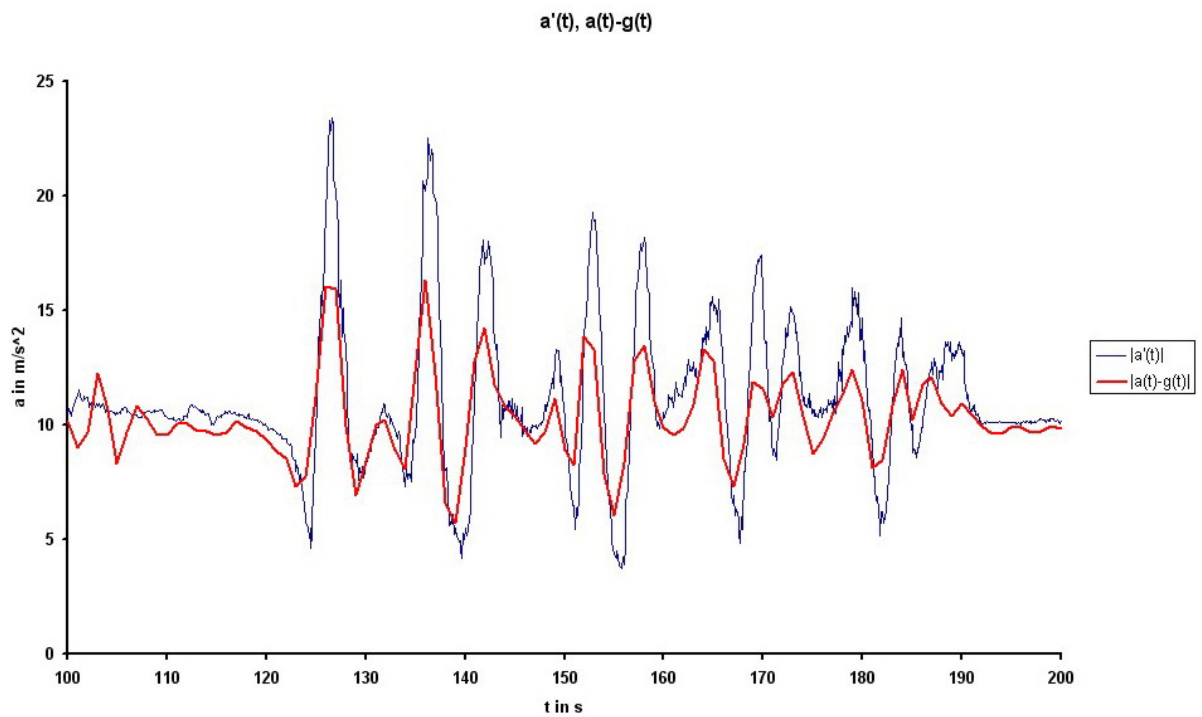


Abb. 9: Vergleich der aus den GPS-Daten abgeleiteten Gesamtanzeige des Beschleunigungssensors mit den entsprechenden Messwerten

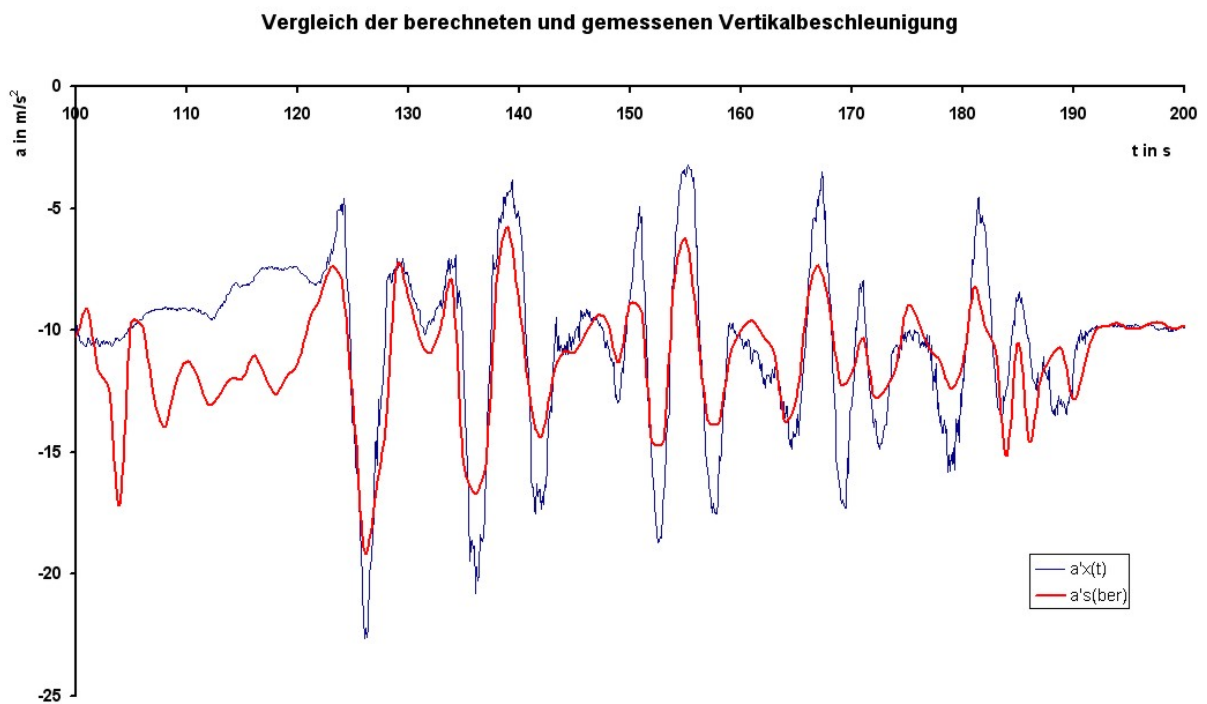


Abb. 11: Die Beschleunigung in Richtung Schiene: mit dem Beschleunigungssensor gemessen ( $a'_x(t)$ ) und aus den GPS-Daten berechnet

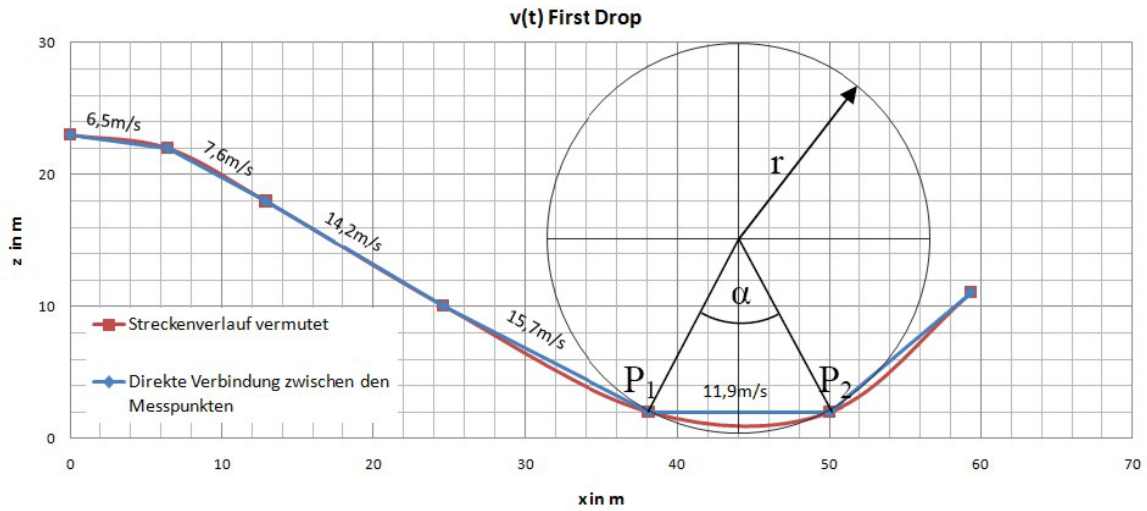


Abb. 12: The Bandit First Drop. Dargestellt ist die zweidimensionale Projektion der Bewegung. In blau sind die direkten Verbindungen zwischen den GPS-Messpunkten eingezeichnet, aus denen die Geschwindigkeiten berechnet werden. Rot dargestellt ist der vermutete Verlauf der Strecke. Mit Hilfe des eingezeichneten Kreises lässt sich die Länge des Bogenstücks an der tiefsten Stelle bestimmen und daraus bessere Werte für Geschwindigkeit und Beschleunigung bestimmen (aus [10]).

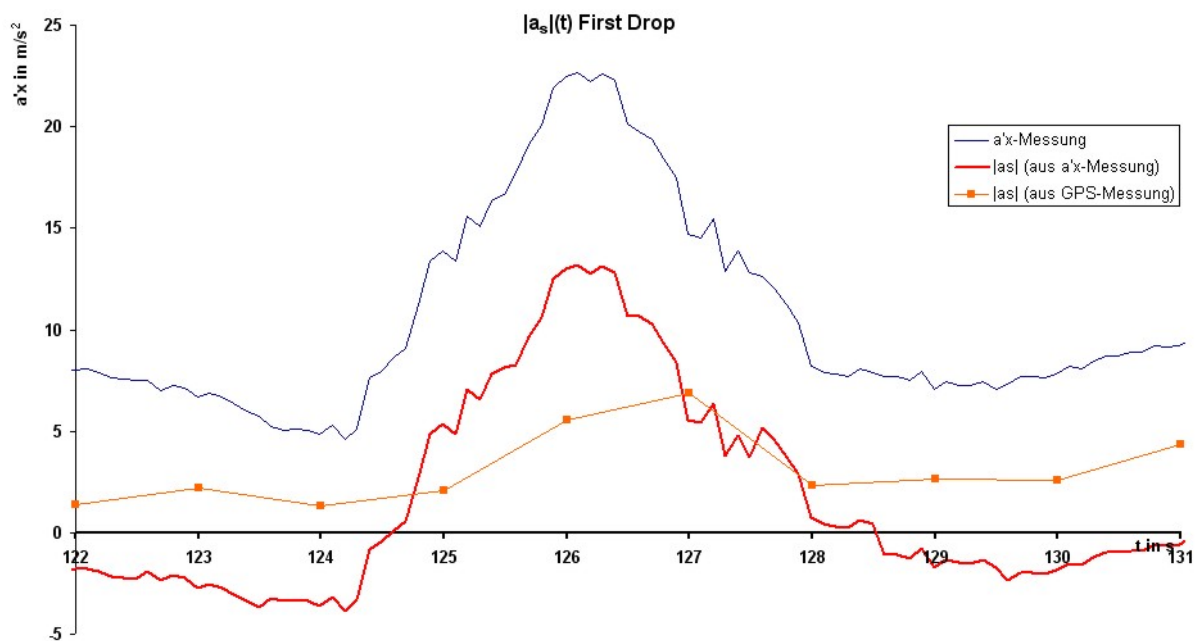


Abb. 13: Aus den GPS-Daten lassen sich die Orientierung des Beschleunigungssensors die Bahnbeschleunigung und die Beschleunigung senkrecht zur Bewegungsrichtung (gelb) berechnen. Mit Hilfe der Sensororientierung erhält man dann aus den  $a''_x$ -Werten (blau) die Beschleunigung in Richtung auf die Schiene (rot).



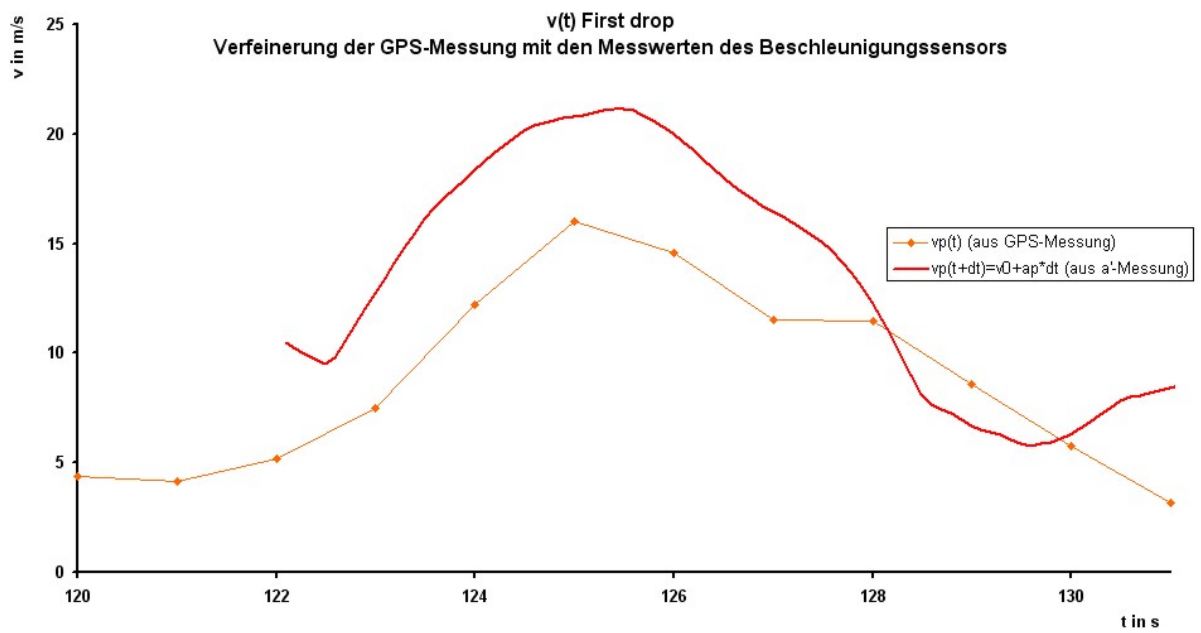


Abb. 14: Ergänzung der aus der GPS-Messung gewonnenen Werte für die Bahngeschwindigkeit (gelb) durch Zwischenwerte, die aus den Daten des Beschleunigungssensors abgeleitet wurden (rot)