Eine Reise in die Unendlichkeit und über die Unendlichkeit hinaus

Martin Erik Horn*

*Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt/Main, Institut für Didaktik der Physik,
Max-von-Laue-Str. 1, 60438 Frankfurt/Main,

Email: m.horn@physik.uni-frankfurt.de

Kurzfassung

Reisen in die Unendlichkeit unternehmen wir auf der Erde täglich: Im Paradoxon des Zenon benötigt Achilles unendlich viele Schritte, bis er die vor ihm laufende langsamere Schildkröte einholt. Und wir unternehmen sogar Reisen weit über die Unendlichkeit hinaus, wenn wir bei Bewegungsvorgängen Körper nicht nur einholen, sondern überholen. Denn wie viele Schritte hat Achilles zurückgelegt, nachdem er die Schildkröte hinter sich gelassen hat? Konzeptuell noch interessanter werden solche Fragestellungen, wenn sich Achilles beschleunigt bewegt und unendlich weit entfernte Objekte überholt.

Mit dem folgenden Beitrag werden zwei Ziele verfolgt: Einerseits wird das Paradoxon des Zenon in einen speziell-relativistischen Kontext gestellt und analysiert. Zum zweiten aber ist klar, dass die konzeptuell-mathematische Beschreibung mit Hilfe von reellen Zahlen beim Übergang über das Unendliche hinaus versagt. Deshalb stellt dieser Beitrag auch ein Plädoyer dafür dar, die Mathematik der surrealen Zahlen auf konkrete physikalische Situationen zu übertragen, um ein Werkzeug zu erhalten, mit dem auch Unendliches und Größeres als unendlich sachangemessen beschrieben werden kann.

1. Achilles und die andere Straßenseite

Die Paradoxa des Zenon von Elea übten einen kulturgeschichtlich erheblichen Einfluss aus. Sie trugen zur Entwicklung der Logik, zur Ausschärfung des Grenzwertbegriffs, zur Durchdringung der Mathematik unendlicher Reihen und zur Hinterfragung des Kontinuums in der Mengenlehre bei [19, S. 163/164]. Auch heute noch dienen sie nicht nur zur Veranschaulichung von Grenzwertprozessen und unendlichen Größen, sondern üben immer noch eine erhebliche Faszination auf uns aus [8, Kap.7].

Dabei begegnen uns die von Zenon beschriebenen Paradoxa tagtäglich: Wir holen einen langsameren Fußgänger vor uns ein und bemerken, dass sich der Abstand zwischen uns immer schneller halbiert. Wir überqueren eine Straße und bemerken, dass sich die vor uns liegende, noch verbleibende Teilstrecke immer schneller halbiert.

Wäre jeder von uns gemachte Schritt gerade so groß wie die Hälfte der verbleibenden Teilstrecke, führt das zu einem „unerhörtem, geradezu unglaublichen Gedanken“ [15, S. 22]: Wir hätten unendlich viele Schritte zu absolvieren – was nach Zenon von Elea unmöglich ist. Mithin erreicht weder Achilles die Schildkröte noch wir jemals die andere Straßenseite.

Im täglichen Leben jedoch gelangen Achilles und wir nicht nur an unser Ziel: Wir können über die Straßenseite hinwegtreten und damit mehr als nur unendlich viele Schritte zurücklegen. Achilles kann die Schildkröte tatsächlich nicht nur einholen, sondern auch überholen und dabei mehr als nur unendlich viele Schritte zurück legen.

Wenn wir Zenon von Elea ernst nehmen, dann spielt nicht nur das Unendliche, sondern auch Größeres als unendlich eine konzeptuell wichtige Rolle.

Doch während die mathematische Auflösung des Widerspruchs, wie wir das Unendliche erreichen können, in der Konstruktion eines geeigneten Grenzwertbegriffs liegt, ist die mathematische Auflösung der Frage, wie wir mit Größerem als unendlich umgehen können, nicht so einfach. Hier versagt der konventionelle Zahlenbegriff und es wird zu einer Neufassung unserer Anschauung darüber, was Zahlen, die größer als unendlich sein sollen, eigentlich sind, kommen müssen. Diese Neufassung hat Conway mit der Konstruktion der surrealen Zahlen geleistet.

2. Das Paradoxon des Zenon in klassischer Darstellung

Beim Wettlauf des Achilles mit einer still stehenden Schildkröte bewegt sich Achilles mit konstanter Geschwindigkeit. Deshalb ist die von Achilles gemessene Gesamtzeit und die von ihm gemessene zurückgelegte Gesamtstrecke proportional (siehe Abbildung 1). Dies wird sich ändern, wenn beschleunigte Bewegungen betrachtet werden.

Darüber hinaus ist die Anzahl der von Achilles benötigten Schritte in jedem klassischen Koordinatensystem nicht nur proportional zur Anzahl der zurückgelegten Wegstücke (obere Angabe in Abb. 1), sondern auch proportional zur Anzahl der von Achilles gemessenen jeweiligen Zeitdauern (untere Angabe in Abb. 1).

Bei der klassischen Beschreibung der Paradoxa des Zenons ist diese Beobachtung trivial. Sie wird aber wichtig bei einer speziell-relativistischen Betrachtung des Phänomens, wenn gemessene Strecken und Zeiten vom Bewegungszustand der Beobachter abhängen.

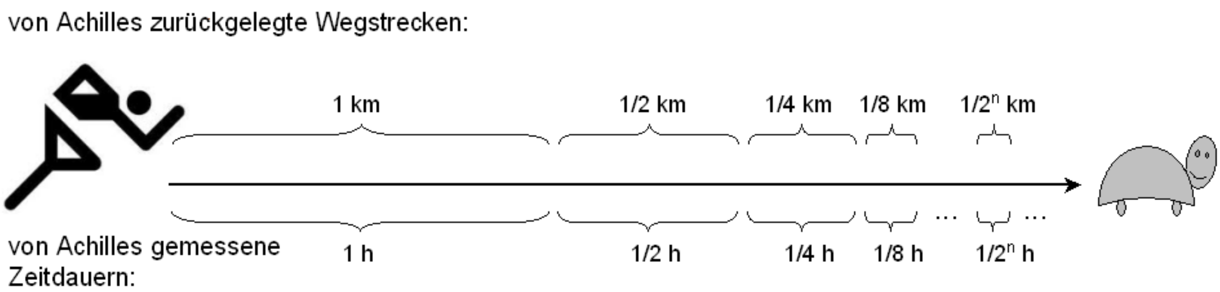

Abb.1: Wettlauf des Achilles mit der Schildkröte.

Die Gesamtzeit aus Sicht von Achilles und aus Sicht eines zurückbleibenden Beobachters kann durch Aufsummierung leicht ermittelt werden. Im folgenden Beispiel, bei dem Achilles die still stehende Schildkröte mit der geringen Geschwindigkeit von 1 *km/h* zu erreichen sucht, ergibt sich

$$t_A = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} ...\right) h \qquad \{1\}$$

Dabei handelt es sich mithin um eine geometrische Reihe

$$t_A = \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{2^n} h \qquad \{2\}$$

die nach unendlich vielen Schritten einen Grenzwert von

$$t_{\underline{A}} = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{2^n} h = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} h = 2h \qquad \{3\}$$

zustrebt. Achilles erreicht die Schildkröte in unserem Beispiel somit nach zwei Stunden, wobei er dann aus Sicht aller klassischen, nicht-relativistischen Beobachter einen Weg von genau 2 *km* zurückgelegt hat.

Die Anzahl der von ihm insgesamt benötigten Schritte wird hier mit unendlich anzugeben sein:

$$k \to \infty \qquad \{4\}$$

In unseren Gehirnen ist diese Zahl als die größtmögliche aller Zählergebnisse eingeprägt. Es macht offenkundig keinen Sinn, zu fragen, ob Achilles noch einen Schritt mehr oder gar einen weniger macht, denn $\infty + 1$ oder $\infty - 1$ entspricht dem gleichen größtmöglichen Zählergebnis unendlich, wie uns Hilberts Hotel (eine sehr schöne populärwissenschaftliche Darstellung findet sich in [1, Kap. 15] lehrt. Die Frage des Wesensinhalts des Unendlichen wird dabei eng mit der Frager der Abzählbarkeit verknüpft [8, Kap. 17].

Selbst wenn unendlich viele neue Gäste anreisen, ist im bereits mit unendlich vielen Gästen voll belegten Hotel von Hilbert noch ausreichend Platz, um auch die neu angereisten Gäste alle gut unterzubringen [1, S. 41]. Interessant ist jedoch, dass auch Behrends in seiner Darstellung speziell-relativistische – also physikalische – Einwände gegen die mathematisch mögliche Bettenbelegungsaktion formuliert.

3. Achilles rennt weiter

Xenon argumentiert mathematisch: Achilles erreicht die Schildkröte nie, da er unendlich viele Schritte zurücklegen müsste, was er nicht kann.

Als Physikerinnen und Physiker beobachten wir jedoch, dass Achilles die Schildkröte nicht nur erreicht, sondern auch überholt. Achilles rennt weiter. Drehen wir also die Argumentation um und argumentieren physikalisch:

In dem Moment, in dem Achilles die Schildkröte erreicht, hat er die in unendlich viele Teilschritte zerlegte Strecke und damit unendlich viele Schritte zurück gelegt. Also muss er, nachdem er die Schildkröte überholt hat, mehr als nur unendlich viele Teilstrecken und damit mehr als nur unendlich viele

Schritte zurück gelegt haben. Achilles sollte auch nach dem Einholen der Schildkröte eine sinnbehaftete Anzahl von Schritten zugeordnet werden können.

Ein solches Argumentationsmuster ist natürlich problematisch. Es stellt die übliche erkenntnistheoretische Hierarchie auf den Kopf und geht in eine Richtung, in die auch Laughlin argumentiert, wenn er sich und das Institut, an dem er sich engagiert „jener Weltanschauung verpflichtet (fühlt), nach der Mathematik aus experimenteller Beobachtung hervorgeht und nicht umgekehrt“ [14, S. 323].

Basiert die Physik auf der Mathematik? Verwenden wir als physikalisch arbeitende Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftler mathematische Erkenntnisse als Grundlage unseres Forschens? Oder basiert die Mathematik auf der Physik? Determinieren wir mit unserer physikalischen Arbeit vielleicht erst die mathematischen Strukturen, die Mathematikerinnen und Mathematiker der Physik entnehmen und sodann lediglich präzise ausformulieren? Generieren Mathematiker die Mathematik weltabgelöst und autonom, oder entnehmen sie die mathematischen Erkenntnisse einem Pool physikalisch geprägter Vorerfahrungen?

Die Mehrheit der Mathematikerinnen und Mathematikern scheint die reine Mathematik als von der Physik vollständig losgelöst zu begreifen. Es ist jedoch erstaunlich, dass einer der wichtigsten lebenden Mathematiker die Möglichkeit einer streng mit der Physik verknüpften und aus der Physik abgeleiteten Mathematik in einem Interview ausdrücklich zulässt: „Any belief like that about the nature of things that are arbitrarily far away has turned out to be false in physics. So I think it is false in mathematics too” [7, S. 35]. Dieses Argument Conways beinhaltet im Kern die Aussage: Weil etwas in der Physik so und so ist, sollte es auch in der Mathematik so und so sein[1]. Damit erhält der speziell-relativistische Einwand von Behrends, der auf der vorigen Seite erwähnt wurde, ein gänzlich eigenes Gewicht.

Die Frage, wie viele Schritte Achilles nach einer Zeit von beispielsweise 3 *h* und einer Strecke von 3 *km* zurückgelegt hat, ist eine physikalische Frage, auf die wir eine sinnvolle (und gerade auch mathematisch sinnvolle) Antwort erwarten sollten. Denn eine Antwort auf diese Frage spielt in unserer physikalischen Welt dann eine Rolle, wenn wir diese Welt speziell-relativistisch formulieren und das Paradoxon des Zenon in die Spezielle Relativitätstheorie übersetzen.

[1] Selbst wenn logisch vollständig konträre und sich gegenseitig absolut ausschließende mathematische Axiomensysteme konstruiert werden, so können sie doch alle Teil der Physik und damit in diesem Sinne der Physik entnommen sein. Dazu müssen wir lediglich die Quantenmechanik im Sinne von Zeilinger deuten: „Die Welt ist alles, was der Fall ist, und auch alles, was der Fall sein kann“ (zitiert nach [9, S. 169]).

4. Ein speziell-relativistisches Paradoxon des Zenon

In diesem Gedankenexperiment, das nur speziell-relativistische und keine allgemein-relativistischen Effekte berücksichtigen soll, startet ein sich immer weiter und immer schneller beschleunigendes Raumschiff, das von der Erde aus beobachtet wird. Die Geschwindigkeit des Raumschiffe, die die auf der Erde zurückbleibenden Beobachter messen, erreicht infolge der speziell-relativistischen Begrenzung nie die Lichtgeschwindigkeit.

Für Beschleunigungen ist in der (derzeitigen) Physik keine prinzipielle Obergrenze bekannt. Deshalb kann die Raumschiffbesatzung des Raumschiffs dieses prinzipiell beliebig stark und immer schneller beschleunigen. Dies macht sie in der folgenden Art und Weise:

Die Besatzung des Raumschiffs beschleunigt das Raumschiff genau so, dass das Raumschiff für jeden im System der Erde gemessenen Kilometer genau halb so viel Zeit im eigenen Bezugssystem des Raumschiffs benötigt wie für den vorangegangenen Kilometer.

Die auf der Erde zurück bleibenden Beobachter sehen also, wie dieses Raumschiff Kilometer um Kilometer zurücklegt. Für den ersten (im Ruhesystem der Erde gemessenen) Kilometer benötigt das Raumschiff genau eine Stunde. Für den zweiten (im Ruhesystem der Erde gemessenen) Kilometer misst die Raumschiffbesatzung eine Zeit von genau einer halben Stunde auf ihren Uhren ab. Für den dritten (im Ruhesystem der Erde gemessenen) Kilometer misst die Raumschiffbesatzung eine Zeit von genau einer Viertelstunde, da sie den Antrieb des Raumschiffs entsprechend steuert.

Diesen Beschleunigungsmodus behält die Raumschiffbesatzung des gesamten Flug über bei. Für jeden folgenden Kilometer, den die auf der Erde zurückbleibenden Beobachter messen, steuern die Besatzung den Antrieb so, dass die Eigenzeit, die sie auf ihren Uhren ablesen genau halb so groß ist wie für den aus Erdsicht vorangegangenen Kilometer (siehe Abbildung 2).

In dieser Abbildung 2 sind nur die aus Erdsicht gemessenen Wegstücke angegeben. Aus Sicht der Raumschiffbesatzung unterliegen diese während des Fluges einer dramatisch wachsenden speziell-relativistischen Längenkontraktion.

Ebenso sind in Abbildung 2 nur die aus Sicht der Raumschiffbesatzung gemessenen Zeitdifferenzen angegeben. Aus Sicht der Erdebeobachter unterliegen diese einer dramatisch wachsenden speziell-relativistischen Zeitdilatation. Diese Zeitdilatation wird bei steigender Entfernung des Raumschiffs von der Erde so groß, dass das Raumschiff aus Erdsicht stark rotverschoben an einer Position am Horizont quasi festfriert – und deshalb (bedingt durch die sehr geringe Ortsunschärfe in lateraler Richtung) aus quantenmechanischen Gründen über den gesamten Hori-

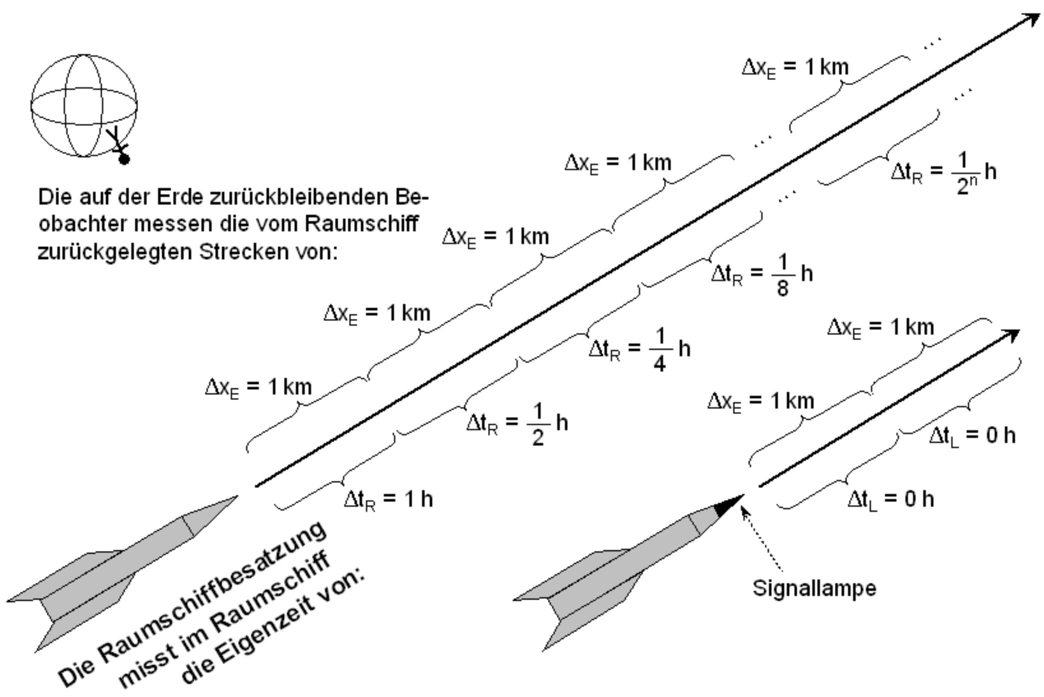

Abb.2: Flug eines Raumschiffs mit und ohne Signallampe in die Unendlichkeit.

zont verschmiert [10], [11]. Dieser Effekt ist jedoch nur aus Perspektive der Erde zu beobachten. Die Raumschiffbesatzung bemerkt davon nichts.

In Analogie zum klassischen Paradoxon des Zenon können folgende Fragen formuliert werden:

- Wo befindet sich das Raumschiff aus Sicht der auf der Erde zurückgebliebenen Beobachter, wenn die Raumschiffbesatzung eine Flugzeit von genau 2 h misst?
- Wo befindet sich das Raumschiff aus Sicht der auf der Erde zurückgebliebenen Beobachter, wenn die Raumschiffbesatzung eine Flugzeit von mehr als 2 *h* misst?

Die erste Frage lässt sich unter Rückgriff auf Formel {3} beantworten:

$$t_{\underline{A}} = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{2^n} h = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} h = 2h \qquad \{5\}$$

Wenn im Raumschiff genau 2 *h* vergangen sind, hat das Raumschiff aus Erdsicht eine unendlich große Entfernung von der Erde.

Doch das Raumschiff beschleunigt weiter – genauso, wie auch Achilles weiter rennt. Und genauso, wie Achilles beim Weiterrennen die Zeit messen kann und mehr als unendlich viele Schritte zurücklegen wird, wird auch die Raumschiffbesatzung weiter die Zeit messen und aus Erdsicht mehr als unendlich viele Schrittintervalle von 1 *km* zurücklegen können.

Nachdem im Raumschiff beispielsweise 3 *h* vergangen sind, ist das Raumschiff im Koordinatensystem der Erde ***mehr als*** unendlich weit von der Erde entfernt. Es ist aus Sicht der Erdbewohner zwar auch eine längere Zeit als unendlich vergangen, eben aber nicht aus Sicht der Raumschiffbesatzung. Fazit: **Die Besatzung des Raumschiffs kann prinzipiell eine Entfernung von der Erde erreichen, die größer als unendlich ist.**

Dies führt zur Schlussfolgerung:

- Wir benötigen ein Zahlensystem, in dem mit solchen Zahlen, die größer als unendlich sind, konsistent gerechnet werden kann.

5. Die surrealen Zahlen

Es ist zu vermuten, dass die surrealen Zahlen für solche Berechnungen geeignet sind, da sie einerseits die reellen Zahlen umfassen. Andererseits gestatten sie, Rechnungen mit unendlich großen Werten ω auszuführen. So existieren im Kontext der surrealen Zahlen beispielsweise sinnvolle Ausdrücke für funktionale Beziehungen des Unendlichen ω wie 2ω, $\sqrt{\omega}$, ω^2, e^ω oder ω^ω. Die Grundlagen der surrealen Zahlen finden sich in zahlreichen Ausarbeitungen wie beispielsweise [3], [13], [6], [17] oder auch schulisch motivierten Arbeiten wie [2] und [5].

Die surrealen Zahlen

$$\begin{aligned} 1 &:= \left(\{0\}\middle|\{\ \}\right) \\ \frac{1}{2} &:= \left(\{0\}\middle|\{1\}\right) \\ \frac{1}{4} &:= \left(\{0\}\middle|\{1/2\}\right),\ \text{etc...} \end{aligned} \qquad \{6\}$$

können in Analogie zu {1} und {2} aufsummiert werden. Die Ergebnisse lauten in der von Conway beschriebenen jeweils einfachsten Form [3, S. 24]:

$$\frac{3}{2}=1+\frac{1}{2}:=\left(\{1\}\middle|\{2\}\right)$$
$$\frac{7}{4}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}:=\left(\{3/2\}\middle|\{2\}\right) \qquad \{7\}$$
$$\frac{15}{8}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}:=\left(\{7/4\}\middle|\{2\}\right),\ \text{etc...}$$

Damit erhält man als Gesamtsumme für die Zeit, die die Raumschiffbesatzung für das Durchfliegen einer aus Erdsicht unendlich langen Strecke benötigt, den bereits bekannten Wert {3}:

$$\begin{aligned} t_{\underline{A}} &= \left(\left\{1,\frac{3}{2},\frac{7}{4},\frac{15}{8},\dots\right\}\middle|\{2\}\right)h \\ &= \left(\{1\}\middle|\{\ \}\right)h = 2h \end{aligned} \qquad \{8\}$$

Während dieser von der Raumschiffbesatzung gemessenen 2 *h* legt das Raumschiff aus Erdsicht unendlich viele Teilstrecken von jeweils 1 *km* zurück. Diese Gesamtentfernung aus Sicht der Beobachter auf der Erde kann nun konkret mit

$$\omega km=\left(\{1km,\ 2km,\ 3km,\ 4km,\ \dots\}\middle|\{\ \}\right) \qquad \{9\}$$

mathematisch angegeben und mathematisch eindeutig umgeformt werden. Beispielsweise ist das Raumschiff eine Beschleunigungsphase später aus Erdsicht in einer Entfernung von

$$\begin{aligned} &(\omega+1)km \\ &=\left(\{1km,\ 2km,\ 3km,\ 4km,\ \dots,\ \omega km\}\middle|\{\ \}\right) \end{aligned} \qquad \{10\}$$

zu finden. Und weitere ω Beschleunigungsphasen befindet es sich aus Erdsicht

$$\begin{aligned} &2\omega km \\ &=\left(\{(\omega+1)km,\ (\omega+2)km,\ (\omega+3)km,\ \dots\}\middle|\{\ \}\right) \end{aligned} \qquad \{11\}$$

den mathematisch eindeutig bestimmbaren Wert von „doppelt so weit wie unendlich weit“ weg. Und auch, wo sich das Raumschiff nach einer von der Besatzung gemessenen Zeit von 3 *h* befindet, kann wahrscheinlich nur mit Hilfe der surrealen Zahlen mathematisch konsistent ermittelt werden.

Die Darstellung der surrealen Zahlen in den Formeln {6} – {10} erscheint auf den ersten Blick verwirrend und deshalb auch strukturell kompliziert. Sie setzen sich in für uns ungewohnter Weise aus einer links- und rechtsseitigen Menge zusammen, wobei für diese Menge Ordnungsbedingungen erfüllt sein müssen.

Doch dieser erste Eindruck täuscht. Zum einen entstanden die surrealen Zahlen aus spieltheoretischen Überlegungen und können alternativ auch als eine Abfolge von Verzweigungsentscheidungen interpretiert und dargestellt werden. So lautet eine zweit mögliche Darstellungsweise für die surrealen Zahlen {6} nach [6]:

$$1:=(+)$$
$$\frac{1}{2}:=(+-) \qquad \{12\}$$
$$\frac{1}{4}:=(+--),\ \text{etc...}$$

Zum anderen berichtet Conway als Erfinder[2] der surrealen Zahlen in [7, S. 19]: „This method of thinking of them as games turned out to give a simpler, more logical theory than anybody had found before, even for the real numbers.” Surreale Zahlen weisen eine „bizarre“ [7, S. 18] strukturelle Einfachheit und Zugänglichkeit auf – und damit erhalten sie einen didaktisch hohen Wert.

Auch deshalb beschreibt Rota die surrealen Zahlen euphorisch als: „Surreal numbers will go down in history as one of the great inventions of the century. We thought Dedekind cuts had been given a decent burial, but now we realize that there is a lot more to them than meets the eye. (...) Thanks to Conway’s discovery, we have a new concept of number” [16, S. 217/218].

Diesen Aspekt der konzeptuellen Einfachheit oder gar „Natürlichkeit“ betonen auch andere Autoren, die sich mit surrealen Zahlen beschäftigen: „In fact, it is because the system seems to be so natural to the author,“ führt Gonshor[2] in sein Buch [6, S. 2] ein.

Fazit: Surreale Zahlen sind konzeptuell einfacher als andere Zahlensysteme. Und sie sind auch didaktisch recht einfach zugänglich, wie die Erstveröffentlichung der surrealen Zahlen durch Knuth [13] zeigt: „I decided that creativity can’t be taught using a textbook, but that an ’anti-text’ such as this novelette might be useful“ [13, S. 113].

6. Zurück zur Physik

Ein konventionelles Raumschiff, das den Treibstoff für die gesamte Reise mit sich führt, wird die Unendlichkeit kaum erreichen. Selbst bei dem effektivsten Antrieb, den wir derzeit in der Theorie kennen (durch Materie-Antimaterie-Zerstrahlung, wobei jeweils ein Bruchteil der Rakete als Rückstoßmaterial an die Umgebung abgegeben wird, um einen Vortrieb für die verbleibende Raketenmasse zu generieren) wird nach ω Beschleunigungsphasen nur noch eine infinitesimal geringe Raketenrestmasse übrig sein. Mit materiebehafteten Objekten ist eine solche Reise aussichtslos.

Es existiert jedoch eine alternative Abwandlung des hier vorgestellten Gedankenexperiments, bei dem ei-

[2] In Fußnote 1 wurde hinterfragt, ob mathematische Erkenntnisse der Natur und damit der Physik entnommen sind oder nicht. Darauf bezieht sich das vollständige Zitat von Gonshor: „The surreal numbers were discovered by J. H. Conway. (…) In fact, it is because the system seems to be so natural to the author that the first sentence contains the word ‘discovered’ rather than ‘constructed’ or ‘created’.” [6, S. 1/2] Conway ist in diesem Sinne also Entdecker und nicht Erfinder der surrealen Zahlen.

ne Reise in weiter als ω *km* entfernte Regionen realisiert wird. Es ist eine Reise, die Photonen andauernd unternehmen.

Befestigen wir also an der Spitze des Raumschiffs eine Signallampe, die beim Start kurz aufblinkt. Die von dieser Lampe ausgehenden Photonen bewegen sich mit Lichtgeschwindigkeit dem Raumschiff voraus. Sie sind somit immer weiter von der Erde entfernt als das Raumschiff.

Nachdem die Raumschiffbesatzung ω Beschleunigungsphasen durchlaufen hat und in unserem Gedankenexperiment die Raumschiffbesatzung aus Erdsicht unendlich weit von der Erde entfernt ist, müssen die beim Start ausgesandten Photonen folglich noch weiter als nur unendlich weit von der Erde entfernt sein.

Dieses seltsame Verhalten vollführen Photonen aus speziell-relativistischer Sicht aufgrund der Tatsache, dass für Photonen bei jedem physikalischen Vorgang, den wir auf der Erde mit einer nicht-verschwindenden Eigenzeit von $\Delta t_E \neq 0$ beobachten, immer und überall eine Eigenzeit von $\Delta t_L = 0$ vergeht. Für Photonen ist jeder Vorgang instantan. Somit erfolgt auch das Durchlaufen eines Kilometers und infolgedessen das Durchlaufen unendlich vieler Kilometer für Photonen in einer Eigenzeit von Null. Dieser Lichtweg ist in Abbildung 2 schräg unten rechts symbolisch angedeutet.

Dieser Lichtweg in die Unendlichkeit könnte unter Umständen Konsequenzen für das Verhalten von Licht haben. Es scheinen zwar keine Auswirkungen im Kontext streng klassischer Vorstellungen zum Licht wie dem Strahlenmodell oder im Kontext moderner Vorstellungen zum Licht wie dem Wellenmodell realistisch. Doch im Kontext quantenmechanischer Modellbildungen wie dem Zeigermodells von Feynman [4] scheinen Auswirkungen auf messbare Größen nicht gänzlich ausgeschlossen.

Nach Feynman durchläuft Licht auf dem Weg von einem Punkt A zu einem zweiten Punkt B nicht nur den direkten, geradlinigen Weg, sondern alle möglichen Wege, solange diese Wege nicht mit einer vollständigen Absorption des Lichts verbunden sind. Sehen wir beispielsweise unser Spiegelbild, so wandert ein geringer Teil des Lichts von unserer Nasenspitze auf einem krummlinigen Weg in die Küche, umrundet die Kaffeemaschine, läuft zurück und fällt dann ohne Berührung des Spiegels in unsere Augen. Ein weiterer geringer Teil des Lichts nimmt einen anderen, ebenfalls sehr unwahrscheinlichen Weg um die Kaffeemaschine, und fällt mit einer um $\pi = 180°$ verschobenen Phase in unser Auge, so dass sich die beiden betrachteten Lichtanteile durch destruktive Interferenz nahezu vollständig auslöschen. Zu großen Teilen nicht ausgelöscht wird nur das Licht, das sich in der Nähe des optisch kürzesten Weges befindet und von der Nasenspitze aus auf den Spiegel auftrifft und dann, das Reflexionsgesetz erfüllend, in unsere Augen fällt.

Da bei dieser Betrachtung von Feynman alle existierenden Lichtwege zum endgültigen Lichtreflex in Punkt B beitragen, kann geschlussfolgert werden, dass auch alle unendlich langen Lichtwege und alle Lichtwege, die länger als unendlich sind, beitragen sollten. Alle diese Lichtwege legen Photonen in einer Eigenzeit von Null zurück.

Bei physikalischen Messungen machen sich diese Lichtanteile nur deshalb nicht bemerkbar, da der Raum, den die Photonen auch auf unendlich und noch längeren Lichtwegen durchlaufen, näherungsweise homogen sein wird, so dass sich diese Lichtanteile in der Summe näherungsweise (und im Rahmen unserer derzeitigen Messgenauigkeit mit Sicherheit vollständig) destruktiv auslöschen.

7. Epilog

In seiner ‚Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft' schreibt Weyl: „Die Unmöglichkeit, das Kontinuum als ein starres Sein zu fassen, kann nicht prägnanter formuliert werden als durch das bekannte Paradoxon des Zenon von dem Wettlauf zwischen Achilles und der Schildkröte" [18, S. 61]. Auch heute noch trifft diese Aussage den wesentlichen Punkt, wenn wir über Zenon und seine Konsequenzen nachdenken.

Dabei sind diese und ähnliche Paradoxa didaktisch wichtig, da sie kognitive Konflikte erzeugen – und zu deren Auflösung sind wir gezwungen, neue Wege zu denken und zu gehen.

Ein solch neuer Weg ist der Weg in die Unendlichkeit, der uns von der Mathematik der reellen Zahlen bisher leider versperrt wird. Die surrealen Zahlen leisten hier einen entscheidenden Beitrag, der mit Sicherheit eines Tages auch wesentliche physikalische Implikationen haben wird. Um Diskussionsanlässe zur Erörterung der surrealen Zahlen zu schaffen, ist es deshalb sinnvoll, diese in Hochschulen und Universitäten zur Modellierung physikalischer Situationen heranzuziehen.

Und es ist sinnvoll, dabei Wege zu gehen, wie sie Knuth vorschlägt, um auf Hochschulebene „the most serious shortcomings in our present educational system, the lack of training for research work" [13, S. 113] zu überwinden.

8. Literatur

[1] Behrends, Erhard (2008): Fünf Minuten Mathematik. 100 Beiträge der Mathematik-Kolumne der Zeitung DIE WELT. Zweite, aktualisierte Auflage, Verlag Vieweg + Teubner / GWV Fachverlage, Wiesbaden.

[2] Blechschmidt, Ingo (2007): Aufbau der natürlichen, ganzen, rationalen und surrealen Zahlen. Facharbeit im Fach Mathematik, 26. April 2007, Augsburg.

[3] Conway, John H. (2001): Finding the Correct Number is Simplicity Itself. In: Berlekamp, Elwyn R.; Conway, John H.; Guy, Richard K.: Winning Ways for Your Mathematical Plays. 2.

Auflage, Band 1, Kapitel 2, A. K. Peters Verlag, Wellesley, Massachusetts.
[4] Feynman, Richard (2008): QED – The Strange Theory of Light and Matter. Princeton University Press, Princeton.
[5] Fleischer, Julian (2006): Surreale Zahlen. Wie mit Go die Unendlichkeit besiegt wurde. Facharbeit im Fach Mathematik. 9. März 2006, Bocholt.
[6] Gonshor, Harry (1986): An Introduction to the Theory of Surreal Numbers. London Mathematical Society Lecture Note Series, Nr. 110. Cambridge University Press, Cambridge.
[7] Hargittai, Balazs; Hargittai, István (2005): Candid Science V. Conversations with Famous Scientists. Imperial College Press, London.
[8] Heuser, Harro (2008): Unendlichkeiten. Nachrichten aus dem Grand Canyon des Geistes. Teubner Verlag/GWV Fachverlage, Wiesbaden.
[9] Homeister, Matthias (2008): Quantum Computing verstehen. Grundlagen – Anwendungen – Perspektiven. 2. aktualisierte und durchgesehene Auflage, Friedrich Vieweg & Sohn Verlag / GWV Fachverlage, Wiesbaden.
[10] Horn, Martin Erik (2010): Das holographische Prinzip in der Kosmologie. In: Höttecke, Dietmar (Hrsg.): Entwicklung naturwissenschaftlichen Denkens zwischen Phänomenen und Systematik. Beiträge zur Jahrestagung der GDCP in Dresden, Band 30, S. 470 – 472, LIT-Verlag Dr. W. Hopf, Berlin.
[11] Horn, Martin Erik (2012): Vorstellungen zum Licht – Eine surreale Erweiterung. In: Bernholt, Sascha (Hrsg.): Konzepte fachdidaktischer Strukturierung für den Unterricht. Beiträge zur Jahrestagung der GDCP in Oldenburg. Band 32, S. 149 – 151, LIT-Verlag Dr. W. Hopf, Berlin.
[12] Horn, Martin Erik (2012): Surreale Zahlen – Reisen über die Unendlichkeit hinaus. Zur Veröffentlichung vorgesehen in: Beiträge zum Mathematikunterricht 2012, Tagungsband sowie Tagungs-CD der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik zur Jahrestagung in Weingarten. WTM-Verlag, Münster.
[13] Knuth, Donald Ervin (1974): Surreal Numbers. How two Ex-Students turned on to pure Mathematics and found total Happiness. Addison Wesley Publishing Company, Upper Saddle River, New Jersey.
[14] Laughlin, Robert B. (2007): Abschied von der Weltformel. Die Neuerfindung der Physik. 3. Auflage, Piper Verlag, München.
[15] Rößler, Wolfgang (2007): Eine kleine Nachtphysik. Geschichten aus der Physik. Birkhäuser-Verlag, Basel, Boston, Berlin.
[16] Rota, Gian-Carlo (2008). Indiscrete Thoughts. Reprint of the 1997 Edition. Birkhäuser-Verlag, Boston, Basel, Berlin.
[17] Tøndering, Claus (2005): Surreal Numbers – An Introduction. Version 1.5 vom 25. Jan. 2005, URL: www.tondering.dk/claus/surreal.html [Stand: 31. Mai 2012].
[18] Weyl, Hermann (2000): Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft. 7. Auflage. Oldenbourg Verlag, München.
[19] Wußing, Hans (2008): 6000 Jahre Mathematik. Eine kulturgeschichtliche Zeitreise – Band 1: Von den Anfängen bis Leibniz und Newton. In: Alten, Heinz-Wilhelm; Djafari Naini, Alireza; Wesemüller-Kock, Heiko (Hrsg.): Vom Zählstein zum Computer. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.