Quanten-Computing und Geometrische Algebra

Martin Erik Horn*, Paul Drechsel+, Dietmar Hildenbrand#

*Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt/Main, Institut für Didaktik der Physik,
Max-von-Laue-Str. 1, 60438 Frankfurt/Main,
+Johannes Gutenberg-Universität Mainz, FB 7, IFEAS, Forum Universitatis 6, 55099 Mainz,
#Technische Universität Darmstadt, LOEWE-Forschungsschwerpunkt Cocoon,
Rundeturmstr. 12, 64283 Darmstadt

Email: m.horn@physik.uni-frankfurt.de, drechsel@uni-mainz.de,
d.hildenbrand@cocoon.tu-darmstadt.de

Kurzfassung

Die Quantenmechanik zeigt ungewohnte und mitunter bizarre Phänomene, die auch in ihrer technischen Umsetzung dem Alltagsverständnis nur schwer zugänglich sind. Umso wichtiger ist es, den strukturellen Rahmen und die mathematische Sprache, in der diese neuen Phänomene eingeordnet und beschrieben werden, an Bekanntes anzulehnen.

In einer Herangehensweise, in der die mathematische Modellierung physikalischer Sachverhalte bereits in der klassischen Physik auf der Geometrischen Algebra aufbaut, kann die konzeptionelle Beschreibung der Quantenmechanik erleichtert werden, da die von David Hestenes didaktisch aufbearbeitete Geometrische Algebra aufgrund ihrer inneren Struktur als inhärente Algebra der Quantenmechanik verstanden werden kann.

In diesem Beitrag wird gezeigt, wie mit Hilfe der Geometrischen Algebra das Quanten-Computing als ein typisches quantenmechanisches Phänomen beschrieben werden kann. Dabei steht nicht ein abstrakt statistischer Zugang im Zentrum dieses didaktischen Ansatzes, sondern die elementare Frage 'Was ist ein Zustand in der Quantenmechanik?'

1. Allgemeine Vorbemerkungen

Die drei Autoren dieses Beitrags teilen eine tiefe Grundüberzeugung: „Viele Wissenschaftler rechnen zu kompliziert“ [27, S. 10]. Zahlreiche algebraische und geometrische Mathematisierungen existieren unverknüpft nebeneinander und führen zu oft starken Redundanzverlusten, wenn von einem mathematischen System in ein anderes gewechselt wird.

Deshalb favorisieren wir einen Ansatz, der Geometrie und Algebra nicht nur eng verknüpft, sondern eineindeutig verbindet und so die Möglichkeit schafft, unterschiedlichste Mathematisierungen in einer umfassenden und konsistenten mathematischen Sprache auszudrücken. Diese Sprache, so unsere fundierte Überzeugung, wird die Geometrische Algebra sein.

Dies hat nicht nur Folgen für das wissenschaftliche mathematische Arbeiten an Hochschulen, sondern betrifft auch direkt den schulischen Bereich. Die Lineare Algebra wird auch im schulischen Lernen mittel- und langfristig durch die Geometrische Algebra abgelöst werden. Denn die Geometrische Algebra ist nicht nur weit wirkungsmächtiger und bezogen auf die hochschulischen mathematischen Erfordernisse anschlussfähiger, sondern sie ist strukturell weit konsistenter und damit sehr viel einfacher zu verstehen und anzuwenden als die derzeit in der Schule gelehrte und gelernte konventionelle Lineare Algebra.

Die Geometrische Algebra ist auch das mathematische Instrument, wenn interdisziplinäre Fragestellungen aus einer mathematischen Perspektive beleuchtet werden sollen [27, S. 10]. Denn bei solchen Vorhaben müssen sich die einzelnen Disziplinen zwangsläufig auf eine Sprache einigen, in der sie kommunizieren.

Und einen solchen interdisziplinären Blick richten wir mit diesem Forschungsvorhaben auf die Didaktik des Quanten-Computings. Die drei Autoren stammen aus drei sehr unterschiedlichen Fachrichtungen. Der Erstautor (M. H.), ein Physik- und Mathematiklehrer, forscht und arbeitet im Bereich der Physik- und Mathematikdidaktik und hat die Geometrische Algebra im Physik-Leistungskursunterricht der Sekundarstufe II erprobt und eingesetzt [17], [18].

Der zweite Autor (P. D.) ist Soziologe und Physiker und richtet seien Blick in erster Linie auf erkenntnistheoretische und philosophische Fragen, die mit der Geometrischen Algebra verbunden sind. Dabei liegt sein Schwerpunkt auf der Frage, wie eine nicht nur physikalisch, sondern auch philosophisch sinnhaftige Interpretation quantenmechanischer Verschränkungsprozesse gelingen kann [5], [6].

Der dritte Autor (D. H.) ist Informatiker und wendet die Geometrische Algebra seit längerer Zeit in seiner Forschungsarbeit routinemäßig an. Dabei konnte er immer wieder feststellen, dass nicht nur die pragmatischen Vorzüge der Geometrischen Algebra wie eine schnelle rechnerische Umsetzung, eine sehr gute Performanz und eine hohe Recheneffizienz (sowohl bezüglich Rechengenauigkeit wie auch rechnerischer Leistungsstärke) von Programmen, die auf Grundlage der Geometrischen Algebra erstellt werden, enorm sind [14], [23]. Sondern er ist darüber hinaus von der Eleganz der Geometrischen Algebra so überzeugt, dass er regelmäßig Schülerinnen und Schüler in das Thema einführt [15].

2. Interdisziplinarität als Chance

Ein interdisziplinäres Herangehen bietet naturgemäß die Möglichkeit, einen Themenbereich – hier die didaktische Aufarbeitung des Quanten-Computings auf Grundlage der Geometrischen Algebra – aus unterschiedlichsten Perspektiven zu analysieren und dementsprechend in sehr unterschiedliche Richtungen gestaltend voranzubringen.

Da wir vor Start unseres Projektes schon längere Zeit zur Geometrischen Algebra gemeinsam diskutierend in Kontakt standen und uns auf zahlreichen Tagungen über die Geometrische Algebra austauschten, waren wir uns unserer gemeinsamen Ziele sicher:

- Eine Förderung des Verständnisses des Quanten-Computings auf Grundlage der Geometrischen Algebra, da wir die Geometrische Algebra aufgrund ihrer inneren Struktur als inhärente, natürliche Algebra der Quantenmechanik verstehen.
- Eine Förderung des Verständnisses der Geometrischen Algebra, indem ein modernes Themengebiet wie das Quanten-Computing erfolgreich unter geometrisch-algebraischen Gesichtspunkten aufgearbeitet wird.

Beides, so zeigen wir auf den folgenden Seiten, ist uns gelungen: Sowohl das Verständnis des Quanten-Computings wie auch das Verständnis der Geometrischen Algebra, kann durch ein interdisziplinäres Vorgehen gesteigert werden.

Den Diskussionsprozess, der entscheidend zum Erfolg dieser Zusammenarbeit beitrug, führten wir, indem wir uns regelmäßig einmal monatlich an der Technischen Universität Darmstadt trafen und Problempunkte diskutierten.

Im Rückblick können wir feststellen, dass es in diesen Diskussionen gerade nicht die weiterführenden Fragen waren, die uns am meisten beschäftigten, sondern dass es Unterschiede in der grundlegenden Perspektive sind, über die wir uns am längsten auseinanderzusetzen hatten. Als die wichtigsten dieser grundlegenden Fragen stellten sich heraus:

- Was ist eigentlich der Kern der Geometrischen Algebra?
- Wo liegt der didaktische Ort einer möglichen Vermittlung des Quanten-Computings auf Grundlage der Geometrischen Algebra? Wer ist in erster Linie unsere Zielgruppe?
- Welche Ziele haben wir bei der Vermittlung des Quanten-Computings?
- Welche didaktische Rolle spielt ein übergreifendes Verständnis der Quantenmechanik für ein Verständnis des Quanten-Computings?

Auch in solchen grundlegenden Fragen konnten wir nicht immer eine einvernehmliche und alle Gesichtspunkte befriedigend einschließende Lösung im Konsens finden. Das ist kein Manko oder Mangel. Die empirische Basis ist nicht nur bei der Didaktik des Quanten-Computings noch recht dünn, sondern auch bei zahlreichen, schon seit Jahren beforschten weiteren Gebieten der Didaktik, über die trotz hoher Forschungsintensität auch kein allgemeiner didaktischer Konsens zu finden ist. Die Didaktik ist nun mal eine pluralistische Wissenschaft, in der der Forschungsgegenstand – das Lernen – immer auch von individuellen Gegebenheiten durchdrungen wird.

Diese Nicht-Einigkeit in grundlegenden Fragen stellt damit eine große Chance für alle Beteiligten dar, diesem individuellem Charakter der Wissenschaftsdisziplin Physikdidaktik gerecht zu werden. Denn offenkundig determinieren die unterschiedlichen beruflichen Hintergründe, die unterschiedlichen wissenschaftlichen Prägungen und die fachspezifische Sozialisation unsere Herangehensweise als Forscherinnen und Forschern weit stärker als wir das im täglichen Leben wahrnehmen.

Tauschen wir uns bei der Analyse wissenschaftlicher Fragestellungen immer nur mit den wissenschaftlich ähnlich sozialisierten Kolleginnen und Kollegen des gleichen Fachgebietes aus, in dem auch wir sozialisiert wurden, so mag uns unter Umständen entgehen, dass es auch gänzlich andere Denk- und Lösungsansätze gibt, die aus anderen Disziplinen stammen und genauso richtig oder falsch sein können wie die Denk- und Lösungsmuster, die in unserer eigenen Disziplin vorherrschen. Deshalb werden im Folgenden zuerst die unterschiedlichen Sichtweisen, die die Autoren betreffen, vorgestellt und problematisiert.

3. Vorprägungen zur Quantenmechanik

Einer der wesentlichen Unterschiede in der individuellen Vorprägung der Autoren besteht offenkundig darin, wie die eigene schulische und hochschulische Vermittlung der Quantenmechanik verlief. Rückblickend auf unsere eigenen Erfahrungen beim Studium der quantenmechanischen Grundlagen stellen wir fest, dass zwei konträrer Zugangsweisen wesentlich sind.

Zum einen ist da der klassische Zugang, der den Welle-Teilchen-Dualismus in den Vordergrund stellt und sich, sehr an Schrödinger orientierend, den Einstieg über die Diskussion der Welleneigenschaften von Teilchen sucht. Ein typisches Bild für diesen Einstieg ist die Interpretation eines im Atom gebundenen Elektrons als stehende Welle.

Einer der Autoren dieses Beitrags (M. H.) hat während seines Studiums jedoch auch eine andere Erfahrung gemacht und wurde mit einem Einstieg in die Quantenmechanik über das Stern-Gerlach-Experiment konfrontiert. Bei einem solchen Einstieg bildet die Frage „Was ist ein quantenmechanischer Zustand?“ den zentralen Kern der Diskussion [25] und führt zu einer an der Matrizenmechanik angelehnten Mathematisierung.

Für einen solchen Einstieg bietet das derzeit noch fiktive Instrument des Quantencomputers eine ideale Diskussionsgrundlage, da das Register eines Quantencomputers den Kern der Frage nach der Natur quantenmechanischer Zustände per se widerspiegelt: Ein Quantenregister ist eine Ansammlung quantenmechanisch verschränkter Objekte, deren (Gesamt-) Zustand beim Quantenrechnen modifiziert wird.

Bei der Darstellung dieser Zustände gibt es nun wiederum zwei Möglichkeiten. Zum einen kann die quantenmechanische Wahrscheinlichkeit, dass ein Zustand eingenommen wird, durch einen komplexen Koeffizienten beschrieben werden. Die Verknüpfung der Quantenmechanik mit komplexen Zahlen favorisieren zwei der drei Autoren (M. H. & P. D.).

Alternativ dazu kann ein Zustandsvektor als zweidimensional aus einem zeitartigen und einem raumartigen Vektor zusammengesetzt gedacht werden, was einer der Autoren (D. H.) favorisiert. Das hat zur Folge, dass der die quantenmechanische Wahrscheinlichkeit determinierende Koeffizient eine rein reelle Größe ist.

Als Konsequenz aus dieser Diskrepanz werden im Folgenden beide Alternativen vorgestellt. Jede Leserin und jeder Leser ist dabei aufgerufen, sich sein eigenes Bild zu generieren.

4. Klassische Computer und Quantencomputer im Vergleich

Die Computer, die wir derzeit nutzen, sind deterministische Geräte, deren Speicher und Registereinheiten aus eineindeutigen Bits aufgebaut sind. Diese Bits nehmen entweder vollständig einen Zustand 0 oder aber vollständig den entgegengesetzten Zustand 1 an. Sie arbeiten im klassischen Bereich, da bei jedem Schaltvorgang, bei dem der Zustand 0 durch den Zustand 1 ersetzt wird (oder umgekehrt), trotz der bereits erreichten Miniaturisierung eine immer noch sehr große Anzahl von Ladungsträgern wechselwirkt.

Eine Leistungssteigerung dieser klassischen Computer ist zwangsläufig mit einer Verkleinerung der Bauteile verbunden. Es ist deshalb abzusehen, dass in einigen Jahren die Schwelle zur Quantenmechanik erreicht wird, wenn die Bauteile so klein werden, dass sie nicht mehr den klassischen Gesetzen folgen, sondern quantenmechanisch-sprunghaft arbeiten.

Schon heute wird diese Problematik, die empirisch dem Gesetz von Moore folgt, in Schulbüchern wie [3, S. 168/169] diskutiert. Dabei wird von einer Verdopplung der Transistorendichte während einer Zeitspanne von ungefähr 18 Jahren ausgegangen. Bei einer zweidimensionalen Anordnung der Transistoren auf einer Oberfläche, wie sie bei der Chipherstellung mit Lithographieverfahren üblicherweise erfolgt, ist während dieser Zeitspanne somit durchschnittlich von einer Größenreduzierung der Bauteile auf $1/\sqrt{2} \approx 71\,\%$ auszugehen.

Wann diese Schwelle zur Quantenmechanik genau erreicht wird, ist umstritten. Realistische Schätzungen für das Zusammenbrechen des Mooreschen Gesetzes gehen jedoch von einem Zeitpunkt zwischen 2020 und 2025 aus. Danach müssten Bauteile verwendet werden, die so klein sind, dass die Elektronen nicht mehr näherungsweise klassisch kontinuierlich interagieren.

Eine derzeit diskutierte Lösungsmöglichkeit für dieses Dilemma besteht darin, die Möglichkeiten des Quanten-Computings [8], [9] umzusetzen, und so eine weitere Miniaturisierung voranzutreiben. Aufgrund der hohen experimentellen Hindernisse gibt es auch hier lediglich Prognosen und nicht unbedingt belastbare Vorhersagen, ob und wann ein einsatzfähiger Quantencomputer zur Verfügung steht.

Gelingt jedoch die Entwicklung, wären die Perspektiven, was eine weitere Miniaturisierung betrifft, spektakulär: So entspräche die Leistungsfähigkeit eines Quantenrechners, der auf ein Register aus 64 Qubits zurückgreifen könnte, nach [20, S. 8] der Leistungsfähigkeit eines klassischen Computers, die eine Oberfläche in der Größenordnung von mehreren Tausend Erdkugeln überdecken müsste. Das Rechnen mit Hilfe einer Quantencomputers stellt somit eine überaus effektive Art des Rechnens dar.

Dies gelingt beim Quantenrechnen mit der spezifischen Kodierung der Information. Während die Bits eines klassisches Computers die beiden möglichen Zustände 0 und 1 jeweils mit einer Wahrscheinlichkeit von 100% oder aber 0% annehmen, liegen die möglichen Zustände $|0\rangle$ oder $|1\rangle$ eines Quantenrechners mit Wahrscheinlichkeiten zwischen 0% und 100 % jeweils verschränkt vor.

5. Beschreibung von Quantenbits

Die Verschränkung der Zustände im Quantencomputer liefert die Erklärung der hohen Rechenkapazität. Ein Quantencomputer kann mit der Superposition aller möglich klassischen Zustände gleichzeitig rechnen und arbeiten. Bei einem einzigen Rechenschritt werden somit eine Unzahl von Zuständen gleichzeitig modifiziert. Das Ergebnis repräsentiert dann eine neue Superposition aller möglichen klassischen Zustände.

Zur Klärung dieses Sachverhalts muss deshalb die Frage: „Was ist ein Zustand?“ in den Vordergrund gestellt werden. Ein quantenmechanischer Zustand beschreibt dabei eine spezielle Eigenschaft eines Mikroteilchens, das betrachtet wird, beispielsweise der Spin eines Elektrons. Der Spin kann nun entweder nach unten (Spin down) ausgerichtet sein, was einem Zustand des Quantenbits von $|0\rangle$ entspricht. Oder der Spin des Elektrons ist noch oben (Spin up) ausgerichtet, was einem Zustand des Quantenbits von $|1\rangle$ entspricht. Oder aber, das Elektron befindet sich in einem Superposition von

$$|\psi\rangle = a_0\,|0\rangle + a_1\,|1\rangle \qquad \{1\}$$

Dies ist die übliche Darstellung einer Überlagerung der beiden Zustände $|0\rangle$ und $|1\rangle$ in der konventionellen Schreibweise (siehe beispielsweise [16, S. 22, Def. 2.1], [21, S. 12, Formel 2.1], [25, S. 11, Formel 1.5]) ohne Nutzung der Geometrischen Algebra.

Dabei stellen die Vorfaktoren bzw. Koeffizienten a_0 bzw. a_1 die Amplituden der Wellenfunktion dar und unterliegen als komplexe Zahlen der Normierungsbedingung

$$|a_0|^2 + |a_1|^2 = a_0\,a_0^* + a_1\,a_1^* = 1 \qquad \{2\}$$

$|a_0|^2$ gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass das Quantenbit bei einer Messung den Zustand $|0\rangle$ (z.B. Spin down) zeigt, während $|a_1|^2$ gibt die Wahrscheinlichkeit angibt, dass das Quantenbit bei einer Messung im Zustand $|1\rangle$ (z.B. Spin up) vorgefunden wird.

Identifiziert man die Zustände $|0\rangle$ und $|1\rangle$ mit den raumartigen Basisvektoren σ_0 und σ_1, die der Normierungsbedingung

$$\sigma_0^{\,2} = \sigma_1^{\,2} = 1 \qquad \{3\}$$

unterliegen, kann die Wellenfunktion {1} in der Geometrischen Algebra als Ortsvektor r in diesem Raum angegeben werden:

$$r = a_0\,\sigma_0 + a_1\,\sigma_1 \qquad \{4\}$$

Diese geometrisch-algebraische Darstellung des Zustands eines Quantenbits wird zum Beispiel von Baylis [1] oder Matzke [22] gewählt.

Zu einer alternativen Darstellung von Quantenbits gelangt man, wenn man auf komplexe Wahrscheinlichkeitsamplituden verzichtet und statt dessen zusätzlich zu raumartigen Basisvektoren zeitartige Basisvektoren zulässt. Mit

$$a_0 = c_0^x + i\,c_0^t \quad \text{und} \quad a_1 = c_1^x + i\,c_1^t \qquad \{5\}$$

werden die Koeffizienten in reelle Vorfaktoren überführt, während die Anzahl der Basisvektoren sich verdoppelt. In dieser alternativen, raumzeitlichen Schreibweise der Geometrischen Algebra lautet der Zustandsvektor von Formel {2}:

$$\begin{aligned} r &= (c_0^x + i\,c_0^t)\,\sigma_0 + (c_1^x + i\,c_1^t)\,\sigma_1 \\ &= c_0^x\gamma_0^x + c_0^t\gamma_0^t + c_1^x\gamma_1^x + c_1^t\gamma_1^t \end{aligned} \qquad \{6\}$$

Zumindest dann, wenn wie bei den Quantenbits eines Quantencomputers Messungen nur bezüglich einer Raumrichtung vorgenommen werden, können die imaginären Einheiten in die nun zeitartige Basisvektoren übernommen werden. Anstelle der Formelbeziehung {3} gilt dann:

$$\begin{aligned} (\gamma_0^x)^2 &= (\gamma_1^x)^2 = 1 \\ (\gamma_0^t)^2 &= (\gamma_1^t)^2 = -1 \end{aligned} \qquad \{7\}$$

Ein Quantenbit kann also in einem komplexen Raum, der durch zwei Basisvektoren aufgespannt wird (siehe Formel {4}) oder aber in einem reellen Raum, der durch vier Basisvektoren aufgespannt wird (Formel {6}) modelliert werden. Diese zweite Alternative findet sich beispielsweise bei Doran und Lasenby [4, Kap. 9] oder Cafaro und Mancini [2].

6. Quantenregister

Liegt ein System aus mehreren Quantenbits vor, spricht man von einem Quantenregister. Im einfachsten Fall werden nur zwei Quantenbits verschränkt. Diese Quantenregister können mathematisch mit Hilfe des Zehfuss-Kronecker-Produkts aus einzelnen Quantenbits generiert werden (siehe z.B. [24, Kap. 2], [7], [19]). Eine Veranschaulichung des Raumes, in dem die entsprechende Wellenfunktion

$$|\psi\rangle = a_{00}|00\rangle + a_{01}|01\rangle + a_{10}|10\rangle + a_{11}|11\rangle \qquad \{8\}$$

mathematisch agiert, liefert Abbildung 1. Es handelt sich dabei um den Versuch, einen vierdimensionalen Raum darzustellen, bei dem alle vier Richtungen der Grundzustände $|00\rangle$, $|01\rangle$, $|10\rangle$ und $|11\rangle$ senkrecht aufeinander stehen.

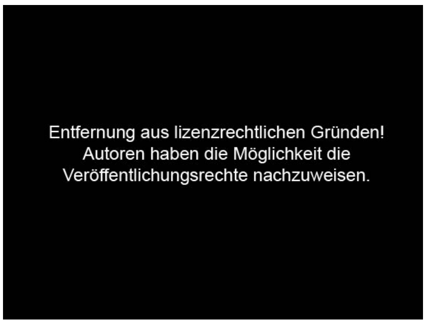

Abb.1: Zustandsvektor r eines aus zwei Quantenbits aufgebauten Quantenregisters.

Wieder sind zwei alternative Darstellungen in der Geometrischen Algebra möglich. Zum einen kann

$$r = a_{00}\sigma_{00} + a_{01}\sigma_{01} + a_{10}\sigma_{10} + a_{11}\sigma_{11} \qquad \{9\}$$

mit komplexen Wahrscheinlichkeitsamplituden und rein räumlichen Basisvektoren σ_{ij} geschrieben werden. Alternativ dazu kann die Anzahl der Basisvektoren zu

$$\begin{aligned} r = {} & c^x_{00}\gamma^x_{00} + c^x_{01}\gamma^x_{01} + c^x_{10}\gamma^x_{10} + c^x_{11}\gamma^x_{11} \\ & + c^t_{00}\gamma^t_{00} + c^t_{01}\gamma^t_{01} + c^t_{10}\gamma^t_{10} + c^t_{11}\gamma^t_{11} \end{aligned} \qquad \{10\}$$

verdoppelt werden, so dass die Wahrscheinlichkeitsamplituden rein reell vorliegen.

Im ersten Fall werden zur Modellierung somit höherdimensionale Pauli-Matrizen herangezogen, während im zweiten Fall höherdimensionale Dirac-Matrizen verwendet werden, die einen hyperbolischen Raum aufspannen Beides sind legitime Darstellungsweisen der Geometrischen Algebra, denn sowohl Pauli- wie auch Dirac-Matrizen sind sowohl als Operanden (hier: Zustandsvektoren) und als Operatoren (hier: Transformationsmatrizen) zu interpretieren.

Damit haben wir im Sinne von Vianna, Trindade und Fernandes [26] ein Kriterium erfüllt, das den Kernpunkt der Geometrischen Algebra auch bei der Beschreibung des Quanten-Computings trifft: „In this regard, we share with many authors the idea that operators and operands should be elements of the same space“ [26, S. 962]. Dies wird im folgenden Abschnitt an einigen Beispielen gezeigt.

7. Rechenschritte im Quanten-Computing

Jeder Rechenschritt auf einem Quanten-Computer besteht aus einer Transformation der Wellenfunktion $|\psi\rangle$ bzw. des sie repräsentierenden Zustandsvektors r. An den folgenden Beispielen wird sichtbar, dass die algebraische Beschreibung der Transformation im Bild der Wellenfunktion $|\psi\rangle$ bei Nutzung der Geometrischen Algebra durch eine geometrische Beschreibung ergänzt wird.

Die algebraischen Transformationen stellen Reflexionen oder Rotationen des Zustandsvektors r dar. Dieses Zusammenspiel zwischen algebraischer und geometrischer Repräsentation im Rahmen der Geometrischen Algebra führt zu einer besseren didaktischen Greifbarkeit des Quanten-Computings. Das Rechnen im Quanten-Computer kann damit auf zwei unterschiedlichen Zugangsweisen begriffen werden.

7.1. Die NOT-Operation

Eine der einfachsten Operationen ist die simple Invertierung des Zustands eines einzigen Quantenbits. Diese Operation wird NOT-Operation [24, S. 5] genannt. Drei unterschiedliche Sichtweisen beschreiben diese Operation:

- **Physikalische Sichtweise**

  Die beiden Zustände $|0\rangle$ und $|1\rangle$ werden ineinander überführt:

  $$|0\rangle \to |1\rangle \quad \text{bzw.} \quad |1\rangle \to |0\rangle \qquad \{11\}$$

- **Algebraische Sichtweise**

  Die beiden Wahrscheinlichkeitsamplituden werden vertauscht:

  $$a_0 \to a_1 \quad \text{bzw.} \quad a_1 \to a_0 \qquad \{12\}$$

- **Geometrische Sichtweise**

  Der Zustandsvektor r wird am Reflexionsvektor

  $$r_{ref} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_0 + \sigma_1) \qquad \{13\}$$

  gespiegelt.

Die tatsächliche physikalische Realisierung gelingt, indem das Quantenbit gezielt mit einer geeigneten elektromagnetischen Welle bestrahlt wird.

Die algebraische Transformation wird durch den Transformator

$$U_{NOT} = |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0| \qquad \{14\}$$

realisiert:

$$\begin{aligned} r' &= U_{NOT}\, r \\ &= \big(|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|\big)\big(a_0|0\rangle + a_1|1\rangle\big) \\ &= a_1|0\rangle + a_0|1\rangle \end{aligned} \qquad \{15\}$$

Im Kontext der Geometrischen Algebra kann diese Transformation mit Hilfe der Pauli-Matrizen nun als

$$\begin{aligned} r' &= r_{ref}\, r\, r_{ref} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_0+\sigma_1)(a_0\sigma_0+a_1\sigma_1)\frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_0+\sigma_1) \\ &= \frac{1}{2}(a_0+a_0\sigma_1\sigma_0+a_1\sigma_0\sigma_1+a_1)(\sigma_0+\sigma_1) \\ &= a_1\sigma_0 + a_0\sigma_1 \end{aligned} \qquad \{16\}$$

dargestellt und damit geometrisch als Reflexion behandelt werden.

Eine analoge geometrische Deutung erhält man bei Nutzung von raumzeitlichen Basisvektoren. Dabei werden jedoch zwei Reflexionen notwendig. Zuerst wird an der dreidimensionalen Hyperebene

$$r_{ref1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma^x_0 + \gamma^x_1)\gamma^t_0\gamma^t_1 \qquad \{17\}$$

reflektiert, um die raumartigen Basisvektoren zu spiegeln. Danach werden die zeitartigen Basisvektoren durch eine Reflexion an der Hyperebene

$$r_{ref2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma^t_0 + \gamma^t_1)\gamma^x_0\gamma^x_1 \qquad \{18\}$$

gespiegelt. Insgesamt erhält man die zusammengesetzte Transformation

$$r' = -\, r_{ref2}\, r_{ref1}\, r\, r_{ref1}\, r_{ref2} \qquad \{19\}$$

Da zwei hintereinander ausgeführte Reflexionen eine Rotation ergeben, kann Formel {19} als Rotation aufgefasst werden. Aufgrund der antikommutativen

Vertauschung verschiedener Basisvektoren stellt sie jedoch zugleich eine Reflexion dar, da $r_{ref1}\, r_{ref2}$ in

$$
\begin{aligned}
r_{ref1}\, r_{ref2} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma_0^x + \gamma_1^x)\gamma_0^t\gamma_1^t \, \frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma_0^t + \gamma_1^t)\gamma_0^x\gamma_1^x \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma_0^x + \gamma_1^x)\gamma_0^t\gamma_1^t \, \frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma_0^t + \gamma_1^t)\gamma_0^x\gamma_1^x \\
&= \frac{1}{2}(\gamma_0^x - \gamma_1^x)(\gamma_0^t - \gamma_1^t) = -\, r_{ref2}\, r_{ref1} \qquad \{20\}
\end{aligned}
$$

umgeformt werden kann. Es handelt sich somit um eine Reflexion an der zweidimensionalen Ebene, die durch den Reflexions-Bivektor

$$R = \frac{1}{2}(\gamma_0^x - \gamma_1^x)(\gamma_0^t - \gamma_1^t) \qquad \{21\}$$

repräsentiert wird.

Dies bestätigt die vollständige Rechnung:

$$
\begin{aligned}
r' &= R\, r\, R \\
&= c_1^x\gamma_0^x + c_1^t\gamma_0^t + c_0^x\gamma_1^x + c_0^t\gamma_1^t \qquad \{22\}
\end{aligned}
$$

Diese raumzeitlichen Beschreibung scheint zwar im Rechenaufwand größer als die nur mit räumlichen Basisvektoren arbeitende Version der Geometrischen Algebra von Formel {16}. Dafür aber hat sie den didaktischen Vorteil, dass die Darstellungen von Reflexionen und Rotationen in höherdimensionalen Räumen in sehr anschaulicher Weise sowohl algebraisch wie auch geometrisch problematisiert werden kann.

7.2. Die Hadamard-Transformation

Die Hadamard-Transformation auf ein Quantenbit wird durch die Matrix [16, S. 24]

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \{23\}$$

beschrieben und spielt in der höherdimensionalen Verallgemeinerung eine wichtige Rolle bei der Programmierung verschränkter Zustände mehrer Quantenbits im Quanten-Computing [8], [9].

Sie wird algebraisch durch den Transformator

$$U_H = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|\right) \qquad \{24\}$$

vermittelt:

$$
\begin{aligned}
r_H &= U_H\, r \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(a_0 + a_1)\,|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}(a_0 - a_1)\,|1\rangle \qquad \{25\}
\end{aligned}
$$

Die Wahrscheinlichkeitsamplituden werden also addiert bzw. subtrahiert. Im Kontext der Geometrischen Algebra erkennt man, dass es sich dabei um eine Reflexion an einer Achse handelt, die 22,5° = $\pi/8$ gegenüber der $|0\rangle$-Zustandsachse geneigt ist (siehe Abbildung 2).

Dies lässt sich mit Hilfe des Reflexionsvektors

$$
\begin{aligned}
n &= \cos 22{,}5°\ \sigma_0 + \sin 22{,}5°\ \sigma_1 \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\ \sigma_0 + \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}\ \sigma_1 \qquad \{26\}
\end{aligned}
$$

leicht zeigen:

$$
\begin{aligned}
r_H &= n\, r\, n \\
&= \frac{1}{4}\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\,\sigma_0 + \sqrt{2-\sqrt{2}}\,\sigma_1\right)(a_0\sigma_0 + a_0\sigma_1) \\
&\qquad \frac{1}{4}\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\,\sigma_0 + \sqrt{2-\sqrt{2}}\,\sigma_1\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(a_0 + a_1)\,\sigma_0 + \frac{1}{\sqrt{2}}(a_0 - a_1)\,\sigma_1 \qquad \{27\}
\end{aligned}
$$

Die Rechnung bestätigt die graphische Interpretation, kann aber alternativ auch mit raumzeitlichen Basisvektoren durchgeführt werden.

Entfernung aus lizenzrechtlichen Gründen!
Autoren haben die Möglichkeit die
Veröffentlichungsrechte nachzuweisen.

Abb.2: Graphische Veranschaulichung der Hadamard-Transformation

Dabei wird der Zustandsvektor {6} in Analogie zu Abschnitt 7.1 wieder einer doppelten Reflexion unterworfen.

7.3. Die CNOT-Operation

Die CNOT-Operation [16, S. 30], [9, S. 74] ist eine der elementaren logischen Operationen, die beim Quanten-Computing eine wesentliche Rolle spielt und auf ein Zwei-Quantenbit-Register wirkt. Wenn Das erste Quantenbit mit 0 belegt ist (und somit den Zustand $|0\rangle$ aufweist), verbleibt der Zustand des zweiten Quantenbits unverändert. Wenn das erste Quantenbits mit 1 belegt ist (und somit den Zustand $|1\rangle$ aufweist, wird das zweite Quantenbit invertiert.

Die algebraische Transformation in der üblichen Notation wird durch den Transformator

$$
\begin{aligned}
&U_{CNOT} \\
&= |00\rangle\langle 00| + |01\rangle\langle 10| + |10\rangle\langle 11| + |11\rangle\langle 10| \qquad \{28\}
\end{aligned}
$$

realisiert:

$$
\begin{aligned}
r_{CNOT} &= U_{CNOT}\, r \\
&= a_{00}|00\rangle + a_{01}|01\rangle + a_{11}|10\rangle + a_{10}|11\rangle \qquad \{29\}
\end{aligned}
$$

Dies kann algebraisch als eine Permutation der Symmetriegruppe S_4 [16, S. 31] verstanden werden, bei der die Koeffizienten a_{10} und a_{11} symmetrisch vertauschen.

Im Kontext der Geometrischen Algebra kann diese Transformation mit Hilfe der verallgemeinerten Pauli-Matrizen als eine Spiegelung des Zustandsvektors {9} gedeutet werden. Diese Reflexion im vierdimensionalen Zustandsraum findet an einer dreidimensionalen Hyperebene statt. Diese wird zum einen durch die beiden Basisvektoren aufgespannt, die die Zustandsrichtungen repräsentieren, die bei der Reflexion nicht tangiert werden. Dies sind die Richtungen, die durch die Basisvektoren σ_{00} und σ_{01} repräsentiert werden, da das jeweils erste Quantenbit bei diesen Zuständen mit 0 belegt ist. Zum zweiten soll eine Reflexion an der Diagonalen zwischen den Basisvektoren σ_{10} und σ_{11} generiert werden, die diese beiden Richtungen vertauscht. Die Spiegelebene lautet deshalb:

$$m = \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma_{00}\,\sigma_{01}\,(\sigma_{10} + \sigma_{11}) \qquad \{30\}$$

Im Kontext der Geometrischen Algebra kann diese Transformation mit Hilfe der Pauli-Matrizen nun als

$$\begin{aligned} r_{CNOT} & \\ &= m\,r\,m \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma_{00}\sigma_{01}(\sigma_{10}+\sigma_{11})\,r\,\frac{1}{\sqrt{2}} \sigma_{00}\sigma_{01}(\sigma_{10}+\sigma_{11}) \\ &= a_{00}\sigma_{00} + a_{01}\sigma_{01} + a_{11}\sigma_{10} + a_{10}\sigma_{11} \qquad \{31\} \end{aligned}$$

dargestellt werden. Analog dazu gelingt auch die Repräsentation in der Geometrischen Algebra mit raumzeitlichen Basisvektoren durch Reflexion des achtdimensionalen Zustandsvektors {10} an der Spiegelebene

$$M = (\gamma_{10}^{t} - \gamma_{11}^{t})(\gamma_{10}^{x} - \gamma_{11}^{x}) \qquad \{32\}$$

ebenso problemlos:

$$\begin{aligned} r_{CNOT} & \\ &= M\,r\,M \\ &= c_{00}^{x}\gamma_{00}^{x} + c_{01}^{x}\gamma_{01}^{x} + c_{11}^{x}\gamma_{10}^{x} + c_{10}^{x}\gamma_{11}^{x} \qquad \{33\} \\ &\quad + c_{00}^{t}\gamma_{00}^{t} + c_{01}^{t}\gamma_{01}^{t} + c_{11}^{t}\gamma_{10}^{t} + c_{10}^{t}\gamma_{11}^{t} \end{aligned}$$

8. Konsequenzen für eine Didaktik des Quanten-Computings

Anknüpfungspunkt für eine Didaktik des Quanten-Computings sind folgende Überlegungen:

- Der Weg zum Quanten-Computing führt über die Matrizenmechanik.
- Der Weg zur Matrizenmechanik führt über die Pauli- und Dirac-Algebra.
- Pauli- und Dirac-Algebra sind inhärenter Teil der Geometrischen Algebra.

Dies führt zur Schlussfolgerung:

- Quanten-Computing kann mit Hilfe der Geometrischen Algebra beschrieben und gelernt werden.

Diese Schlussfolgerung kann präzisiert werden, wenn der fachliche Hintergrund mit berücksichtigt wird. Bereits erwähnt wurde in den einführenden Abschnitten die mathematikdidaktischen Vorteile: Mit der Geometrischen Algebra wird eine strukturelle Einheit von Geometrie und Algebra verwirklicht, die dazu führt, dass algebraische und geometrische Darstellungen gleichberechtigt nebeneinander stehen.

Eine physikalische und physikdidaktische Aufarbeitung sollte diese mathematikdidaktischen Vorteil widerspiegeln. Dies trifft umso mehr für ein Fachgebiet wie die Quantenmechanik zu, in der sich überraschende, oft anti-intuitiven Beschreibungen von physikalischen Sachverhalten wiederfinden. Quantenmechanische Phänomene knüpfen nur selten und nur in einem sehr beschränkten Umfang an Erscheinungen und Phänomene an, mit denen wir in unserem täglichen Leben in der Makrowelt konfrontiert sind. Im Gegenteil: die Phänomene der Mikrowelt erscheinen uns oftmals als sehr komplex, logisch nur schwer nachvollziehbar und kaum oder gar nicht verständlich.

Da die Quantenmechanik und mit ihr das Quanten-Computing kognitiv nicht einfach zu erschließen ist und vielen Lernenden schwer verständlich scheint, ist es sinnvoll, den Übergang in die Beschreibung der Quantenwelt nicht noch dadurch zu erschweren, dass eine neue mathematische Sprache eingeführt wird.

Es ist für Lernende eine große Hilfe, wenn der mathematische Rahmen beim Übergang von der Makrowelt in die Mikrowelt konstant bleibt. Und genau das liefert die Geometrische Algebra: Mit Hilfe der Geometrischen Algebra kann sowohl die klassische Physik wie auch die Quantenmechanik mathematisch modelliert werden. Hier zeigt sich eine mathematische Einheitlichkeit von klassischer und quantenmechanischer Welt, die von uns drei Autoren dieses Beitrags als so wichtig angesehen wird, dass wir schon allein deshalb die Nutzung der Geometrischen Algebra als mathematisches Werkzeug der Physik legitimiert sehen und alternative Mathematisierungen als lernhinderlich einordnen.

Dies führt zu der präzisierten Schlussfolgerung:

- Quanten-Computing sollte mit Hilfe der Geometrischen Algebra beschrieben und gelernt werden.

Um nun den didaktischen Platz des Quanten-Computings und die entsprechende Zielgruppe, der die faszinierende Welt des Quanten-Computings vermittelt werden kann, zu ermitteln, sind sowohl objektive Kriterien (wie beispielsweise das Vorwissen der Lernenden) und subjektive Kriterien (wie beispielsweise persönliche Vorprägungen hinsichtlich der Frage, was ein entsprechender Unterricht leisten sollte) ausschlaggebend. Hier scheinen mehrere Szenarien denkbar, die im Folgenden kurz erläutert werden.

8.1. Quanten-Computing als schulisches Thema

Die klassische Physik kann im schulischen Kontext auf Grundlage der Geometrischen Algebra vermittelt werden. Wie oben aufgeführt, ist es mittel- und langfristig sinnvoll, im Leistungskursunterricht Mathematik die derzeit gelernte Lineare Algebra in ihrer konventionellen Darstellung durch die Geometrische Algebra zu ersetzen. Im Leistungskursunterricht Physik kann schon heute die Geometrische Algebra sehr gut zur Modellierung physikalischer Phänomene wie beispielsweise der Speziellen Relativitätstheorie [17], [18] erfolgen. Und langfristig werden sich mit Sicherheit auch in der Mittelstufe bei Prägung des Koordinaten- und des Vektorbegriffs geometrisch-algebraische Argumentationsmuster durchsetzen.

Schülerinnen und Schüler, die ein solches Vorwissen mitbringen, können im Rahmen eines Quantenmechanikunterrichts der Oberstufe auch sinnvoll in das Quanten-Computing eingeführt werden. Allerdings ist es dabei sinnvoll, auf die Nutzung komplexer Zahlen zu verzichten, da diese üblicherweise nicht (oder nicht allen Schülerinnen und Schülern) bekannt sind.

Stattdessen ist es möglich, raumzeitliche Zustandsvektoren im Sinne von Formeln {6} und {10} zu nutzen. Da Schülerinnen und Schülern, die die Spezielle Relativitätstheorie auf Grundlage der Geometrischen Algebra behandelt haben, der Unterschied zwischen räumartigen und zeitartigen Basisvektoren bekannt ist, ist ein solches Vorgehen möglich.

Dabei wird im schulischen Rahmen weiterhin von Vektoren und geometrischen Objekten die Rede sein, die ohne Bezug zur Matrizendarstellung behandelt werden.

8.2. Quanten-Computing als hochschulisches Thema

Bei Lernenden, die aufgrund ihrer schulischen oder hochschulischen Vorgeschichte bereits mit der Geometrischen Algebra vertraut sind, kann die Einführung in die Physik des Quanten-Computings in einer elaborierten Form mit Hilfe komplexer Zahlen erfolgen.

Da Pauli- und Dirac-Matrizen explizite Themen der hochschulischen Physikausbildung sind, ist es möglich und sinnvoll, diese Darstellungsweisen zur Erörterung des Quanten-Computings heranzuziehen. Koordinatenfreie und koordinatennutzende Darstellungsmuster können dann parallel und in Relation zueinander eingeführt werden, um ein metakonzeptuelles Verständnis bei den Studierenden zu fördern.

Hier findet dann ein Weiterlernen anstelle eines Umlernens statt, wenn die Studierenden auf Basis der Geometrischen Algebra neue physikalische Phänomene in bekannte mathematische Strukturen einbetten können.

Die Entscheidung darüber, welches Szenario sinnvoll und umsetzbar ist und welcher Weg mit welcher Zielgruppe gegangen wird, muss jede Lehrperson selber treffen. Wie einführend erläutert, sind die individuellen Vorstellungen und Vorprägungen dabei nicht unwesentlich.

Ausdiskutiert wurde dies von uns drei Autoren untereinander insbesondere am Beispiel des Einsatzes und der Stellung der komplexen Zahlen bei der Beschreibung des Quanten-Computings, die dann zu jeweils anderen Präferenzen in der didaktischen Umsetzung führten.

Dieser Diskussionsprozess ist bei weitem noch nicht abgeschlossen, denn eine Fragestellung muss auf jeden Fall noch vertieft werden:

- Welche didaktische Rolle spielt ein übergreifendes Verständnis der Quantenmechanik für ein Verständnis des Quanten-Computings?

Als Physikdidaktikerinnen und Physikdidaktiker leben wir mit der Vorstellung, dass eine übergreifendes Verständnis des Quantenmechanik auf jeden Fall eine Voraussetzung für die Entwicklung eines trag- und anschlussfähigen Verständnisses des Quanten-Computings ist.

Andere wissenschaftliche Kulturen geben jedoch andere Antworten auf solche und ähnliche Fragen. In der Informatik, so wurde im Diskussionsprozess deutlich, ist es akzeptierte wissenschaftliche Vorgehensweise, Unbekanntes nur äußerlich zu beschreiben und ansonsten wesentlich Systembausteine als Black Box zu verwenden. Man muss nicht wissen, ***wie*** ein Serviceprogramm, das man zur Realisierung eines eigenen Informatikprojektes nutzt, funktioniert; man muss nur wissen, ***was*** es macht.

Im Sinne dieser Vorstellung können auch Unterrichtsgänge zugelassen werden, die wesentliche Charakteristiken der Quantenmechanik im Sinne einer Black Box zur Verfügung stellen, und auch ohne vertiefte Kenntnis der Quantenmechanik ein Unterrichten des Quanten-Computings erlauben.

Und hier treffen wir auf das prinzipielle Problem der Quantenmechanik: Können wir sie überhaupt vollständig intrinsisch verstehen und tatsächlich ergründen, ***wie*** die Quantenmechanik funktioniert. Oder ist aller Umgang mit quantenmechanischen Erscheinungen nicht per se pragmatisch, da wir sowieso nur wissen können, ***was*** in der Quantenmechanik passiert? Wie letztendlich eine didaktisch vollständig rekonstruierte „real theory“ [12, S. 116] des Quanten-Computings aussehen wird, werden wir in der Zukunft noch ergründen müssen.

9. Literatur

[1] Baylis, William E. (2008): A Relativistic Algebraic Approach to the Q/C Interface: Implications for “Quantum Reality”. In: Advances in Applied Clifford Algebras, 18 (2008), S. 395 – 415.

[2] Cafaro, Carlo; Mancini, Stefano (2011): A Geometric Algebra Perspective on Quantum Com-

putational Gates and Universality in Quantum Computing. In: Advances in Applied Clifford Algebras, 21 (2011), S. 493 – 519.

[3] Diehl, Bardo; Erb, Roger; Heise, Harri; Kotthaus, Udo; Lindner, Klaus; Schlichting, Hans-Joachim; Schmalhofer, Claus; Schön, Lutz-Helmut; Schröder, Klaus; Schulze, Helmke; Schulze, Peter; Tews, Wolfgang; Tillmanns, Peter; Winter, Rolf (2008): Physik Oberstufe. Gesamtband. Cornelsen-Verlag, Berlin.

[4] Doran, Chris; Lasenby, Anthony (2003): Geometric Algebra for Physicists, Cambridge University Press, Cambridge.

[5] Drechsel, Paul (2009): Philosophie des Relationskonzeptes und der Geometrischen Algebra. URL: www.drechsel-science.de (Stand 18. Mai 2012).

[6] Drechsel, Paul (2010): Von Graßmanns Ausdehnungslehre zur Geometrischen Algebra und Logik. Vortrag gehalten am 29. Januar 2010 im Ernst-Schröder-Zentrum der Technischen Universität Darmstadt.

[7] Drechsel, Paul; Hildenbrand, Dietmar; Horn, Martin Erik (2012): Didaktische Wege zum Quanten-Computing. In: Sascha Bernholt (Hrsg.): Konzepte fachdidaktischer Strukturierung für den Unterricht, Beiträge zur Jahrestagung der GDCP in Oldenburg, Band 32, S. 649 – 651, LIT-Verlag Dr. W. Hopf, Berlin 2012.

[8] Ekert, Artur; Hayden, Patrick; Inamori, Hitoshi; Li Oi, Daniel Kuan (2001): What is Quantum Computation? In: Chen, Louis H. Y.; Jesudason, J. Packer; Lai, Choy Heng; Oh, Choo Hiap; Phua, Kok Khoo; Tan, Eng-Chye (Hrsg.): Challenges for the 21st Century. Proceedings of the International Conference on Fundamental Sciences, Mathematics and Theoretical Physics. S. 351 – 383, World Scientific, Singapore.

[9] Ekert, Artur; Macchiavello, Chiara (2000): An Overview of Quantum Computing. In: Macchiavello, Chiara; Palma, G. Massimo; Zeilinger, Anton (Hrsg.): Quantum Computation and Quantum Information Theory. Reprint Volume with Introductory Notes for ISI TMR Network School at Villa Gualino, Turino, Kap. 3.1, S. 66 – 85, World Scientific, Singapore.

[10] Gull, Stephan; Lasenby, Anthony; Doran, Chris (1993): Imaginary Numbers are not Real – The Geometric Algebra of Spacetime. In: Foundations of Physics, 23 (1993), S. 1175 – 1201.

[11] Hestenes, David (2002): New Foundations for Classical Mechanics. 2. Auflage, Kluwer Academic Publishers, New York, Boston.

[12] Hestenes, David (2003): Reforming the Mathematical Language of Physics. Oersted Medal Lecture. In: American Journal of Physics, 71 (2003), S. 104 – 121.

[13] Hestenes, David (2003): Spacetime Physics with Geometric Algebra. In: American Journal of Physics, 71 (2003), S. 691 – 714.

[14] Hildenbrand, Dietmar (2006): Geometric Computing in Computer Graphics and Robotics using Conformal Geometric Algebra. Dissertation, angefertigt am Fachbereich Informatik der Technischen Universität Darmstadt, Band D17 der Reihe Darmstädter Dissertationen.

[15] Hildenbrand, Dietmar (2012): Geometric Algebra in the Classroom. In: GA Net Upadates, URL: http://gaupdate.wordpress.com (Stand 18. Mai 2012) .

[16] Homeister, Matthias (2008): Quantum Computing verstehen. Grundlagen – Anwendungen – Perspektiven. 2. aktualisierte und durchgesehene Auflage, Friedrich Vieweg & Sohn Verlag / GWV Fachverlage, Wiesbaden.

[17] Horn, Martin Erik (2011): Grassmann, Pauli, Dirac – Special Relativity in the Schoolroom. In: Hans-Joachim Petsche, Albert C. Lewis, Jörg Liesen, Steve Russ (Hrsg.): From Past to Future – Graßmann's Work in Context, S. 435 – 450, Birkhäuser-Verlag, Basel, Berlin.

[18] Horn, Martin Erik (2011): Teaching Special Relativity with Geometric Algebra. In: Gürlebeck, Klaus (Hrsg.): Proceedings of the 9th International Conference on Clifford Algebras and their Applications in Mathematical Physics. Digital Proceedings/Tagungs-CD der ICCA9 in Weimar, Bauhaus-Universität, Weimar.

[19] Horn, Martin Erik (2011): Geometrische Algebra in höheren Dimensionen. In: PhyDid B – Didaktik der Physik, Beiträge zur DPG-Frühjahrstagung des Fachverbands Didaktik der Physik in Münster, Beitrag 18.15.

[20] Johnson, George (2004): A Shortcut Through Time. The Path to the Quantum Computer. Vintage Books, New York.

[21] McMahon, David (2008): Quantum Computing Explained. John Wiley & Sons, Hoboken, New Jersey.

[22] Matzke, Douglas J. (2002): Quantum Computation using Geometric Algebra. Dissertation presented to the Faculty of the Graduate School of the University of Texas at Dallas in partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy in Electrical Engineering. University of Texas, Dallas.

[23] Perwass, Christian; Hildenbrand, Dietmar (2004): Aspects of Geometric Algebra in Euclidean, Projective and Conformal Space. An Introductory Tutorial. 15. Januar 2004 (Version 1.1), Computer Science Institute, Christian-Albrechts-Universität, Kiel.

[24] Steeb, Willi-Hans; Hardy, Yorick (2004): Problems and Solutions in Quantum Computing and Quantum Information. World Scientific, Singapore.

[25] Townsend, John S. (1992): A Modern Approach to Quantum Mechanics. International Edition. McGraw-Hill, New York, Singapore.

[26] Vianna, José David M.; Trindade, Marcelo A. S.; Fernandes, Marco César Barbosa (2008): Algebraic Criteria for Entanglement in Multipartite Systems. In: International Journal of Theoretical Physics, 47 (2008), S. 961 – 970.

[27] Voß, Nicole (2010): Die Universalsprache. In: Referat Kommunikation der TU Darmstadt (Hrsg.): hoch^3. Die Zeitung der Technischen Universität Darmstadt. 6 (2010), S. 10.