Eine andere Geometrische Algebra

Martin Erik Horn*

*Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt/Main, Institut für Didaktik der Physik,
Max-von-Laue-Str. 1, 60438 Frankfurt/Main,

Email: m.horn@physik.uni-frankfurt.de

Kurzfassung

Die Geometrische Algebra erweist sich als wirkungsvolles und gleichzeitig einfaches mathematisches Instrument, räumliche und raumzeitliche Beziehungen und Transformationen zu modellieren. Dabei werden die (2 x 2)-Matrizen der Pauli-Algebra bzw. die (4 x 4)-Matrizen der Dirac-Algebra als Basiselemente aufgefasst, deren Koordinaten- und Operatorcharakter didaktisch und strukturell in Beziehung gesetzt werden. In schulischen und hochschulischen Lernsituationen hat sich diese auf Graßmann zurückgehende Geometrische Algebra bewährt.

Doch welche geometrische Bedeutung kann (3 x 3)-Matrizen zugeordnet werden? Auch hier zeigt sich, dass bei einer geeigneten Wahl dieser Matrizen diese als Basisvektoren bzw. Basisreflexionen gedeutet und didaktisch genutzt werden können.

Die Eigenheiten dieser (3 x 3)-Matrizenalgebra werden vorgestellt und in Beziehung zu der von David Hestenes geschaffenen Didaktik der Geometrischen Algebra gesetzt. Dabei eröffnet diese andere Geometrische Algebra nicht nur didaktisch alternative Zugänge, sondern auch neue erkenntnistheoretische Sichtweisen auf die Verknüpfung von mathematischer Modellierung und struktureller Fundierung unserer physikalischen Welt.

1. Das Buch der Natur

Die Geometrische Algebra nimmt Galileo Galilei ernt. Sie nimmt ihn beim Wort: „Das Buch der Natur kann man nur verstehen, wenn man vorher die Sprache und die Buchstaben gelernt hat, in denen es geschrieben ist. Es ist in mathematischer Sprache geschrieben, und die Buchstaben sind Dreiecke, Kreise und andere geometrische Figuren...“ (zitiert nach [4, S. 106]).

Das ist ein konzeptuell mutiger Satz – zum einen, weil damit zum Ausdruck kommt, dass Naturerscheinungen durch Regeln beschrieben werden können und so dem menschlichen Verständnisprozess zugänglich sind. Das war nicht unbedingt allen Zeitgenossen Galileis klar.

Zum anderen hat dieser Satz aber nicht nur eine zeitgeschichtliche Relevanz, sondern ist heute noch aktuell. Galilei schreibt nicht: „Es ist in mathematischer Sprache geschrieben, und die Buchstaben sind Zahlen...“ Genau das aber ist der Eindruck, den Lernenden auch heute noch in Schule und Hochschule vermittelt wird. Mathematik scheint in erster Linie der Umgang mit Zahlen zu sein, und so nutzen wir die Mathematik in der Physik und anderen Naturwissenschaften: als Servicewissenschaft, mit der man Berechnungen ausführen kann.

Die Konsequenz dieser Fehlentwicklung benennt schon Galilei in drastischen Worten: „Es ist in mathematischer Sprache geschrieben, und die Buchstaben sind Dreiecke, Kreise und andere geometrische Figuren, und ohne diese Hilfsmittel ist es menschenunmöglich, auch nur ein Wort davon zu begreifen“ (zitiert nach [4, S. 106]).

Eine algebraische Fixierung auf Zahlen verhindert, das Buch der Natur zu verstehen. Erst, wenn wir unsere algebraischen Kenntnisse konzeptuell mit der Geometrie verknüpfen, ist ein stimmiges, physikalisch fundiertes Naturverständnis möglich.

Damit aber üben wir auch umgekehrt eine Rückwirkung auf die Mathematik aus, indem wir die Geometrie physikalisch einbinden. Die mathematischen Objekte, die wir als Physikerinnen und Physiker nutzen, sind keine rein abstrakten Denkmuster, sondern konkrete Objekte, die wir der Welt, in der wir leben, entnehmen. „Die so ergänzte Geometrie ist offenbar eine Naturwissenschaft; wir können sie geradezu als den ältesten Zweig der Physik betrachten“ schreibt Einstein dazu in [3, S. 6].

2. Geometrische Algebra

Die Geometrische Algebra liefert deshalb einen tragenden Beitrag zu einer fundierten Naturbeschreibung, weil mit ihr Geometrie und Algebra konsistent aufeinander bezogen und verknüpft werden. Das ist der Grund, weshalb sie ein wirkungsvolles und konzeptuell einfaches Instrument zur Beschreibung räumlicher und raumzeitlicher Beziehungen liefert, das weit wirkungsmächtiger ist als die Lineare Algebra in der derzeit meist genutzten Standarddarstellung [18].

Doch obgleich Geometrie und Algebra in der Geometrischen Algebra sachstrukturell eng verknüpft werden, zeigt die Geschichte der Geometrischen Algebra, dass dabei zwei unterschiedliche Wege eingeschlagen werden können: Zum einen kann die Geometrische Algebra koordinatenfrei gedacht und formuliert werden, was von zahlreichen Protagonisten der Geometrischen Algebra aus epistemologischen Gründen (siehe z.B. [6]) favorisiert wird.

Zum anderen kann bei der Darstellung geometrischer Sachverhalte ein expliziter Bezug auf Koordinaten genommen werden. Dies ist durchgängig im schulischen Bereich der Fall, wenn im Unterricht Geometrie und Algebra verknüpft werden. Beispielsweise zeigt sich bei der Diskussion von Bewegungsgleichungen im Physikunterricht der Sekundarstufe II, dass Weg-Zeit-Diagramme, Geschwindigkeits-Zeit-Diagramme und Beschleunigungs-Zeit-Diagramme den Lernprozess tatsächlich stützen. Eine koordinatenfreie Diskussion dieser Sachverhalte wäre hier im physikalischen Kontext schwierig, da die experimentelle Aufnahme von Messwerten die Wahl eines Koordinatensystems impliziert.

Und weil Koordinaten eine kognitiv entscheidende Rolle bei der Diskussion physikalischer Prozesse spielen, ist die Darstellung von Koordinaten, die sich durch schulische Prägungen schon vor Jahrzehnten verfestigt hat, ein für jeden von uns wesentlicher Gesichtspunkt. Wir merken das im Alltag allerdings kaum, da die meisten Gesprächspartner, mit denen wir uns mathematisch oder physikalisch auseinander setzen, eine uns sehr ähnelnde Auffassung von Koordinaten aufweisen dürften und es deshalb selten zur Hinterfragung des eigenen Standpunktes kommt.

Umso dramatischer ist dann die Situation, wenn solche Konfrontationsprozesse mit unserer kognitiv vorgeprägten Gedankenwelt tatsächlich einmal auftreten. Deshalb schreiben Gull, Lasenby und Doran „We have now reached the point which is liable to cause the greatest intellectual shock”, als sie in [5, S. 1184] die Basisvektoren e_x, e_y und e_z unserer dreidimensionalen, euklidischen Welt, in der wir vor Einstein lebten, mit den Pauli-Matrizen identifizieren:

$$e_x = \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

$$e_y = \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

$$e_z = \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

Der nächste „greatest“ – also größtmögliche – intellektuelle Schock folgt dann einige Seiten später, wenn die Basisvektoren unserer raumzeitlichen Welt, in der wir seit Einstein leben, eingeführt werden [5, S. 1192]: Sie können mit den Dirac-Matrizen [5, S. 1193] identifiziert werden. Strukturell gehen die Basisvektoren der vierdimensionalen Raumzeit, die somit durch (4 x 4)-Matrizen dargestellt werden, aus den Basisvektoren des dreidimensionalen Raums, die durch die (2 x 2)-Matrizen {1} – {3} repräsentiert werden, mit Hilfe des Zehfuß-Kronecker-Produkts hervor [22], [23], [11].

Dieser auf Ideen von Graßmann, Clifford, Hamilton, Cartan, Pauli und Dirac aufbauende und von David Hestenes (siehe z.B. [7], [8], [9]) und anderen Autoren (siehe z.B. [2], [18]) didaktisch aus- und aufgearbeitete Ansatz hat sich in schulischen (siehe z.B. [12]) und hochschulischen (siehe z.B. [10], [17]) Lernsituationen bewährt. In solchen Lernsituationen ist deshalb auch in Zukunft die Wahl von Pauli- und Dirac-Matrizen zur Repräsentation von räumlichen bzw. raumzeitlichen Basisvektoren angezeigt.

Dennoch: Bei der Durchdringung wissenschaftlicher Sachverhalte ist die Erzeugung kognitiver Konflikte ein Wert für sich. Die Erschütterung, die unsere eingefahrene und oftmals vorgeprägte Gedankenwelt erfährt, wenn wir wieder einmal einen „greatest intellectual shock“ erleiden, kann unsere Blickrichtung öffnen und uns neue kognitive Horizonte erschließen.

Deshalb wird im Folgenden eine weitere Repräsentation von Basisvektoren diskutiert, die ebenso unerwartet wie überraschend erscheint und einen solchen kognitiven Konflikt zu generieren vermag: Die Repräsentation von Basisvektoren durch die (3 x 3)-Matrizen der Permutationsgruppe S_3 [15].

Diese Wahl hat den erkenntnistheoretischen Vorteil, dass nur positive Zahlenwerte verwendet werden. Wir erhalten damit ein Konstrukt, das ohne die Nutzung negativer Zahlenwerte die mathematischen Eigenschaften negativer Größen in einer alternativen Art und Weise darstellt.

Und es gibt noch ein weiteren Grund, die Geometrische Algebra in einer alternativen Formulierung mit Hilfe von (3 x 3)-Matrizen darzustellen: Die Gell-Mann-Matrizen, die zur Beschreibung von Quarks herangezogen werden, sind (3 x 3)-Matrizen. Um die Gell-Mann-Matrizen im Kontext der Geometrischen Algebra didaktisch überzeugend fassen zu können, ist ein entsprechender Rahmen notwendig. Ein erster Schritt hin zu einem solchen Rahmen stellt die Konstruktion einer Geometrischen (3 x 3)-Algebra dar.

3. (3 x 3)-Einheitsvektoren

In Anlehnung an [13] werden die drei Permutationsmatrizen [19, S. 136/137] als Vektoren gedeutet:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \{4\}$$

$$e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \{5\}$$

$$e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \{6\}$$

Da das Quadrat dieser Vektoren der Einheitsmatrix e_0 entspricht, ist die Interpretation als Einheitsvektoren sinnvoll:

$$e_1^{\,2} = e_2^{\,2} = e_3^{\,2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = e_0 \qquad \{7\}$$

Ein beliebiger Vektor r dieser Geometrischen (3 x 3)-Algebra kann dann wie üblich als Linearkombination der drei Einheitsvektoren {4} – {6} dargestellt werden:

$$r = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 = \begin{pmatrix} x_1 & x_3 & x_2 \\ x_3 & x_2 & x_1 \\ x_2 & x_1 & x_3 \end{pmatrix} \{8\}$$

Die Zahlenwerte x_1, x_2 und x_3 repräsentieren dabei jeweils die Koordinatenwerte der entsprechenden Achsen in Richtung von e_1, e_2 und e_3.

Jetzt können die sechs möglichen Produkte der Einheitsvektoren bestimmt werden. Dabei zeigt sich, dass nur zwei unterschiedliche Produkte existieren:

$$e_1 e_2 = e_2 e_3 = e_3 e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \{9\}$$

$$e_2 e_1 = e_3 e_2 = e_1 e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \{10\}$$

4. Operatoren und Operanden in der GA

Der Interpretation von Pauli-Matrizen, Dirac-Matrizen oder von S_3-Permuatationsmatrizen als Einheits- oder gegebenenfalls Basisvektoren wurde bereits in Abschnitt 2 als einer der entscheidenden Kernpunkte der Geometrischen Algebra vorgestellt.

Doch im historischen Ausprägungsprozess, der zur Formulierung dieser Matrizen führte, steht ein anderer Aspekt im Vordergrund. Pauli-, Dirac- oder Permutationsmatrizen wurden nicht als Vektoren (und damit nicht als Operanden, auf die eingewirkt wird) gesehen, sondern als Operatoren, die auf Operanden einwirken.

In dieser konventionellen Darstellung bewirkt eine Permutationsmatrix der Symmetriegruppe S_3 eine Reflexion [19, S. 136/137] auf einen Spaltenvektor, indem diese beiden Objekte multipliziert werden:

$$e_1\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ z \\ y \end{pmatrix} \qquad \{11\}$$

Dieser Ausdruck {11} zeigt das Dilemma der im historischen Gang ausgebildeten Konvention: Es werden Objekte zweier völlig unterschiedlicher mathematischer Welten verknüpft: Eine (3 x 3)-Matrix hat gänzlich andere Eigenschaften als ein Spaltenvektor.

Die Geometrische Algebra favorisiert eine andere Herangehensweise: „We share with many authors the idea that operators and operands should be elements of the same space," schreiben Vianna, Trindade und Fernandes [24, S. 962]. Nach Schmeikal beruht dieser Ansatz auf Ideen, die von Systemtheoretikern bereits konstruktiv eingesetzt wurden: „That is, in a group G, any element A can be understood as both an operator and an operation" [20, S. 29].

Das ist der zweite didaktische Kernpunkt der Geometrischen Algebra: Operatoren und Operanden werden durch gleichartige Objekte beschrieben. Pauli-Matrizen stellen sowohl Basisvektoren wie auch Basis-Reflexionen des dreidimensionalen Raums dar. Dirac-Matrizen stellen sowohl Basisvektoren wie auch Basis-Reflexionen der vierdimensionalen Raumzeit dar. S_3-Permutationsmatrizen stellen sowohl Einheitsvektoren (Operanden) wie auch Generatoren von Reflexionen (Operatoren) dar.

Diese Interpretation der S_3-Permuationsmatrizen kann genutzt werden, um die räumliche Lage der Einheitsvektoren {4} – {6} zu ermitteln.

Eine Reflexion wird in der Geometrischen Algebra durch ein Dreifachprodukt generiert, indem der zu spiegelnde Vektor sowohl rechts- wie auch linksseitig mit dem Einheitsvektor, der die Spiegelachse repräsentiert, multipliziert wird. Beispielsweise erfolgt die Reflexion des Einheitsvektors e_2 an einer Reflexionsachse in Richtung des Einheitsvektors e_1 durch den Ausdruck:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \{12\}$$

Die insgesamt neun verschiedenen Reflexionen der Einheitsvektoren lauten somit:

$$\begin{array}{lll} e_1e_1e_1 = e_1 & e_2e_1e_2 = e_3 & e_3e_1e_3 = e_2 \\ e_1e_2e_1 = e_3 & e_2e_2e_2 = e_2 & e_3e_2e_3 = e_1 \\ e_1e_3e_1 = e_2 & e_2e_3e_2 = e_1 & e_3e_3e_3 = e_3 \end{array} \qquad \{13\}$$

Diese Reflexionsgleichungen können nur dadurch erfüllt werden, dass die drei Einheitsvektoren e_1, e_2 und e_3 in einer Ebene liegend angeordnet werden, so dass sie jeweils einen Winkel von 120° einschließen (siehe Abbildung 1).

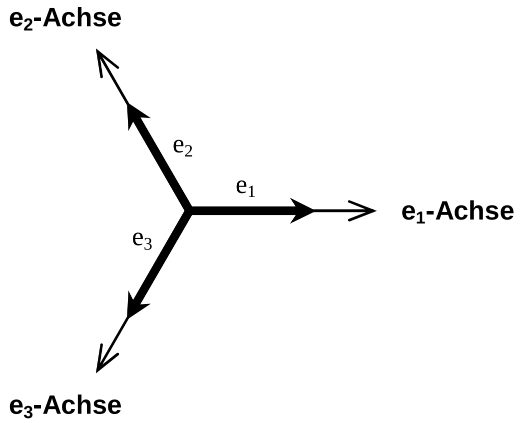

Abb.1: Geometrische Lage der Einheitsvektoren.

5. Repräsentationen von Null

Üblicherweise wird die (3 x 3)-Matrix mit durchgängiger Belegung aller Matrizenelemente durch die Zahl 0 als Nullmatrix bezeichnet. Sie stellt das neutrale Element bezüglich der Matrizenaddition dar:

$$\begin{aligned} r + 0 &= \begin{pmatrix} x_1 & x_3 & x_2 \\ x_3 & x_2 & x_1 \\ x_2 & x_1 & x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1 & x_3 & x_2 \\ x_3 & x_2 & x_1 \\ x_2 & x_1 & x_3 \end{pmatrix} = r \end{aligned} \qquad \{14\}$$

Die Wirkung dieser Operation besteht gerade darin, dass wir im Koordinatensystem keinen Schritt machen und an der gleichen Stelle verharren. Genau die gleiche Wirkung erhalten wir jedoch, wenn wir im Koordinatensystem erst einen Schritt in e_1-Richtung, dann einen zweiten Schritt in e_2-Richtung und abschließend einen dritten Schritt in e_3-Richtung gehen. Addieren wir die Summe aller drei Einheitsvektoren (siehe Abbildung 2)

$$e_1 + e_2 + e_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \{15\}$$

verbleiben wir an der gleichen Stelle. Die Summe aller drei Einheitsvektoren bzw. ein beliebiges Vielfaches dieser Summe $k\,(e_1 + e_2 + e_3)$, repräsentiert ebenfalls das neutrales Element in der Geometrischen

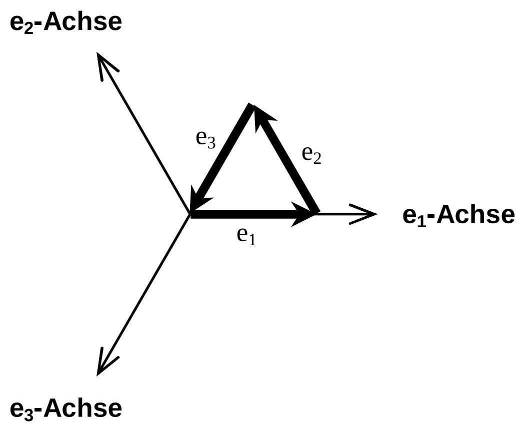

Abb.2: Alternative Repräsentation der Nullmatrix.

schen (3 x 3)-Algebra und entspricht somit der Nullmatrix.

Es existieren somit unendlich viele mögliche Repräsentationen der Größe Null, was der Situation bei den reellen Zahlen entspricht. Nur bewegen wir uns bei den reellen Zahlen auf Achsen, die im Winkel von 180° zueinander stehen, wenn wir Größen wie $4 + (-4)$ oder $17 + (-17)$ als identisch auffassen.

Bemerkenswert ist, dass die Summe der beiden verschiednen Produkte aus den Einheitsvektoren e_1e_2 und e_2e_1 sowie der Einheitsmatrix e_0 ebenfalls der auf jedem Matrizenelement mit eins belegten Matrix entspricht. Somit repräsentiert diese Matrix

$$e_1e_2 + e_2e_1 + e_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \{16\}$$

ebenfalls die Nullmatrix.

Aus physiksoziologischen und aus heutiger Sicht durchaus seltsamen Gründen wird diese Matrix von einigen Autoren als demokratische Matrix (siehe z. B. [1, S. 2]) bezeichnet. Diese Bezeichnung scheint jedoch genauso irreführend und deshalb didaktisch problematisch wie die von [25] gewählte Bezeichnung „Unit Matrix“. Die so genannte demokratische Matrix repräsentiert den Wert Null.

6. Darstellung von Minus Eins

Werden nur positive Koordinatenwert x_1, x_2 und x_3 in {8} zugelassen, muss der üblicherweise als $(-e_1)$ bezeichnete Vektor mit Hilfe der beiden anderen Einheitsvektoren e_1 und e_2 ausgedrückt[1] werden:

$$\ominus e_1 = e_2 + e_3 \qquad \{17\}$$

[1] Zur Beschreibung aller möglichen Punkte in der durch e_1 und e_2 aufgespannten Ebene sind im Falle rein positiver Koordinatenwerte alle drei Einheitsvektoren notwendig. In diesem Sinne könnte man sie durchaus als Basisvektoren bezeichnen.

In einer Welt, in der keine negativen Zahlen und somit auch nicht die negative Zahl (-1) in einem Ausdruck wie $(-e_1) = (-1)\,e_1$ existiert, stellt das Symbol Θ vor dem Einheitsvektor e_1 in Formel {15} kein Minuszeichen dar, sondern muss durch die in dieser Algebra vorhandenen Größen ausgedrückt werden.

Ein Vergleich mit den Reflexionsformeln {13} zeigt, dass das Symbol Θ als Summe der beiden unterschiedlichen Produkte der Einheitsvektoren interpretiert werden kann:

$$\begin{aligned}\Theta\, e_1 &= e_2 + e_3 = e_1e_3e_1 + e_1e_2e_1 \\ &= (e_2e_1 + e_1e_2)\, e_1\end{aligned} \qquad \{18\}$$

$$\Rightarrow \quad \Theta = e_1e_2 + e_2e_1 \qquad \{19\}$$

Das gleiche Ergebnis erzielt man, wenn man in Formel {16} den Einheitsvektor e_0 wie in der Geometrischen Algebra üblich mit dem Skalar 1 identifiziert. Da die Summe aller drei Größen in {16} Null ergibt, ist es nur konsequent, die zum Skalar eins addierte Größe $(e_1e_2 + e_2e_1)$ auch hier als eine sinnvolle Darstellung für $\Theta 1$ zu deuten. Wir haben somit mit

$$\Theta = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \{20\}$$

eine Größe, die algebraisch wie das Skalar minus eins agiert. Diese Größe wird nur durch positive Matrizenelement beschrieben. Wir benötigen die negativen Zahlen nicht mehr, denn negative Zahlen sind nur im algebraischen Sinne negativ. Im geometrischen Sinn entstehen sie durch eine Richtungsumkehr. Liegt eine eineindeutige Verknüpfung geometrischer und algebraischer Strukturen vor, wie dies in der Geometrischen Algebra der Fall ist, kann die algebraische Negativität durch die geometrische Operation der Richtungsumkehr ersetzt werden:

$$\begin{aligned}\Theta\, e_1 &= e_2 + e_3 \\ \Theta\, e_2 &= e_3 + e_1 \\ \Theta\, e_3 &= e_1 + e_2\end{aligned} \qquad \{21\}$$

Und damit sind in der Geometrischen (3 x 3)-Algebra negative Zahlenwerte tatsächlich überflüssig. Eine einfache Beispielrechnung soll dies abschließend verdeutlichen.

7. Beispielaufgabe zur Rotation

Die Aufgabenstellung dieser Beispielaufgabe lautet:

> Wie lautet das Ergebnis einer Rotation des Ortsvektors
>
> $$r = 2e_1 + e_2 \qquad \{22\}$$
>
> an einer zu e1 orthogonalen Achse durch den Ursprung?

Abb.3: Text der Aufgabenstellung.

Da die Geometrische Algebra geometrische und algebraische Darstellungen eineindeutig verknüpft, kann die Lösung sowohl graphisch-geometrisch wie auch algebraisch gefunden werden. Zuerst der algebraische Lösungsweg:

Um die Reflexion berechnen zu können, muss zuerst der Einheitsvektor in Richtung der Reflexionsachse ermittelt werden (siehe Abbildung 4). Dieser Vektor wird als Reflexionsvektor r_{ref} bezeichnet.

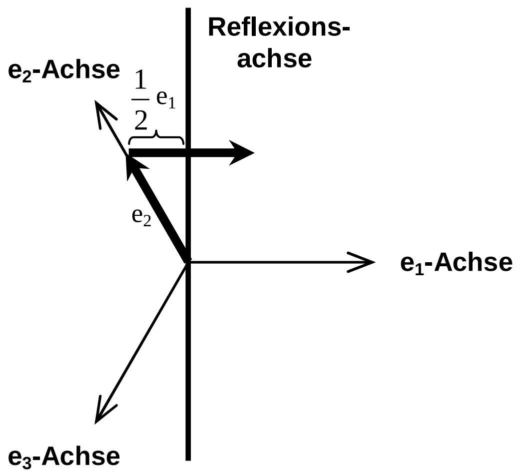

Abb.4: Bestimmung des Reflexionsvektors.

Der senkrecht auf e_1 stehende Vektor $r_\perp$ lässt sich leicht ermitteln:

$$r_\perp = \frac{1}{2} e_1 + e_2 \qquad \{23\}$$

$r_\perp$ ist jedoch kein Einheitsvektor. Deshalb muss er zur Bestimmung des Reflexionsvektors noch normiert werden, indem er durch seinen Betrag geteilt wird:

$$\begin{aligned} r_\perp^{\,2} &= \frac{5}{4} e_0 + \frac{1}{2} e_1e_2 + \frac{1}{2} e_2e_1 \\ &= \frac{3}{4} e_0 + \frac{1}{2}(e_0 + e_1e_2 + e_2e_1) \cong \frac{3}{4} e_0 \end{aligned} \qquad \{24\}$$

$$|r_\perp| = \frac{\sqrt{3}}{2} e_0 \qquad \{25\}$$

$$r_{ref} = \frac{1}{3}\sqrt{3}\, e_1 + \frac{2}{3}\sqrt{3}\, e_2 \qquad \{26\}$$

Damit ergibt sich der reflektierte Vektor r' zu:

$$\begin{aligned} r' &= r_{ref}\, r\, r_{ref} \\ &= \frac{1}{3}(e_1 + 2e_2)(2e_1 + e_2)(e_1 + 2e_2) \\ &= \frac{1}{3}(4e_0 + e_1e_2 + 4e_2e_1)(e_1 + 2e_2) \\ &\cong (e_0 + e_2e_1)(e_1 + 2e_2) \\ &= e_1 + 3e_2 + 2e_3 \end{aligned} \qquad \{27\}$$

Da sich $e_1 + e_2 + e_3$ gegenseitig zu Null kompensieren, lautet die endgültige Darstellung des reflektierten Ortsvektors r':

$$r' \cong 2e_2 + e_3 \qquad \{28\}$$

Das algebraische Ergebnis wird durch die graphische Darstellung bestätigt. Durch die Reflexion wird

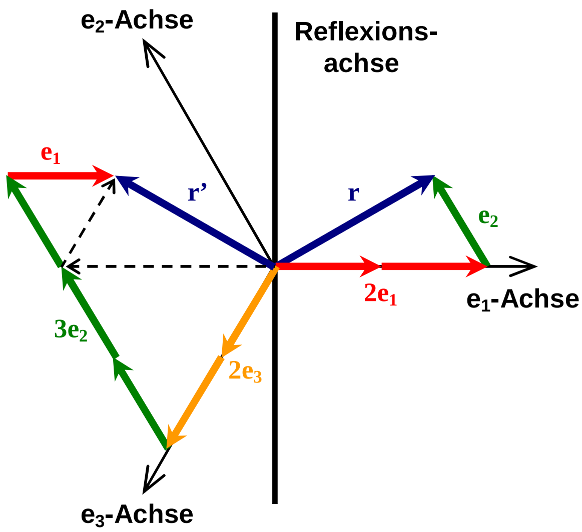

Abb.5: Graphische Veranschaulichung der Lösung.

$2e_1$ in $2(e_2 + e_3)$ und e_2 in $e_1 + e_2$ überführt (siehe Abbildung 5). Damit setzt sich der reflektierte Vektor r' wie erwartet zu

$$\begin{aligned} r' &= e_1 + 3e_2 + 2e_3 \\ &\cong 2e_2 + e_3 \end{aligned} \qquad \{29\}$$

zusammen, was das Ergebnis {28} bestätigt.

8. Ausblick und Fazit

Die hier vorgestellte Geometrische (3 x 3)-Algebra beschreibt zweidimensionale Räume unter einem ungewohnten und unkonventionellen mathematischen Blickwinkel. Wir leben jedoch in einem dreidimensionalen Raum bzw. in einer vierdimensionalen Raumzeit.

Es ist deshalb sinnvoll, diesen Ansatz auf höhere Dimensionen zu übertragen. Dies kann durch zwei verschiedene Strategien erfolgen:

Zum einen kann die Konstruktion eines Einheitsvektors, der senkrecht zu der durch e_1, e_2 und e_3 aufgespannten Ebene steht, mit Hilfe einer mit imaginären Größen belegten (3 x 3)-Matrix wie beispielsweise

$$e_4 = \frac{1}{\sqrt{3}} i\left(e_0 + 2e_1e_2\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} i & 0 & 2i \\ 2i & i & 0 \\ 0 & 2i & i \end{pmatrix} \{30\}$$

gelingen, was in [14] diskutiert werden wird.

Dies führt zur Konstruktion eines dreidimensionalen Raums, der zwar positive und imaginäre Zahlenwerte benötigt, aber immer noch ohne negative Zahlen auszukommen vermag.

Zum anderen können unter Rückgriff auf das Zehfuß-Kronecker-Produkt vier- und höherdimensionale Raumzeiten konstruiert werden, wie dies in [11] versucht wird. In diesem Fall können dann zum Beispiel geeignete und nur durch positive Zahlenwerte belegte (9 x 9)-Matrizen als raumartige und zeitartige Einheitsvektoren identifiziert werden, die die pseudoeuklidische Raumzeit der Speziellen Relativitätstheorie aufspannen.

Inwieweit dies fachphysikalisch relevant ist, ist umstritten. So favorisiert Schmeikal in einigen soziologisch motivierten und teilweise metaphorischen Ausarbeitungen [20], [21] die S_4-Permutationsalgebra zur Beschreibung der Geometrie unserer physikalischen Welt.

Andere Autoren verknüpfen hingegen den strukturellen Aufbau unserer Welt enger mit der S_3-Permutationsalgebra, wie dies beispielsweise Mondragón in [16] oder Rowlands in [26, S. 356] tun.

Und es bleibt die anfangs aufgeführte Idee, die Gell-Mann-Matrizen als (3 x 3)-Matrizen perspektivisch in den strukturellen Rahmen einer Geometrischen (3 x 3)-Algebra einzubinden.

Zwei Feststellungen können jedoch nun mit Sicherheit getroffen werden:

- Alle physikalischen Sachverhalte, die sich in der theoretischen Physik mit Hilfe von Pauli-Matrizen mathematisch beschreiben lassen, lassen sich auch mit Hilfe von (3 x 3)-Matrizen beschreiben.
- Alle physikalischen Sachverhalte, die sich in der theoretischen Physik mit Hilfe von Dirac-Matrizen beschreiben lassen, lassen sich auch mit Hilfe von (9 x 9)-Matrizen beschreiben.

Es ist also nicht unbedingt eine rein fachphysikalisch-mathematische Frage, für welche Art von Matrizendarstellung wir uns entscheiden – es ist auch und insbesondere eine didaktische Frage.

9. Literatur

[1] Dev, Sharma; Gautam, Radha Raman; Singh, Lal (2012): Broken S_3 Symmetry in the Neutrino Mass Matrix and Non-Zero Θ_{13}. arXiv:hep-ph/1201.3755v1, 18 Jan. 2012.

[2] Doran, Chris; Lasenby, Anthony (2003): Geometric Algebra for Physicists, Cambridge University Press, Cambridge.

[3] Einstein, Albert (1921): Geometrie und Erfahrung. Erweiterte Fassung des Festvortrages gehalten an der Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin am 27. Januar 1921, Verlag von Julius Springer, Berlin.

[4] Fischer, Ernst Peter (1997): Über das Unternehmen Wissenschaft I. Bearbeitete Teilausgabe

des Buches ‚Aristoteles, Einstein & Co', Robugen GmbH, Esslingen/Neckar.
[5] Gull, Stephan; Lasenby, Anthony; Doran, Chris (1993): Imaginary Numbers are not Real – The Geometric Algebra of Spacetime. In: Foundations of Physics, 23 (1993), S. 1175 – 1201.
[6] Hestenes, David (1992): Mathematical Viruses. In: Micali, Artibano; Boudet, Roger; Helmstetter, Jacques (Hrsg.): Clifford Algebras and their Applications in Mathematical Physics, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, S. 3 – 16.
[7] Hestenes, David (2002): New Foundations for Classical Mechanics. 2. Auflage, Kluwer Academic Publishers, New York, Boston.
[8] Hestenes, David (2003): Reforming the Mathematical Language of Physics. Oersted Medal Lecture. In: American Journal of Physics, 71 (2003), S. 104 – 121.
[9] Hestenes, David (2003): Spacetime Physics with Geometric Algebra. In: American Journal of Physics, 71 (2003), S. 691 – 714.
[10] Horn, Martin Erik (2010): Die Spezielle Relativitätstheorie in der Mathematikerausbildung. In: Grötzebauch, Helmuth; Nordmeier, Volkhard (Hrsg.): PhyDid B – Didaktik der Physik, Beiträge zur DPG-Frühjahrstagung des Fachverbands Didaktik der Physik in Hannover 2010, Beitrag 19.35.
[11] Horn, Martin Erik (2011): Geometrische Algebra in höheren Dimensionen. In: Grötzebauch, Helmuth; Nordmeier, Volkhard (Hrsg.): PhyDid B – Didaktik der Physik, Beiträge zur DPG-Frühjahrstagung des Fachverbands Didaktik der Physik in Münster 2011, Beitrag 18.5.
[12] Horn, Martin Erik (2011): Grassmann, Pauli, Dirac – Special Relativity in the Schoolroom, In: Petsche, Hans-Joachim; Lewis, Albert C.; Liesen, Jörg; Russ, Steve (Hrsg.): From Past to Future – Graßmann's Work in Context, Birkhäuser-Verlag, Basel, Berlin, S. 435 – 450.
[13] Horn, Martin Erik (2012): Geometric Algebra and Flavour Symmetry S_3. Preprint-Fassung vom 22. Jan. 2012, unveröffentlichtes Manuskript.
[14] Horn, Martin Erik (2012): Geometric Algebra of Quarks. Zur Veröffentlichung vorgesehen in: Proceedings of the International Conference on Applied Geometric Algebra and Engineering in La Rochelle, AGACSE 2012.
[15] Horn, Martin Erik (2012): Die Geometrische Algebra der (3 x 3)-Matrizen. Zur Veröffentlichung vorgesehen in: Beiträge zum Mathematikunterricht 2012, Tagungsband sowie Tagungs-CD der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik zur Jahrestagung in Weingarten. WTM-Verlag, Münster.
[16] Mondragón, Alfonso (2011): The Flavour Symmetry: S_3. Proceedings of the 28th International Colloquium on Group Theoretical Methods in Physics, Journal of Physics – Conference Series 248 (2011) 012048, IOP Science.
[17] Sobczyk, Garret (1993): David Hestenes – The Early Years. In: Foundations of Physics, 23 (1993), S. 1291 – 1293.
[18] Parra Serra, Josep Manel (2009): Clifford Algebra and the Didactics of Mathematics. In: Advances of Applied Clifford Algebras, 19 (2009), S. 819 – 834.
[19] Sawyer, Walter Warwick (1982): Prelude to Mathematics. Enlarged Version of the Text originally published in 1955. Dover Publications, New York.
[20] Schmeikal, Bernd (1993): Space-Time Sociology. Forschungsbericht/Research-Memorandum Nr. 313, Januar 1993, Institut für Höhere Studien, Wien.
[21] Schmeikal, Bernd (1998): Reconstructions of Science. Reihe Soziologie / Sociological Series No. 33, November 1998, Institut für Höhere Studien, Wien.
[22] Snygg, John (1997): Clifford Algebra. A Computational Tool for Physicists. Oxford University Press, New York, Oxford.
[23] Steeb, Willi-Hans (1991): Kronecker Product of Matrices and Applications. Bibliographisches Institut / Wissenschaftsverlag, Mannheim, Wien, Zürich.
[24] Vianna, José David; Trindade, Marcelo A. S.; Fernandes, Marco César B. (2008): Algebraic Criteria for Entanglement in Multipartite Systems. In: International Journal of Theoretical Physics, 47 (2008), S. 961 – 970.
[25] Weisstein, Eric W. (Hrsg.): Unit Matrix. In: MathWorld - A Wolfram Web Resource, URL: http://mathworld.wolfram.com/UnitMatrix.html [Stand 31. März 2012].
[26] Rowlands, Peter (2007): Zero to Infinity. The Foundations of Physics. World Scientific, New Jersey, London, Singapore.