

Symmetrien in der Tasse - Akustische Alltagsphänomene -

Stefan Heusler*, Ewa Rehwald⁺

* ⁺Didaktik der Physik, Wilhelm-Klemm-Str. 10, 48149 Münster
stefan.heusler@uni-muenster.de, ewa.rehwald@uni-muenster.de

Kurzfassung

Wird der Rand einer Tasse mit einem Löffel angeschlagen, so hängt der Klang stark von der Position des Anschlags ab. Das Phänomen ist in groben Zügen schnell erklärt, eine genauere Analyse ist jedoch lohnenswert, weil sie noch ungeklärte Fragen offenbart. In diesem Beitrag werden Spektralanalysen der Klänge durch High-Speed- und Holographieaufnahmen ergänzt, um ein tieferes Verständnis des Schwingungsspektrums zu gewährleisten. Das Beispiel der klingenden Tasse öffnet die Perspektive auf akustische Alltagsphänomene, die neben optischen Alltagsphänomenen als ein weiteres didaktisches Themenfeld für kontextorientierten Physikunterricht nutzbar gemacht werden können.

1. Einführung

Alltagsphysik ist aus mehreren Gründen ein attraktives Thema für den Physikunterricht. Zum einen ist nachhaltiges Lernen und Behalten besser möglich, wenn der Lerngegenstand in der eigenen Lebenswelt wiedererkannt werden kann. Zum anderen bietet die rasante technische Entwicklung von Handys und Laptops die Perspektive, dass Schüler und Schülerinnen eine Auswahl an Messinstrumenten mit sich führen und den Alltag als Experimentierlabor neu entdecken lernen. Anhand *eigener* Analysen kann physikalische Forschung praktisch umgesetzt werden.

Das fruchtbare Gebiet optischer Alltagsphänomene wurde von H. J. Schlichting im Übersichtsartikel *Sehen lernen* umrissen [1]. Optische Alltagsphänomene sind in einer Vielzahl von weiteren Publikationen thematisiert worden und bieten einen reichen Fundus an kontextorientierten Anlässen, durch den „physikalischen Blickwinkel“ den Alltag neu sehen zu lernen [2]. Neben optischen Phänomenen erscheint es uns wichtig, auch akustische Alltagsphänomene in den Blick zu nehmen. Klänge und Geräusche können von Schülern aufgenommen und analysiert werden. Die Spektralanalyse von hörbaren Klangerlebnissen ergibt eine erste Brücke zwischen der direkten alltäglichen, und der abstrakten physikalischen Sichtweise. Als konkretes Beispiel beschreiben wir in diesem Beitrag den Klang einer Tasse, die mit einem Löffel angeschlagen wird. Das entstehende Geräusch ist jedem aus dem Alltag heraus bekannt. Reizvoll ist hierbei die Beobachtung, dass der Klang stark von der Position abhängt, wo die Tasse angeschlagen wird. Mit einem einfachen theoretischen Modell können bereits viele Eigenschaften des Tonspektrums nachvollzogen und mit Messungen verglichen werden (Kap. 2, 3, 4). Zur Erhärtung der Modellvorstellungen zum Schwingungsverhalten der Tasse nutzen wir neben

der Spektralanalyse noch Aufnahmen mit der High-Speed Kamera (Kap. 5) sowie holographische Aufnahmen der schwingenden Tasse (Kap. 6).

2. Forschungsstand

Das Phänomen der unterschiedlichen Klänge einer Tasse mit Henkel wird in der aktuellen Literatur sehr vereinfacht dargestellt (vgl. z.B. [3]). Das reiche Spektrum wird auf zwei Töne reduziert, die sich in Abhängigkeit vom Anschlagsort immer wieder finden lassen. Die leicht unterschiedlichen Frequenzen werden dadurch erklärt, dass der Henkel als zusätzliche Masse in einem Fall mitschwingt (entspricht der tieferen Frequenz, vgl. Abb. 1 links), im anderen nicht (entspricht der höheren Frequenz, Abb. 1 rechts).

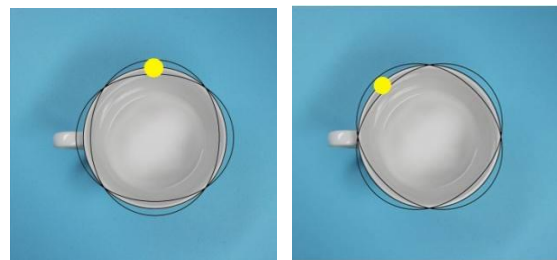


Abb. 1: Links: Wird die Tasse am gelben Punkt angeschlagen, bildet sich am Henkel ein Schwingungsbauch aus ($n=2-$). Rechts: Um 45° versetzt liegt am Henkel ein Knoten, sodass eine schnellere Schwingung möglich ist ($n=2+$).

Dass hier nur die Grundschwingungsmoden dargestellt wird und diese keineswegs die von der Tasse präferierte Mode sein muss, wird verschwiegen.

Tiefergehende Untersuchungen zum Klangspektrum der Tasse sind uns nicht bekannt, wohl aber zum einfacheren Fall eines rotationssymmetrischen, schwingenden Weinglases [4, 5].

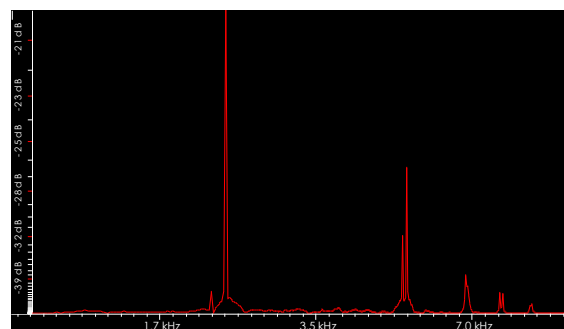
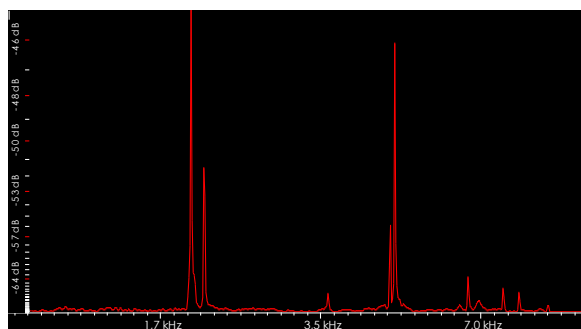


Abb. 2: Die zu Abb. 1. korrespondierenden Spektren. Links: Die Schwingungsmode n=2- beim 90°-Anschlag mit einem Löffel. Rechts: n=2+ Mode beim 45°-Anschlag.

3. Theoretische Beschreibung

Eine grobe theoretische Beschreibung lässt sich formulieren, wenn die Tassenwände als eine zum Zylinder gebogene Platte aufgefasst werden (vgl. [5]). Der Boden wird für die Schwingung vernachlässigt. Eine Biegewelle breitet sich in dieser Platte mit der Geschwindigkeit

$$v = \lambda f = (\pi u f d / \sqrt{3})^{1/2} \quad \{1\}$$

aus, wobei u die Schallgeschwindigkeit des Mediums und d die Dicke der Platte bezeichnen. Da für stehende Wellen am Tassenrand immer nur ganzzahlige Wellenlängen ≥ 2 zulässig sind, ergibt sich für das Frequenzspektrum mit $n \lambda = 2 \pi r$ die Näherung

$$f_n \sim n^2 \quad \{2\}$$

Für f_3 wäre demnach $f_3 = 9/4 f_2$ zu erwarten, für f_4 das Vierfache von f_2 .

Zusätzlich muss bedacht werden, dass durch den Henkel zu jeder Mode zwei verschiedene Frequenzen auftreten, sodass das Spektrum in Dubletts aufgeteilt wird mit $f_n \pm \delta$ (im Folgenden bezeichnen wir die Frequenzen sowie die entsprechenden Schwingungsmoden mit der Kurzschreibweise $n \pm$). Ist u bekannt, können die Resonanzfrequenzen leicht abgeschätzt werden. Ein wesentlich komplizierterer Ansatz, bei dem die abgeschätzten Frequenzen insgesamt etwas höher ausfallen ist bei [4] zu finden.

4. Interpretation der Spektren

Das Spektrum hängt wesentlich davon ab, wie die Tasse auf dem Boden aufliegt, wo, womit und wie fest angeschlagen wird. Durch diese vielen Einflussmöglichkeiten wird die Analyse erschwert. Es lassen sich aber einige Charakteristika herausarbeiten, die immer wiederzufinden sind. Die Frequenz-



Abb. 3: Rechts: Die Schwingungsmode n=3-. Links: n=3+.

analyse wurde mit der Software Sounds durchgeführt, die kostenlos auf der Seite <http://didaktik.physik.fu-berlin.de/sounds/> heruntergeladen werden kann. Der Anschlagort am Tassenrand wird in Grad angegeben (bezogen auf den Mittelpunkt der Tasse), wobei 0° die Henkelposition bezeichnet.

Ein Blick auf Abbildung 2 verdeutlicht, dass der Anschlag bei 90° bzw. 45° keineswegs nur die Grundmoden anregt. Vielmehr gibt es Hinweise auf zahlreiche weitere Schwingungszustände, die es im Folgenden zu verstehen gilt.

Der ausgeprägteste Peak tritt etwa bei 2200 Hz auf. Werden Spektren aufgenommen, bei denen in 15 Grad Schritten nur die Anschlagposition geändert wird, so treten deutliche Unterschiede bei den verschiedenen Amplituden der Peaks auf. Der Peak bei 2200 Hz zeigt eine 90-Grad-Symmetrie in der Amplitude, so dass wir daraus schließen, dass es sich um

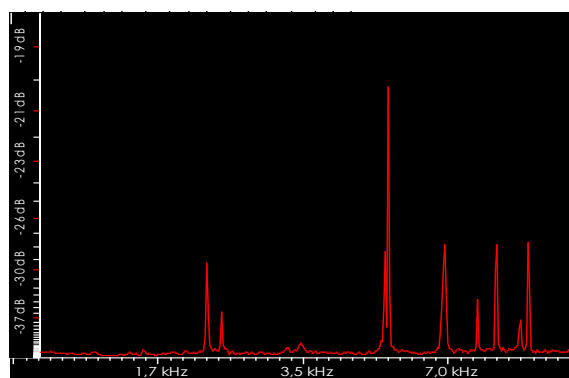
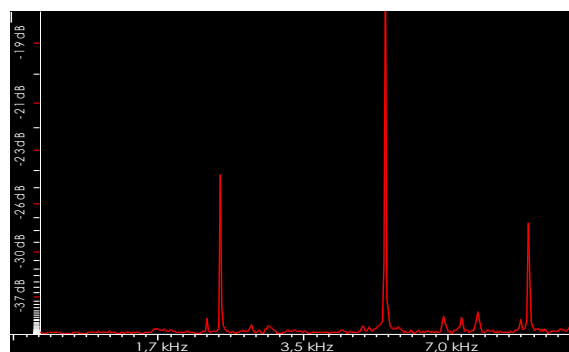


Abb. 4: Oben: n=3- angeschlagen bei 120°. Unten: n=3+ angeschlagen bei 150°.



Abb. 5: Links: $n=2-$ Mode angeschlagen bei 180° (Henkel schwingt mit), $n=2+$ angeschlagen bei 135° (Henkel auf Knotenpunkt). Rechts: $n=3-$ bei 120° Anschlag (Henkel schwingt mit), $n=3+$ bei 150° Anschlag (Henkel auf Knotenpunkt).

die Mode $n=2-$, handelt (Abb. 2 links). Gleichzeitig tritt in den meisten Fällen ein kleinerer Peak auf, der von uns als $n=2+$ interpretiert wird. Erwartungsgemäß ist dieser beim 45° Anschlag am größten, was von Abbildung 2 rechts bestätigt wird. Es zeigt sich ebenfalls eine 90-Grad Symmetrie.

In beiden Spektren findet sich ein weiterer dominanter Peak bei etwa 5200 Hz. Da auch dieser eine Doubletstruktur aufweist und mit der theoretischen Abschätzung $f_3 = 9/4f_2$ in etwa übereinstimmt, werden hier die $n=3\pm$ Zustände vermutet. Beim 90° Anschlag wird nicht nur der $n=2-$ Zustand, sondern auch $n=3+$ angeregt, bei 45° ergeben sich die Zustände $n=3\pm$ zu gleichen Teilen (vgl. Abb. 2).

Will man prägnantere Peaks für $n=3-$ bzw. $n=3+$ erhalten, empfiehlt es sich, die Tasse bei 120° bzw. bei 150° anzuschlagen (vgl. Abb. 3 und 4). In beiden Fällen sind die $n=2\pm$ Moden wieder gut erkennbar, sowie eine Reihe weiterer Peaks, die wir nur teilweise erklären können.

Bei etwa 8800 Hz erwarten wir laut Vorhersage die $n=4\pm$ Moden. Hinzu kommen einige Beiträge, die wir als Schwingungsmoden des Henkels interpretieren. Sie tauchen in unterschiedlichen Ausprägungen immer wieder auf und können gezielt angeregt werden, indem der Rand der Tasse festgehalten und nur der Henkel angeschlagen wird. Hier ergibt sich ein weiteres Untersuchungsfeld, dem wir jedoch nicht nachgegangen sind.

5. Untersuchungen mit der High-Speed Kamera

Um die Interpretation des Spektrums zu überprüfen, wurden High-Speed-Aufnahmen der schwingenden Tasse mit 5000 Bildern pro Sekunde zu verschiedenen Anschlägen am Tassenrand gemacht. Da die Schwingung des Tassenrands selbst nur schwer sichtbar gemacht werden kann, bedienen wir uns eines Tricks. Die Tasse wurde mit gefärbtem Wasser gefüllt. Da dieses sehr träge ist, überträgt sich vor allem die dominante Anfangsschwingung der Tasse auf das Wasser. Als Wellenfront propagiert jene auf der Wasseroberfläche zur Mitte und kann so die Schwingungssymmetrie des schwingenden Tassenrands deutlich machen.

Dass das Wasser das Schwingungsverhalten nur unwesentlich verändert, kann nachgeprüft werden,

indem Spektren mit und ohne Wasser verglichen werden. Alle Frequenzen verschieben sich in unserem Fall um ca. 10% nach unten. Ebenso verändert die Wahl der Tasse nichts am eigentlichen Phänomen, solange ihre Form nicht allzu stark variiert. So wurde für die Videoaufnahmen eine Tasse ähnlicher Bauart verwendet. Die Doubletstruktur der Peaks zu $n=2, 3, 4$ und analoge Frequenzverhältnisse finden sich auch in diesem Spektrum wieder.

Abbildung 5 zeigt die verschiedenen Schwingungssymmetrien, die sich in Abhängigkeit vom Anschlagsort und Anschlagsmedium gebildet haben. Die $n=2\pm$ Moden sind mit einer schwingenden Holzkugel angeregt worden, die $n=3\pm$ mit einem Löffel und die $n=4-$ Mode (Abb. 6) mit einem dünnen Metallhaken. Bei richtiger Beleuchtung sind die Schwingungssymmetrien der Moden $2+$, $2-$ sowie $3+$ und $3-$ hervorragend zu erkennen. Schwieriger war die Aufnahme der $n=4-$ Mode, weil hierbei der Anschlagpunkt sehr gezielt getroffen werden muss. Um Überlagerungen mit dominanteren Moden entgegenzuwirken, wurde gegenüber vom Henkel ein Knetmassstückchen angebracht, das die Moden $n=2$ und $n=3$ dämpfen sollte.

Durch gleichzeitige Aufzeichnung von Bild und Ton wurde auf diese Weise nicht nur Gewissheit über die Interpretation der Peaks erlangt. Vielmehr sind auch überzeugende Visualisierungen der Schwingungsmoden entstanden, die das Modell aus Abb. 1 und Abb. 3 hervorragend ergänzen. Da auch High-Speed Aufnahmen für Schulen mehr und mehr in den Bereich des Machbaren rücken, kann diese Untersuchung – wenn auch nicht mit dieser Bildqualität – auch mit Schulmitteln durchgeführt werden.



Abb. 6: $n=4-$ Mode, die durch das Anbringen eines Knetmassstückchens (rechts unten) erzwungen wurde.

Da sich die Oberflächenwelle in der Tasse mit einer Geschwindigkeit von ca. 50cm/s fortbewegt, kann bereits mit 1000 Bildern pro Sekunde die Propagation der Bugwelle mit einer Auflösung von $\frac{1}{2}$ Millimeter nachvollzogen werden.

6. Holographische Untersuchungen

Eine weitere Möglichkeit der Visualisierung der Schwingungsmoden des Tassenrands, die ohne Wasser auskommt, bietet die holographische Interferometrie. Dabei wird ein Laserstrahl zunächst über einen Beamsplitter in einen Objekt- und Referenzstrahl aufgeteilt (Abb. 7). Der aufgeweitete Objektstrahl trifft auf die in Schwingungen versetzte Tasse und wird von dort auf eine Fotoplatte reflektiert, auf der das Interferenzmuster von Objektstrahl und Referenzstrahl aufgenommen wird. Da die Kohärenzlänge des HeNe-Lasers einige Zentimeter beträgt, muss der aufgeweitete Referenzstrahl von Spiegeln so abgelenkt werden, dass er einen ähnlich weiten Weg bis zur Fotoplatte zurücklegt wie der Objektstrahl. Die Tasse wird durch einen Vibrationsgenerator zu Schwingungen angeregt (Abb. 7 rechts unten).

Der Tassenrand ist ein offenes Ende, an dem sich Schwingungsbäuche und -knoten einer stehenden Welle ausbilden. In Richtung des Tassenbodens wird die Amplitude der Schwingung immer geringer. Im Hologramm ergeben sich abwechselnd helle und dunkle Streifen auf der schwingenden Tasse, die als „Höhenlinien“ der Biegeschwingung gedeutet werden können. An jedem Punkt des Tassenrandes werden Lichtstrahlen reflektiert. Durch die Schwingung der Tasse variiert die Phase des Lichtstrahls. Wenn der zeitlich gemittelte Gangunterschied aller Lichtstrahlen an einem Punkt destruktiv interferiert, wird der Punkt im Hologramm dunkel.

Zur genaueren Erklärung bietet sich ein Vergleich mit Newton'schen Ringen an.

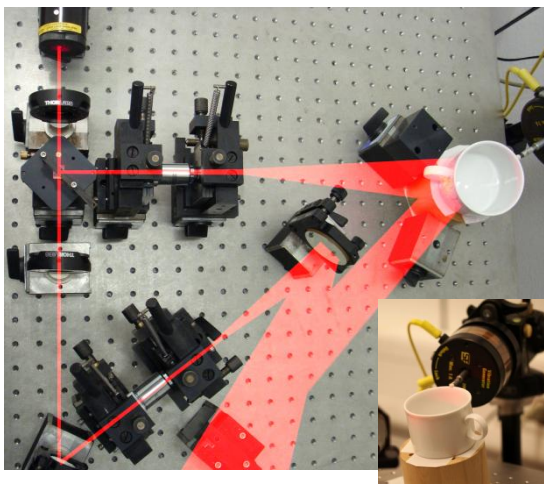


Abb. 7: Aufbau und Strahlengang für die holographische Interferometrie. Anregung erfolgt über einen Vibrationsgenerator (kleines Bild rechts unten).

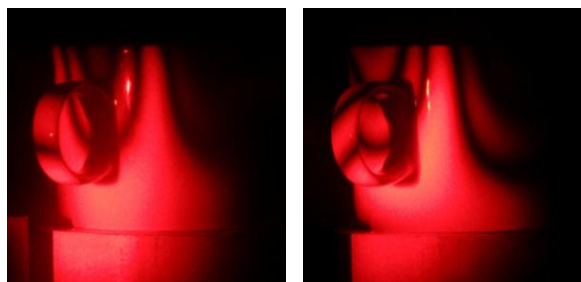


Abb. 8: Links: Schwingungsmodus bei 5080 Hz (entspricht $n=3-$). Rechts: Bei 3240 Hz. Hier liegt der Henkel weder auf einem Schwingungsbauch noch einem -Knoten. Die dunklen Linien können als „Höhenlinien“ der Vibration der Tasse gedeutet werden.

Die abwechselnd hellen und dunklen Streifen rühren hier ebenfalls von konstruktiver und destruktiver Interferenz von Lichtstrahlen her, die in diesem Fall von zwei eng anliegenden Glasplatten reflektiert werden. Der Gangunterschied zwischen zwei benachbarten schwarzen Ringen entspricht der Wellenlänge des Lichts, bzw. umgerechnet einer entsprechenden Vergrößerung der optischen Weglänge zwischen der oberen und der unteren Glasplatte.

Ähnliche Ringe ergeben sich auch, wenn ein schwingendes System betrachtet wird, bei dem die zwei Glasplatten durch die Schwingungsmaxima in die eine und andere Auslenkungsrichtung von *einem* schwingenden Körper, in unserem Fall dem Tassenrand, ersetzt werden. Würde die zeitliche Auflösung hoch genug sein, könnte man zeitlich fluktuierende „Newton'sche Ringe“ sehen, die durch die periodisch fluktuierende Überlagerung von Lichtwegen mit wechselndem Gangunterschied entstehen. Im Hologramm sichtbar ist aber nur die zeitliche Mittelung. Berechnet man diese, ergibt sich eine Besselfunktion, deren Nullstellen den Positionen von destruktiver Interferenz entsprechen – diese sind in Abb. 8 und Abb. 9 zu sehen.

Bevor die Hologramme aufgenommen werden konnten, mussten für den getriebenen Fall die Resonanzfrequenzen ermittelt werden. Diese stimmten nur zum Teil mit den bereits bekannten der frei schwingenden Tasse überein. So gab es einen sehr prägnanten Peak um 5100 Hz, jedoch keinen bei 2200 Hz. In Abbildung 8 links ist das Schwingungsmuster zu 5080 Hz zu sehen, welches wir als $n=3-$ Mode interpretieren.

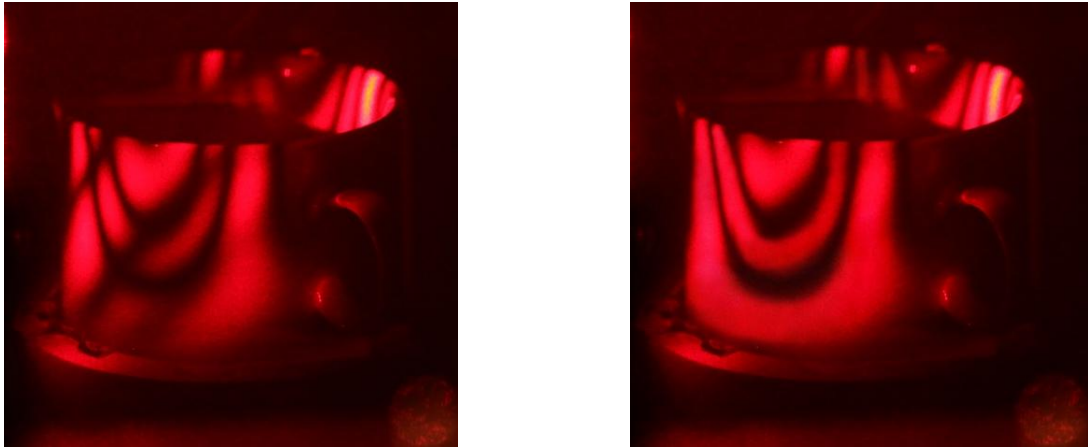


Abb. 9: Holographische Aufnahme der gekippten Tasse bei 5040 Hz. Links im Original, rechts mit Nachbearbeitung in Photoshop.

Unerwartet bildete sich ein Maximum bei 3240 Hz aus, dessen Ursprung wir nicht erklären können. Abbildung 8 rechts zeigt das dazugehörige Hologramm. Der Henkel scheint weder auf einem Knoten, noch auf einem Bauch zu liegen. Auch scheinen die Schwingungsmuster in die Breite gestreckt, sodass man eine niedrigere Mode vermutet. Die Kopplung an den Frequenzgenerator stellt offenbar eine erhebliche Störung des Systems dar.

In Abbildung 9 wurde die Tasse gekippt, sodass die Schwingungen entlang des gesamten Tassenrandes sichtbar werden. Das hat den Vorteil, dass die Mode $n=3$ -eindeutig identifiziert werden kann. Durch die Schiefelage wurde jedoch das Befestigen der Tasse enorm erschwert, sodass zu den erwarteten Schwingungsmustern Fehler hinzukamen, die die Auswertung verfälschen. Für Abbildung 9 rechts wurden sie mit Hilfe von Photoshop entfernt.

Die holographische Interferometrie erweist sich als aufwendige, dafür aber präzise Methode, um die Schwingungsmoden nicht nur des Tassenrandes, sondern der gesamten Mantelfläche der Tasse sichtbar zu machen. Die Schwingungsbedingungen sind jedoch im Vergleich zur mit Löffel angeschlagenen Tasse sehr verschieden. Die sich herausbildenden Schwingungsmoden hängen von der relativen Position des Henkels zu dem Ort ab, wo der Frequenzgenerator an die Tasse koppelt. Wir merken hier an, dass die Messung eines Frequenzspektrums eines Glases *ohne* Henkel nicht vor diesem Problem steht, und daher besser mit dem Frequenzspektrum der freien Schwingung verglichen werden kann.

7. Fazit

Die Untersuchung akustischer Alltagsphänomene führt bei genauer Betrachtung schnell zu offenen Fragen, die in der Literatur bislang nicht untersucht

worden sind. Für Schülerinnen und Schüler sind Alltagsfragen, zu denen es noch keine abschließende Antwort gibt, ein reizvoller Untersuchungsgegenstand, weil sie nicht nur nachvollziehen, sondern selbst forschend tätig werden können. Die hier vorgestellten Methoden lassen sich mehr und mehr auch in den Schulalltag integrieren. Die Analyse von Klangspektren ist problemlos auch außerhalb der Physikstunde möglich, High-Speed Aufnahmen können im Kurs gemeinsam realisiert werden. Holographische Aufnahmen sind nur in Zusammenarbeit mit der Hochschule umsetzbar, etwa im Rahmen einer Facharbeit. Die verwendeten Untersuchungsmethoden können von Schülern an vielen anderen Stellen der Physik wiederentdeckt werden; durch den Bezug zu Gebrauchsgegenständen kann der physikalische Blickwinkel in den Alltag integriert werden.

8. Danksagung

Wir bedanken uns bei Falko Diebel im Institut für Angewandte Physik für die Unterstützung bei der Vorbereitung zu den holographischen Aufnahmen.

9. Literatur

- [1] H. J. Schlichting, Sehen lernen. Vom alltäglichen Anblick zum physikalischen Durchblick, Physik Journal 7 (2008) Nr. 8/9, S. 69-74.
- [2] H. J. Schlichting, Wenn der Pool ins Schwimmen gerät, Darmstadt 2012.
- [3] L. Mathelitsch, I. Verovnik, Akustische Phänomene, Köln 2004.
- [4] A. P. French, American Journal of Physics 51, 688 (1983).
- [5] H. J. Schlichting, C. Ucke, Es tönen die Gläser, Physik in unserer Zeit 26/3 (1995), S. 138f.