

## Schüler entdecken die Einstein-Geometrie mit dem Beschleunigungssensor

Hans-Otto Carmesin \*

\*Gymnasium Athenaeum Stade, Harsefelder Straße 40, 21680 Stade  
Studienseminar für das Lehramt an Gymnasien, Stade, Bahnhofstraße 5, 21682 Stade  
Fachbereich 1, Institut für Physik, Universität Bremen, 28334 Bremen  
Hans-Otto.Carmesin@t-online.de

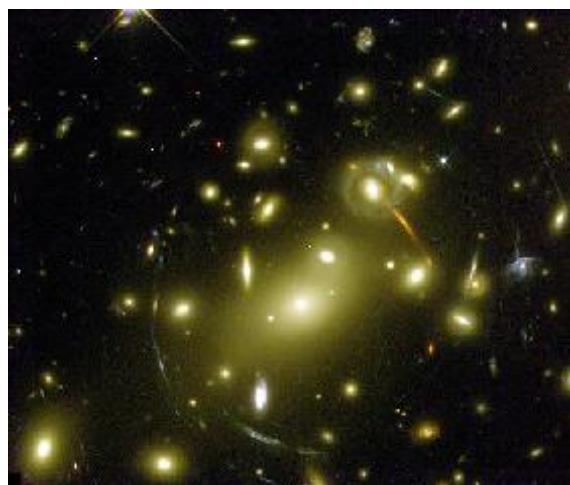
### Kurzfassung

Es wird eine innovative und besonders einfache sowie konkrete Einführung der Schwarzschildmetrik vorgestellt. Das Grundprinzip ist die Separation des vierdimensionalen Problems in vier einzelne Dimensionen. Diese Trennung der Dimensionen ist möglich, weil ein Zentralkraftproblem vorliegt, somit Isotropie besteht und entsprechend die nicht diagonalen Elemente des metrischen Tensors null sind. Auch ist für die Trennung der Dimensionen entscheidend, dass die Geometrie-Dynamik ausgehend von der newtonschen Gravitationstheorie durch Regression entwickelt werden kann und somit die Einstein-Gleichung nicht eingeführt werden muss. Die vorgestellte Lösung der Schwarzschildmetrik wird auch dadurch so einfach, dass eine lineare Regression die exakte Metrik ergibt. Ich präsentiere auch Erfahrungen der Erprobung des Konzepts mit einer Lerngruppe aus Schülerinnen und Schülern der Klassenstufen 10-12. Weiter wird gezeigt, wie man aus der Lösung der Schwarzschildmetrik in elementarer Weise die exakten Gleichungen zur Bahnbewegung, zu Gravitationswellen und zu durch Rotation entstehende Metriken entwickeln und diese anhand empirischer Beobachtungen bestätigen kann. Diese Thematik ist für die Schule interessant, weil die Erfahrung zeigt, dass sich immer viele Schülerinnen und Schüler für die geheimnisvolle Relativitätstheorie interessieren, weil das räumliche Denken geschult wird und weil die PISA-Testergebnisse zeigen, dass die deutsche Schule im Bereich der Begabtenförderung durchaus noch Nachholbedarf hat. Der vorgestellte Zugang entwickelt anschlussfähige Kompetenzen, indem er einen einfachen Zugang zur Einstiegleichung eröffnet.

### 1. Einleitung

Viele Schülerinnen und Schüler würden gerne auf einfache Weise verstehen, wie die Einstein-Geometrie funktioniert, wie man sie mit einfachen Mitteln misst, wie man Raumkrümmungen einfach berechnet sowie herleitet und welche Bedeutung Raumkrümmungen für den Alltag haben. Ein Beleg hierfür sind Interessenstudien, die zeigen, dass astronomische Themen viele Schülerinnen und Schüler besonders ansprechen [1]. Im Vergleich zu den bisher bekannten Zugängen bietet der hier vorgestellte Lernprozess eine Kombination aus exakter Herleitung und besonderer Einfachheit. Die üblichen Bücher über allgemeine Relativitätstheorie wählen den Weg über die vierdimensionale Differenzialgeometrie sowie Tensoralgebra und sind daher nicht einfach [2-4]. Bekannte allgemein verständliche Darstellungen verzichten auf eine exakte Herleitung [5,6].

Hier präsentiere ich eine Unterrichtseinheit, bei der Schülerinnen und Schüler die Schwarzschild-Metrik mithilfe eines Beschleunigungssensors und durch Separation der vierdimensionalen Raumzeit in vier einzelne Dimensionen weitgehend selbstständig entdecken. Auch berichte ich über Erfahrungen aus dem Unterricht.

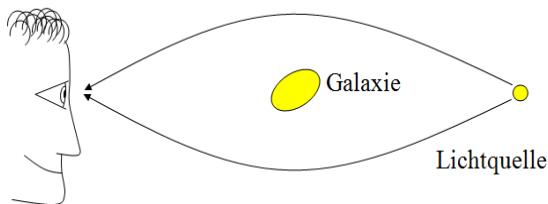


**Abb.1:** Gravitationslinse [7]: Galaxienhaufen Abell 2218. Die konzentrischen Lichtbögen scheinen von einer gemeinsamen Lichtquelle zu kommen.

In drei weiterführenden Blöcken (Abschnitte 9-12, 13-19 und 20-24) zeige ich, wie man aufbauend auf der Schwarzschildmetrik Flugbahnen, Gravitationswellen und durch Rotation erzeugte Raumkrümmungen im Bereich der Begabtenförderung auf elementare und zugleich exakte Weise behandeln

kann. Auch hier berichte ich über bereits vorhandene Erfahrungen aus dem Unterricht.

Leserinnen und Lesern, die hauptsächlich an der Behandlung der Schwarzschildmetrik im Unterricht interessiert sind, empfehle ich die Blöcke über Flugbahnen, Gravitationswellen und Rotation zu überspringen.

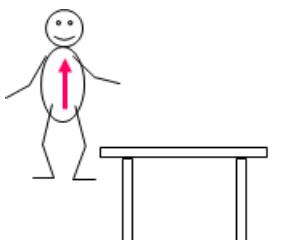


**Abb.2:** Deutung der Gravitationslinse: Licht der Lichtquelle wird von der Galaxie abgelenkt und gelangt oben und unten zum Beobachter. Im Raum entstehen so konzentrische Bögen.

## 2. Entdeckung der Raumkrümmung

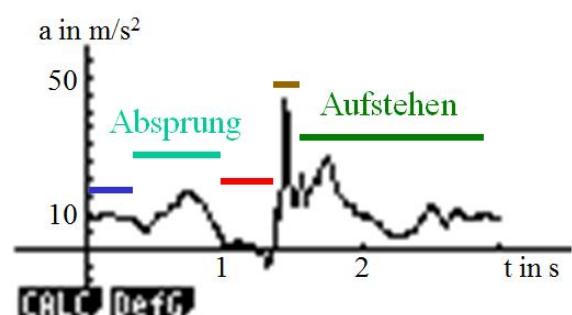
*Problemstellung und Vermutungen:* Zum Einstieg sehen die Schülerinnen und Schüler eine Aufnahme einer Gravitationslinse (s. Abb. 1 und 2). Zum Zustandekommen dieser Aufnahme nennen die Schüler zwei Vermutungen:

- Der Raum ist gekrümmmt.
- Das Licht wird durch die Schwerkraft der passierten Galaxien beschleunigt.



**Abb.3:** Ein Schüler springt mit einem Beschleunigungssensor am Bauch vom Tisch.

*Versuch mit dem Beschleunigungssensor:* Zur Untersuchung der Beschleunigungshypothese erhält ein Schüler einen Beschleunigungssensor, befestigt diesen in der Nähe des Körperschwerpunkts und springt vom Tisch (s. Abb. 3). Die Anzeige des Sensors wird als Funktion der Zeit grafisch dargestellt (s. Abb. 4).



**Abb.4:** Anzeige des Beschleunigungssensors [8].

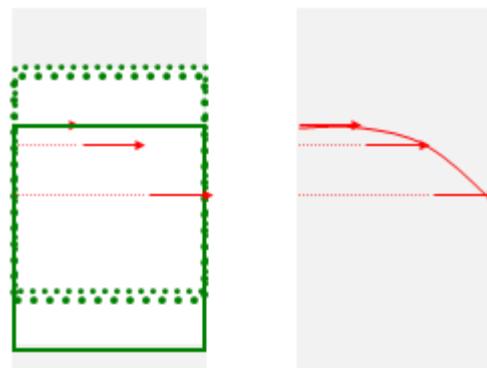
Die wesentlichen Phasen werden gedeutet:

- Zunächst steht der Schüler auf dem Tisch, die Anzeige beträgt ungefähr  $10 \text{ m/s}^2$ , obwohl die Beschleunigung gleich null ist.
- Während des Absprungs holt der Schüler aus und die Anzeige schwankt.
- Beim Fallen ist die Anzeige  $0 \text{ m/s}^2$ , obwohl die Beschleunigung ungefähr  $10 \text{ m/s}^2$  beträgt.

*Deutung des Versuchsergebnisses:* Die Schüler erkennen, dass der Sensor nicht einfach eine absolute Beschleunigung anzeigt. Die Schüler wollen verstehen, was der Sensor anzeigt und entwickeln gemeinsam folgende Ergebnisse:

- Beschleunigung ist eine Frage des Bezugssystems.
- Im frei fallenden Bezugssystem ist die Beschleunigung gleich null.
- Im frei fallenden Fahrstuhl breitet sich ein Laserstrahl geradlinig aus (s. Abb. 5).
- Im Fahrstuhlschacht breitet sich ein Laserstrahl ungefähr parabelförmig aus (s. Abb. 5).
- Wenn sich ein Laserstrahl im Vakuum von einem Punkt A zu einem Punkt B ausbreitet, dann geschieht das auf dem kürzesten Weg. Da dieser kürzeste Weg im Fahrstuhlschacht gekrümmmt ist, ist der Raum gekrümmmt (s. Abb. 5). Hier reflektieren die Schüler bewusst, dass das Licht zum Maßstab für den Raum wird.

Damit haben die Schüler die Raumkrümmung entdeckt.



**Abb.5:** Fallender Fahrstuhl: Links: Im fallenden Fahrstuhl verläuft der Lichtstrahl geradlinig. Nach dem Einschalten breitet sich die Spitze des Lichtstrahls aus. Rechts: Ein sehr schneller Schüler markiert im Gedankenexperiment zu verschiedenen Zeitpunkten die Spitze des Lichtstrahls am Fahrstuhlschacht (grau). Es entsteht eine parabelförmige Kurve.

Die Schüler erkennen weiter, dass die Masse, die den Fahrstuhl oder den Sensor anzieht, die Ursache dafür ist, dass der Raum gekrümmt ist und ein Beschleunigungssensor nicht null anzeigt. Aber in unendlicher Entfernung von der Masse ist der Raum nicht gekrümmt und der Sensor zeigt null an. Auch

im frei fallenden Bezugssystem zeigte der Beschleunigungssensor null an. Insofern zeigt der Beschleunigungssensor den flachen Raum durch die Anzeige null an.

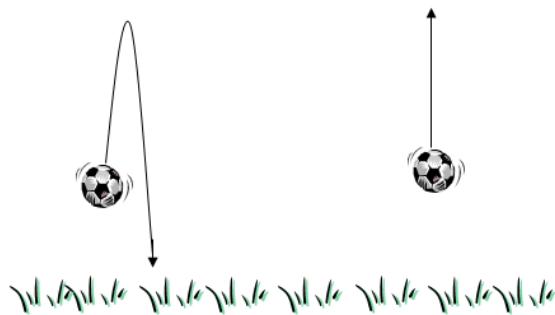
### 3. Entdeckung der Schwarzschild-Metrik

Die Schüler wollen nun wissen, *wie stark* der Raum gekrümmt ist. Dazu betrachten wir wieder den frei fallenden Fahrstuhl und darin der Einfachheit halber nur die radiale Raumrichtung.

Die vertikale Strecke, die ein Laserstrahl zurücklegt, hängt vom Bezugssystem ab (s. Abb. 5). Im Beispiel des auf den Himmelskörper Erde hin frei fallenden Fahrstuhls ist die Anzeige des Beschleunigungssensors null. Dieser fallende Fahrstuhl ist durch die Geschwindigkeit unnötig kompliziert. Daher suchen die Schüler ein *anderes* Bezugssystem, bei dem der Beschleunigungssensor null anzeigt. Sie schlagen das Bezugssystem in unendlicher Höhe über dem Himmelskörper vor.

*Einführung des metrischen Tensors für die Senkrechte:* Wir vereinbaren die Raumkrümmung mithilfe von Streckenlängen in Bezugssystemen zu untersuchen, die in unterschiedlicher Höhe über einem Himmelskörper sind. Im Bezugssystem mit unendlicher Höhe nennen wir die zurückgelegte Strecke  $dr$ , im anderen Bezugssystem nennen wir sie  $d\sigma$ . Der Quotient  $d\sigma^2/dr^2$  wird metrischer Tensor der Senkrechten  $g_{rr}$  genannt. Wir suchen den Funktionsterm  $g_{rr}(r)$  für die Funktion  $g_{rr}$  abhängig vom Abstand  $r$  zum Mittelpunkt des Himmelskörpers.

*Bestimmung des metrischen Tensors im Unendlichen:* Für den Grenzwert  $r \rightarrow \infty$  finden die Schüler sofort heraus, dass der Raum ungekrümmt ist, also  $d\sigma = dr$  und somit  $g_{rr}(\infty) = 1$ .



**Abb.6:** Ist ein Ball beim Abschuss schnell genug, so kommt er nicht mehr zurück.

*Bestimmung des metrischen Tensors beim Schwarzschildradius:* Um nicht nur sehr schwache, sondern auch sehr starke Schwerkräfte zu analysieren, untersuchen die Schüler, ob ein senkrecht nach oben geschossener Ball immer zurückkommt (s. Abb. 6). Dazu vergleichen sie die potenzielle Energie mit der kinetischen. Sie stellen fest, dass der Ball nicht mehr zurückkehrt, wenn die kinetische die potenzielle Energie übertrifft. Ab einer bestimmten Anfangsgeschwindigkeit, der sogenannten Fluchtgeschwindigkeit  $v_F$ , kommt der Ball nicht zurück. Sie bestimmen

diese Fluchtgeschwindigkeit durch Gleichsetzen der Bewegungsenergie mit der potenziellen Energie:  

$$v_F^2 = 2GM/r$$

Dabei ist  $G$  die newtonsche Gravitationskonstante und  $M$  die Masse des Himmelskörpers. Ist die Fluchtgeschwindigkeit größer als die Lichtgeschwindigkeit, so kann selbst Licht nicht mehr vom Himmelskörper entweichen. Im Grenzfall ist  $v_F = c$ . Die Schülerinnen und Schüler bestimmen den entsprechenden Radius, den sogenannten Schwarzschildradius:

$$R_S = 2GM/c^2$$

Für den Grenzwert  $r \rightarrow R_S$  finden die Schüler sofort heraus, dass das Licht gerade nicht entkommen kann. Da es sich mit Lichtgeschwindigkeit ausbreitet, muss der Weg  $d\sigma$  unendlich lang sein. Demnach ist  $g_{rr}(R_S) = \infty$ .

*Bestimmung der Schwarzschildmetrik für die Senkrechte:* Als nächstes wird der Funktionsterm für  $g_{rr}(r)$  durch lineare Regression aus den beiden Stützstellen bei  $r \rightarrow \infty$  und  $r \rightarrow R_S$  bestimmt:

Für  $r \rightarrow \infty$  ist  $g_{rr} = 1$ .

Für  $r \rightarrow R_S$  gilt  $g_{rr} \rightarrow \infty$ .

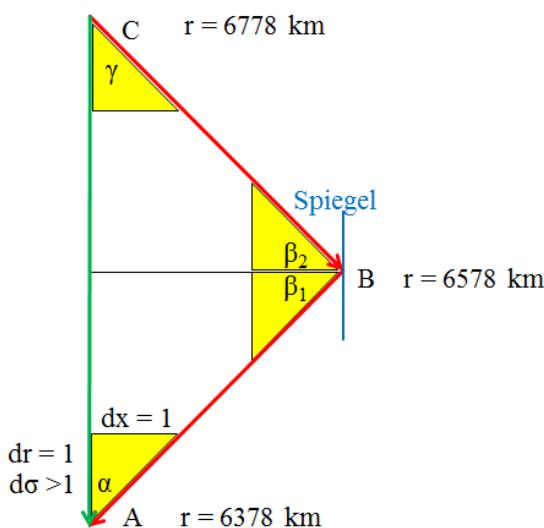
Zur konkreten Berechnung beseitigen die Schüler die Unendlichkeiten durch Einsetzen der Kehrwerte  $u = 1/r$  und  $q = 1/g_{rr}$ . Damit sind die beiden Stützstellen  $q(0) = 1$  und  $q(U_S) = 0$ . Die Schüler finden durch lineare Regression den Funktionsterm:

$$q(u) = 1 - u/U_S$$

Durch Einsetzen der ursprünglichen Variablen entdecken die Schüler die Schwarzschildmetrik:

$$g_{rr}(r) = 1/(1 - R_S/r)$$

*Reflexion der Methode:* Die Schülerinnen und Schüler fragen, ob man den Funktionsterm einfach durch Regression bestimmen darf. Sie erkennen, dass der Funktionsterm ein neues Naturgesetz darstellt, das beschreibt, wie der Raum in der Nähe einer Masse gekrümmt wird. Sie erinnern sich, dass man neue Naturgesetze durch Messwerte und Regression bestimmt. Sie erkennen weiter, dass hier anstelle der Messwerte zwei durch Überlegung erschlossene Stützstellen verwendet wurden. Abschließend teile ich mit, dass das Naturgesetz in einer relativ frühen Darstellung in Form der sogenannten Einstein-Gleichung formuliert wurde und von Einstein ebenso durch Regression mit möglichst kleinen Exponenten bestimmt wurde.



**Abb.7:** Dreieck ABC aus Laserstrahlen: Im Bezugssystem mit der Beschleunigungssensoranzeige null ist das Dreieck gleichschenklig und rechtwinklig. Denn das Licht hat keinen Grund von der geradlinigen Ausbreitung abzuweichen. Wie groß ist die Winkelsumme im Bezugssystem am Erdboden?

#### 4. Anwendung auf die Winkelsumme im Dreieck

Die Schüler fragten nach der Raumkrümmung in andere Raumrichtungen. Sie erkennen selbst, dass in Tangentialrichtung der ruhende Beschleunigungssensor null anzeigt. Das bedeutet, dass der Raum in Tangentialrichtung nicht gekrümmt ist. Das entsprechende Element des metrischen Tensors wird hier mit  $g_{xx}$  bezeichnet und hat den Betrag 1.

Zur Veranschaulichung untersuchen wir die Winkelsumme in einem Dreieck ABC (s. Abb. 7). Weil Licht als invariante Maßstab gewählt wurde, wird das Dreieck durch Lichtstrahlen bestimmt: Ein Strahl geht von C nach A senkrecht nach unten (grün), während ein zweiter Strahl (rot) von C zu einem senkrechten Spiegel bei B geht, dort reflektiert wird und bei A den ersten Strahl schneidet. A liegt am Erdboden 6378 km über dem Erdmittelpunkt, B 200 km höher bei 6578 km und C 400 km höher bei  $r = 6778$  km. Das Dreieck hat im Bezugssystem mit Beschleunigungssensoranzeige null die Winkel  $\alpha = \gamma = 45^\circ$  und  $\beta = 90^\circ$ . Zu Berechnung der Winkel werden vier Hilfsdreiecke (gelb) betrachtet mit  $dr = 1\text{ m} = dx$ .

Die Schülerinnen und Schüler berechneten zunächst den Winkel  $\alpha$  des Hilfsdreiecks bei A: Die waagerechte Kantenlänge beträgt  $dx = 1\text{ m}$ . Die senkrechte Kantenlänge beträgt  $d\sigma = dr/(1-R_S/r)^{0.5}$  mit  $r = 6378\text{ km}$ . Dabei ist  $R_S = 2GM/c^2 = 2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11}\text{ Nm}^2/\text{kg}^2 \cdot 5,97 \cdot 10^{24}\text{ kg}/(3 \cdot 10^8\text{ m/s})^2 = 8,85\text{ mm}$ . Daher ist:

$d\sigma = 1\text{ m}/(1-8,85\text{ mm}/6378\text{ km})^{0.5} = 1\text{ m}+693,791\text{ pm}$

Die Schülerinnen und Schüler berechneten den Winkel:

$$\alpha = \arctan(1/d\sigma) = 45^\circ - 19,8757\text{ n}^\circ$$

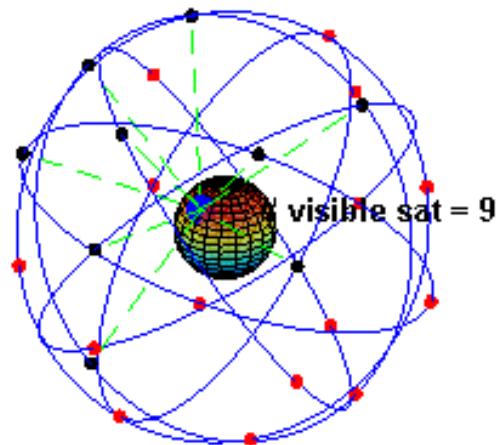
Für den Winkel  $\beta_1$  ist entsprechend  $d\sigma = 1/(1-8,85\text{ mm}/6778\text{ km})^{0.5} = 1\text{ m}+672,697\text{ pm}$ . Also ist  $\beta_1 = \arctan(d\sigma) = 45^\circ + 19,2714\text{ n}^\circ$ . Da  $\beta_2$  auf der gleichen Höhe liegt, ist  $\beta_2 = \beta_1$ .

Für den Winkel  $\gamma$  ist analog  $d\sigma = 1/(1-8,85\text{ mm}/6778\text{ km})^{0.5} = 1\text{ m}+652,848\text{ pm}$ . Also ist  $\gamma = \arctan(1/d\sigma) = 45^\circ - 18,7027\text{ n}^\circ$ .

Die Winkelsumme beträgt daher:

$$\alpha + \beta_1 + \beta_2 + \gamma = 180^\circ - 35,6\text{ p}^\circ$$

So entdeckten die Schülerinnen und Schüler, dass die Winkelsumme in diesem Dreieck am Erdboden um 35,6 p° von dem aus dem Geometrieunterricht bekannten Wert 180° abweicht. Auch bemerkten sie, dass ein waagerecht liegendes Dreieck genau die bekannte Winkelsumme 180° hat. Ferner verallgemeinerten sie, dass für beide waagerechte Richtungen das Element des metrischen Tensors gleich eins ist.



**Abb.8:** Das GPS: Satelliten umkreisen die Erde [9].

#### 5. Anwendungen auf das GPS

Die Schüler merkten, dass die Abweichung der Winkelsumme im Dreieck sehr klein ist und fragten, ob die Raumkrümmung überhaupt eine praktische Bedeutung im Alltag hat. Sie stimmten zu, dass das GPS aktuell ein weit verbreitetes geometrisches Messsystem ist. Also untersuchten wir, welchen Einfluss die Raumkrümmung auf das GPS hat.

Die Schülerinnen und Schüler konnten das Prinzip der Laufzeitmessung anhand einer Abbildung (s. Abb. 8) erklären. Damit war klar, dass wir den Gang der Uhren an Bord der Satelliten in 20200 km Flughöhe über dem Erdboden untersuchen müssen.

*Entdeckung der Schwarzschildmetrik der Zeitachse:* Die Schülerinnen und Schüler untersuchten Licht, das sich von großer Entfernung radial in Richtung eines schwarzen Lochs ausbreitet. Sie stellten fest, dass die Schwerkraft die Ausbreitung des Lichts nicht behindert, sondern allenfalls begünstigt. Das begründeten sie damit, dass das schwarze Loch aufsteigendes Licht behindert. Sie folgerten, dass eine Uhr im Bezugssystem des Himmelskörpers eine endliche Zeit anzeigt, wenn das Licht den Schwarzschildradius erreicht. Da das Licht im Bezugssystem des Himmelskörpers eine unendliche Strecke zu-

rückgelegt hat, muss die Uhr unendlich langsam gegangen sein. Daher geht das Element  $g_{tt}$  des metrischen Tensors gegen null, wenn  $r$  gegen den Schwarzschildradius geht. Hier nennen wir ein Zeitintervall  $dt$ , wenn die Uhr in einem unendlich hohen Bezugssystem ruht. Das entsprechende Zeitintervall nennen wir  $dt$ , wenn die Uhr im Bezugssystem des Himmelskörpers ruht. Damit ist  $g_{tt} = dt^2/dt^2$ . Im Folgenden konnten die Schüler den gesuchten Funktionsterm für  $g_{tt}$  analog zu der Bestimmung von  $g_{rr}$  völlig selbstständig ermitteln:

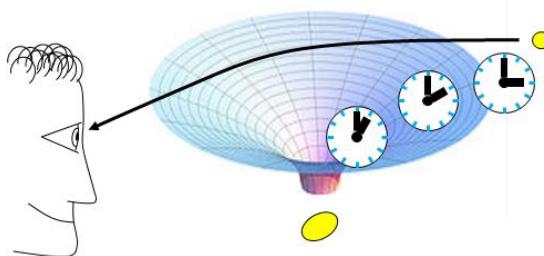
Für  $r \rightarrow \infty$  ist  $g_{tt} = 1$ .

Für  $r \rightarrow R_S$  gilt  $g_{tt} \rightarrow 0$ .

Das Einsetzen des Kehrwerts  $u = 1/r$  ergibt  $g_{tt}(0) = 1$  und  $g_{tt}(U_S) = 0$ . Die Schüler bestimmten durch lineare Regression den Funktionsterm  $g_{tt}(u) = 1 - u/U_S$  sowie:

$$g_{tt}(r) = 1 - R_S/r$$

*Berechnung der Abweichung der Uhr im Satelliten:* Mithilfe der hergeleiteten Schwarzschildmetrik für die Zeitachse konnten die Schülerinnen und Schüler selbstständig berechnen, um wie viel Prozent die Uhr im Satelliten schneller geht als auf der Erdoberfläche: Zunächst bestimmten sie für den Erdradius  $g_{tt}(r_{Erde}) = 1 - 1,39 \cdot 10^{-9}$  und für den Satelliten  $g_{tt}(r_{Sat}) = 1 - 0,33 \cdot 10^{-9}$ . Weiter bestimmten sie für  $dt = 1\text{ s}$  die Dauer  $dt_{Erde} = dt \cdot [g_{tt}(r_{Erde})]^{0,5} = 1\text{ s} - 694\text{ ps}$ . Analog bestimmten sie für  $dt = 1\text{ s}$  die Dauer  $dt_{Sat} = dt \cdot [g_{tt}(r_{Sat})]^{0,5} = 1\text{ s} - 166\text{ ps}$ . Die Abweichung beträgt 527 ps je Sekunde oder 52,7 %. Das entspricht einer Abweichung von 45,6  $\mu\text{s}$  pro Tag. Der entsprechende Streckenfehler beträgt 45,6  $\mu\text{s}/\text{Tag} \cdot 300000 \text{ km/s} = 13,7 \text{ km/Tag}$ . Das wäre ein völlig inakzeptabler Fehler des GPS. Daher ist klar, dass das GPS nur dadurch funktioniert, dass es die Raumkrümmung richtig berücksichtigt. Zusätzlich ist die Zeitdilatation aufgrund der Geschwindigkeit des Satelliten zu berücksichtigen [10].



**Abb.9:** Anschauliche Darstellung der Schwarzschild-Metrik: Betrachtet wird eine zweidimensionale Fläche des Raums. In der Nähe der Masse sind die Strecken verlängert. Das wird dadurch veranschaulicht, dass die Fläche in eine visuell vorhandene weitere Richtung gedehnt wurde. In der Nähe der Masse vergeht die Zeit verlangsamt. Das wird dadurch illustriert, dass die Uhr noch nicht weit gegangen ist. Der Lichtstrahl, der von der Lichtquelle ins Auge läuft, müsste eine sehr gedehnte Fläche durchqueren, wenn er näher an der Masse verlaufen würde. Daher macht der Lichtstrahl einen Bogen um die Masse.

## 6. Erklärung der Lichtbögen

Die Schwarzschild-Metrik wird wie üblich durch die radiale und eine tangentiale Raumrichtung in Form eines Trichters dargestellt (s. Abb. 9). Licht, das von der Lichtquelle zum Beobachter gelangt, würde auf dem scheinbar geraden Weg tief durch den Trichter verlaufen und somit einen Umweg nehmen. Der scheinbar gekrümmte Weg ist kürzer. So entsteht die Lichtablenkung (s. Abb. 2). Auf diese Weise erklärten die Schülerinnen und Schüler die fotograzierten Lichtbögen (s. Abb. 1). Auch wurde ihnen veranschaulicht, dass die obige Winkelsumme im Dreieck kleiner als  $180^\circ$  ist.

## 7. Weiterführende Themen

In den obigen Abschnitten wurde gezeigt, wie die Schülerinnen und Schüler auf einfache Weise die Raumkrümmung in der Umgebung der Erde herleiten und anwenden können. Das interessiert viele Schülerinnen und Schüler der Sekundarstufe zwei. Es folgen drei Blöcke von Abschnitten mit weiterführenden Themen. Im ersten Block mit den Abschnitten 9 bis 12 werden Flugbahnen von Objekten in der Schwarzschildmetrik entwickelt. Im zweiten Block mit den Abschnitten 13 bis 19 werden Gravitationswellen behandelt. Im dritten Block in den Abschnitten 20-24 wird die durch die Eigenrotation eines Körpers verursachte raumzeitliche Krümmung behandelt. Diese drei Blöcke erscheinen besonders für die Begabtenförderung beispielsweise in Arbeitsgemeinschaften geeignet.

## 8. Flugbahn: Energieterm

Die Schülerinnen und Schüler konnten die Krümmung des Lichtwegs nachvollziehen (s. Abb. 9). Nun soll der beobachtete Ablenkungswinkel (s. [3], S. 113) berechnet werden. Dazu wird zunächst der Energieterm entwickelt:

Wir betrachten zuerst den flachen Raum. Hier gilt für die Summe aus Ruheenergie und kinetischer Energie:

$$E_{flach} = m_0 \cdot c^2 / (1 - v^2/c^2)^{0,5}$$

Die Schülerinnen und Schüler erkannten an dem Divisor  $(1-v^2/c^2)^{0,5}$ , dass ein Objekt mit Ruhmasse  $m_0$  die Lichtgeschwindigkeit  $c$  nicht erreichen kann. Auch können die Schülerinnen und Schüler ein masseloses oder massives Teilchen als Welle beschreiben mit:

$$E_{flach} = h \cdot f_{flach} = h/T_{flach}$$

Nun transformieren wir in ein System mit der Anzeige ungleich null des Beschleunigungssensors, konkret wählen wir ein zum Himmelskörper ruhendes Bezugssystem bei einer Koordinate  $r$ . Hier wird die folgende Periodendauer beobachtet:

$$T = T_{flach} \cdot (1 - R_S/r)^{0,5}$$

Einsetzen ergibt folgenden Energieterm:  $E_{unten} = h/T$ :

$$E_{unten} = h/[T_{flach} \cdot (1 - R_S/r)^{0,5}] = E_{flach} / (1 - R_S/r)^{0,5}$$

Nach dem Prinzip der Energieerhaltung ist die Summe aus der Energie der relativistischen oder dynamischen Masse und der potenziellen Energie  $E_{\text{pot}}$  konstant, auch ist die potenzielle Energie im flachen Raum gleich null. Somit gilt:

$$E_{\text{flach}} = E_{\text{unten}} + E_{\text{pot}}$$

Auflösen und Einsetzen ergibt:

$$E_{\text{pot}} = E_{\text{flach}} - E_{\text{unten}} = E_{\text{flach}} \cdot [1 - 1/(1 - R_S/r)^{0.5}]$$

Mit der Tangentennäherung für kleine  $R_S/r$  gilt:

$$E_{\text{pot}} = -E_{\text{flach}} \cdot 0,5 R_S/r$$

Für die invariante Gesamtenergie  $E$  gilt:

$$E = E_{\text{pot}} + E_{\text{flach}} = E_{\text{flach}} \cdot [1 - 0,5 R_S/r]$$

Mit der Tangentennäherung für kleine  $R_S/r$  gilt:

$$E = E_{\text{flach}} \cdot (1 - R_S/r)^{0.5}$$

Einsetzen des geschwindigkeitsabhängigen Terms für  $E_{\text{flach}}$  führt zu dem Energieterm für einen im gekrümmten Raum bewegten Körper mit einer Ruhemasse  $m_0$ :

$$E = m_0 \cdot c^2 \cdot (1 - R_S/r)^{0.5} / (1 - v^2/c^2)^{0.5}$$

So können die Schülerinnen und Schüler den üblichen Energieterm (s. [4], S. 299) auf elementare Weise im Rahmen der Tangentennäherung finden, eine exakte Herleitung befindet sich im Anhang 32.

Die Schülerinnen und Schüler *deuten den Energieterm*, indem sie für  $v^2/c^2$  sowie für  $R_S/r$  die Tangentennäherung durchführen und erhalten so:

$$E_0 = m_0 \cdot c^2 + m_0 v^2/2 - GMm_0/r$$

Sie erkennen den Term für die potenzielle Energie mit seiner rein radialen Abhängigkeit sowie den Term für die kinetische Energie mit der in  $v$  enthaltenen radialen und tangentialen Komponente.

Die Schülerinnen und Schüler analysieren nun die Komponenten der kinetischen Energie. Dazu zerlegen sie  $v^2$  in Polarkoordinaten:  $v^2 = (d\sigma/dt)^2 + (r \cdot d\varphi/dt)^2$ . Hier wurde  $g_{\varphi\varphi} = g_{xx} = 1$  verwendet. Einsetzen der Schwarzschildmetrik ergibt:

$$v^2 = (dr/dt)^2/(1 - R_S/r) + (r \cdot d\varphi/dt)^2$$

Die verlängerte radiale Strecke überträgt sich auf den Term der kinetischen Energie.

## 9. Flugbahn: Bewegungsgleichung

Zur Berechnung des Ablenkwinkels wird die Bewegungsgleichung aus dem obigen Energieterm hergeleitet. Das Verfahren wird am *Beispiel des obigen klassischen Energieterms* erprobt:

$$E_0 = m_0 \cdot c^2 + m_0 v^2/2 - GMm_0/r$$

Diese Gleichung wird als Funktion der Zeit aufgefasst und abgeleitet:

$$0 = m_0 \cdot v \cdot v' + v \cdot GMm_0/r^2$$

Die Schülerinnen und Schüler dividieren durch  $v$ , erkennen in  $v'$  die Beschleunigung  $a$  und erhalten so die bekannte Bewegungsgleichung:

$$m_0 \cdot a = -GMm_0/r^2$$

Die Schülerinnen und Schüler wissen, dass die Bewegung besonders einfach ist, wenn der *Impuls erhalten* ist. Zum Auffinden von allen mögli-

chen erhaltenen Impulsen wird als weiteres Beispiel ein schräger Wurf betrachtet. Dabei ist der Energieterm:

$$E = 0,5mv_x^2 + 0,5mv_y^2 + mgv_y$$

Diese Gleichung wird wie oben abgeleitet:

$$0 = mv_x v_x' + mv_y v_y' + mgv_y$$

Weil  $E$  nicht von  $x$  abhängt, ist  $v_x' = 0$  und  $mv_x = p_x$  ein erhaltener Impuls. Damit ist  $0 = mv_y v_y' + mgv_y$ . Division durch  $mv_y$  ergibt die Bewegungsgleichung:  $0 = v_y' + g$ .

Die Schülerinnen und Schüler übertragen das Verfahren auf den obigen Energieterm für einen im gekrümmten Raum bewegten Körper:

$$E^2 = m_0^2 \cdot c^4 \cdot (1 - R_S/r)/(1 - v^2/c^2)$$

Für Körper, deren Geschwindigkeiten klein im Vergleich zur Lichtgeschwindigkeit sind, können die Schüler die Tangentennäherung für kleine  $v/c$  anwenden:

$$E^2 = m_0^2 \cdot c^4 \cdot (1 - R_S/r) \cdot (1 + v^2/c^2)$$

Um einen erhaltenen Impuls zu finden, werden die obigen Polarkoordinaten für  $v^2$  eingesetzt:

$$\begin{aligned} E^2 &= m_0^2 \cdot c^4 \cdot (1 - R_S/r) \cdot \\ &\quad [1 + 1/c^2 (dr/dt)^2/(1 - R_S/r) + 1/c^2 (r \cdot d\varphi/dt)^2] \end{aligned}$$

Die Schülerinnen und Schüler können merken, dass  $E$  nicht von  $\varphi$  abhängt. In Analogie zum obigen Beispiel ist dann  $r^2 \cdot d\varphi/dt \cdot d(d\varphi/dt)/dt$  null und  $r^2 \cdot d\varphi/dt = B$  ein erhaltener Impuls. Versuche mit dem Drehstuhl motivieren, dass es sich um den *Drehimpuls* pro Masse handelt. Da solche erhaltenen Größen durch ihre Invarianz die Analyse vereinfachen, wird  $B$  eingesetzt. Das ergibt:

$$\begin{aligned} E^2/m_0^2 \cdot c^4 &= (1 - R_S/r) + 1/c^2 (dr/dt)^2 + \\ &\quad 1/c^2 B^2/r^2 \cdot (1 - R_S/r) \end{aligned}$$

Um Quotienten zu vermeiden wird wieder  $u = 1/r$  verwendet. Zur Verringerung der Dimensionen wird mit  $u(\varphi)$  gerechnet. Damit sind die Terme nun:  $B/r = B \cdot u$  und mit der Kettenregel sowie der Abkürzung  $du/d\varphi = u'$  ist  $dr/dt = dr/du \cdot du/d\varphi \cdot d\varphi/dt = -1/u^2 \cdot u' \cdot B \cdot u^2 = -B \cdot u'$ . Somit ist:

$$E^2/m_0^2 \cdot c^4 = (1 - uR_S) + B^2/c^2 u'^2 + B^2/c^2 \cdot u^2 \cdot (1 - uR_S)$$

Die Schülerinnen und Schüler übertragen das obige Verfahren zur Gewinnung einer Bewegungsgleichung, indem sie diese Gleichung bzgl.  $\varphi$  ableiten und dabei die Invarianz von  $E$  und  $B$  nutzen:

$$0 = -u' R_S + 2B^2/c^2 \cdot u \cdot u' - 3R_S B^2/c^2 \cdot u^2 \cdot u' + 2B^2/c^2 \cdot u \cdot u''$$

Zur Vereinfachung wird durch  $2B^2 \cdot u'/c^2$  geteilt:

$$0 = -0,5R_S \cdot c^2/B^2 + u - 1,5R_S u^2 + u''$$

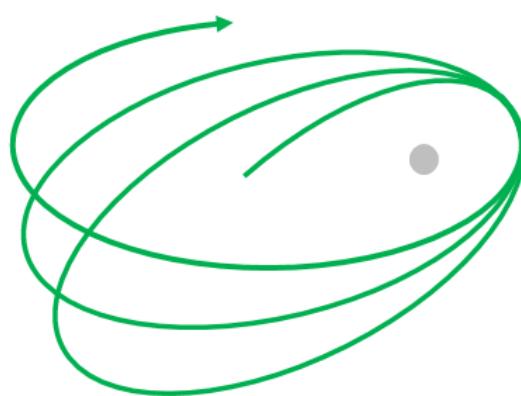
Das ist die *übliche Bewegungsgleichung* (s. [3], S. 105) für einen Körper in der Schwarzschildmetrik.

Diese Herleitung verwendet eine Tangentennäherung. Binnendifferenzierend kann eine exakte Herleitung eingesetzt werden, siehe den Anhang im Abschnitt 31.

## 10. Flugbahn: Bewegungsgleichung für Licht

Die Schülerinnen und Schüler konnten diese Gleichung auf Photonen oder Licht wie folgt anwenden. Der Drehimpuls pro Ruhemasse, also  $B$  geht für Licht gegen unendlich, da Licht keine Ruhemasse hat. Folglich verschwindet der Term mit  $1/B^2$  und die *Bewegungsgleichung für Licht* lautet:

$$0 = u - 1,5R_S u^2 + u^{''}$$



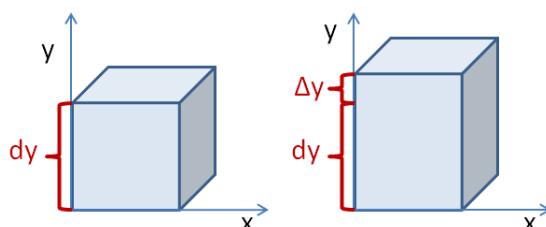
**Abb.10:** Periheldrehung des Merkur: Die elliptische Bahn dreht sich als Ganzes.

## 11. Flugbahn: Berechnung

Aus den obigen Bewegungsgleichungen konnten die Schülerinnen und Schüler mit Hilfe des Eulerschen Polygonzugverfahrens am PC leicht die Bahnen bestimmen. So fanden sie für die Lichtstrahlen, welche die Sonne passieren, den beobachteten Ablenkwinkel von 1,75 Bogensekunden. Ebenso konnten sie die Periheldrehung von Planeten mit großer Exzentrizität und kleinem Halbradius simulieren (s. Abb. 10). Die beobachtete Periheldrehung von 43 Bogensekunden pro Jahrhundert können die Schülerinnen und Schüler mit Hilfe eines ComputeralgebraSystems ermitteln.

## 12. Gravitationswellen: Übersicht

Die Schülerinnen und Schüler können mithilfe der von ihnen entwickelten Schwarzschildmetrik die Eigenschaften von Gravitationswellen herleiten. Darauf aufbauend können sie die Abnahme der Umlaufdauer des Pulsardoppelsterns B1913 + 16 durch die Aussendung von Gravitationswellen qualitativ und quantitativ erklären. Das Vorgehen stelle ich in den folgenden Abschnitten 14 bis 19 dar.



**Abb. 11:** Raumdehnung: Eine Raumdehnung in y-Richtung wird durch  $\varepsilon = \Delta y/dy = h_{yy}/2$  beschrieben.

Die Ableitungen  $\varepsilon'$  kann im Prinzip mit dem Beschleunigungssensor gemessen werden.

## 13. Gravitationswellen: Kleine Dehnung

Die Schülerinnen und Schüler haben im Zusammenhang mit der Schwarzschildmetrik gelernt, wie eine Raumdehnung durch eine Masse erzeugt wird. Bei einem Doppelsternsystem drehen sich die Massen um einander und bewegen sich somit schnell. Damit stellt sich die Frage, was aus einer Raumdehnung wird, wenn sich die ursächliche Masse inzwischen wegbewegt hat. Wie bildet sich diese Raumdehnung zurück?

Wir betrachten eine sehr kleine Raumdehnung und beschreiben diese durch das Element  $g_{yy} = 1 + h_{yy}$  des metrischen Tensors, wobei die *metrische Abweichung*  $h_{yy}$  viel kleiner als eins ist (s. Abb. 11). Zur Deutung wird die resultierende *Längenänderung*  $\Delta y$  analysiert:

$$(d\sigma_y)^2 = (dy + \Delta y)^2 = (1 + h_{yy}) \cdot dy^2$$

Da  $h_{yy}$  sehr klein ist, ist auch  $\Delta y$  sehr klein und die Tangentennäherung kann angewendet werden:  $dy^2 + 2dy\Delta y = dy^2 + h_{yy} \cdot dy^2$ . Daraus folgt:

$$\Delta y/dy = h_{yy}/2$$

Der Quotient  $\Delta y/dy$  wird in der Materialforschung und Werkstoffkunde als *Dehnung*  $\varepsilon$  bezeichnet [12], kurz:

$$\varepsilon = \Delta y/dy$$

Also ist die Dehnung halb so groß wie die metrische Abweichung, kurz  $\varepsilon = h_{yy}/2$ . Hier wird exemplarisch die Dehnung  $\Delta y/dy$  betrachtet. Allgemein liegt ein Dehnungstensor  $\varepsilon_{ik} = \Delta x_i/dx_k$  vor. Dieser wird im Anhang Abschnitt 33 untersucht.

## 14. Gravitationswellen: Ausbreitung

Der Einfachheit halber wird eine ebene Welle betrachtet, die sich in die x-Richtung ausbreitet, und deren Wellenfronten parallel zur y-z-Ebene liegen. Also ist die Wellengleichung:

$$\varepsilon = \varepsilon_A \cdot \sin(\omega t - k \cdot x)$$

Dabei ist  $\varepsilon_A$  die Amplitude. Dieser Zugang ist allgemein, da man andere Wellenformen durch solche ebenen Wellen ausdrücken kann.

Die Schülerinnen und Schüler können die zugehörige Bewegungsgleichung mithilfe ihrer Kenntnisse über Quantenobjekte und die relativistische Energie herleiten: Weil die Dehnung *masselos* ist, gilt für die Energie  $E^2 = p^2 \cdot c^2$ . Für ein Quantenobjekt ist  $E = h \cdot f$  und  $p = h/\lambda$ . Einsetzen ergibt:  $h^2 \cdot f^2 = h^2/\lambda^2 \cdot c^2$ .

Auflösen führt zu  $f \cdot \lambda = c$ . Also breiten sich Gravitationswellen mit Lichtgeschwindigkeit aus. Diese Dynamik stimmt mit dem Ergebnis der Einsteingleichung überein, siehe den Anhang Abschnitt 34.

## 15. Gravitationswellen: Messung

Als Nächstes wird untersucht, wie man die Dehnung in der Nähe eines Himmelskörpers mithilfe der Schwarzschildmetrik und des Beschleunigungssensors lokal im Prinzip messen kann. Das Messverfahren wird auf das Vakuum verallgemeinert.

Die Schülerinnen und Schüler können das Tensorlement  $g_{yy} = 1/(1-R_S/r)$  mit dem der kleinen Raumdehnung  $g_{yy} = 1 + h_{yy}$  vergleichen. In der Tangentennäherung ist  $g_{yy} = 1 + R_S/r$ . Durch Vergleich folgt:

$$h_{yy} = R_S/r = 2\epsilon$$

Zur geplanten Messung von  $\epsilon$  müssen die Variablen  $R_S$  und  $r$  durch die Gravitationsfeldstärke  $g$  ersetzt werden. Hierzu setzen die Schülerinnen und Schüler für den Schwarzschildradius den obigen Term ein und erhalten so:

$$G \cdot M / r \cdot 1/c^2 = \epsilon$$

Hier kann den Schülerinnen und Schülern auffallen, dass sich der Raum grundsätzlich anders dehnt als beispielsweise Stahl: Während bei Stahl die Dehnung proportional zu Kraft ist, ist beim Raum die Dehnung proportional zur potenziellen Gravitationsenergie. Um das geplante Messverfahren zu erreichen, leiten wir bezüglich  $r$  ab und erweitern mit einer Probemasse wie folgt:

$$G \cdot M \cdot m / r^2 \cdot 1/m \cdot 1/c^2 = -\epsilon'$$

Der erste Quotient ist die Kraft  $F$ . Also bilden die ersten beiden Quotienten zusammen die Gravitationsfeldstärke  $F/m = g$  und es gilt:

$$-g/c^2 = \epsilon'$$

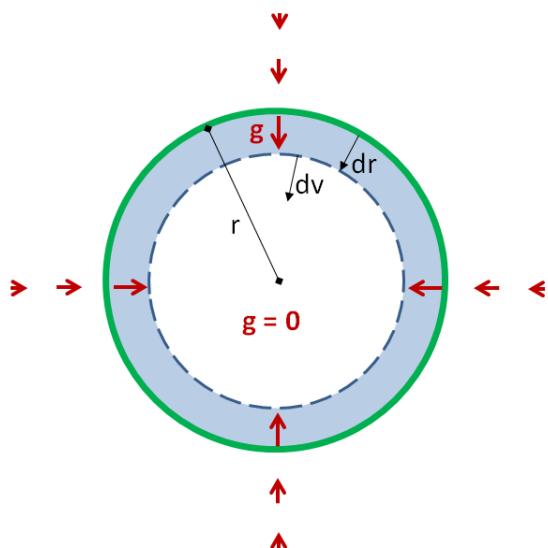
Die Schülerinnen und Schüler können mithilfe der oben entwickelten Ausbreitungsdynamik feststellen, wie man die zeitliche Änderung  $d\epsilon/dt$  misst: Zunächst gilt die obige Wellengleichung:

$$\epsilon = \epsilon_A \cdot \sin(\omega t - k \cdot x)$$

Ableiten bezüglich  $t$  ergibt:  $d\epsilon/dt = \omega\epsilon$ , während Ableiten bezüglich  $r$  für  $x = r$  zu  $\epsilon' = -k\epsilon$  führt. Also ist der Quotient  $(d\epsilon/dt)/\epsilon' = -\omega/k = -c$ . Demnach ist  $\epsilon' = -d\epsilon/dt \cdot 1/c$ . Einsetzen in die obige Gleichung für  $\epsilon' = -g/c^2$  ergibt:

$$d\epsilon/dt = g/c$$

Zusammenfassend können die Schülerinnen und Schüler somit feststellen, dass man die räumliche Änderung der Dehnung mithilfe des Beschleunigungssensors überall und jederzeit im Prinzip messen kann (s. Abb. 11). Denn der Beschleunigungssensor kann die Gravitationsfeldstärke  $g$  bestimmen (s. Abb. 4). Auch erkennen sie, dass eine räumliche Änderung der Dehnung einer Gravitationsfeldstärke entspricht. Für den Fall einer Gravitationswelle kann man damit auch die zeitliche Änderung der Dehnung mit dem Beschleunigungssensor ermitteln.



**Abb.12:** Gedankenexperiment zur Energiemessung: Masse  $M$  (grün) auf Kugelfläche mit Radius  $r$ . Gravitationsfeldstärke  $g$  (rot), innen null. Bewegung der Masse ( $dr$ ). Dabei entsteht neues Gravitationsfeld in Kugelschale (blau). Kinetische Energie  $0,5Mdv^2$  ist quadratisch in  $dv$  und somit verschwindet. Fazit: Die Energie des neuen Gravitationsfeldes ist gleich dem Energieverlust  $M \cdot g \cdot dr$  der Masse beim Absinken. Die Energiedichte des Gravitationsfeldes kann somit im Prinzip mit dem Beschleunigungssensor gemessen werden.

## 16. Gravitationswellen: Energiemessung

Als Nächstes wird untersucht, wie man die Energiedichte einer Raumdehnung mithilfe des Beschleunigungssensors im Prinzip messen kann. Dazu wird der Zusammenhang zwischen dem  $1/r^2$ -Gesetz der Zentralkraft und dem Flächeninhalt  $A = 4\pi r^2$  der Kugel verwendet. Es wird eine Kugel mit einem Radius  $r$  betrachtet, auf deren Oberfläche eine Masse  $M$  gleichmäßig verteilt ist (s. Abb. 12).

Die Masse  $M$  erzeugt auf der Kugeloberfläche die folgende Gravitationsfeldstärke:  $g = GM/r^2$ . Erweitern mit  $A$  ergibt:

$$g \cdot A = 4\pi G \cdot M$$

Um die auf die Masse  $M$  wirkende Kraft  $F$  zu analysieren, wird mit  $g$  erweitert:

$$g^2 \cdot A = 4\pi G \cdot Mg$$

Um die Energie  $dE$  des Feldes innerhalb einer Kugelschale mit dem Radius  $r$  und einer Dicke  $dr$  zu untersuchen, wird die Masse  $M$  eine Strecke  $dr$  durch die auf sie wirkende Gravitationskraft  $Mg$  bewegt. Formal wird die obige Gleichung mit  $dr$  erweitert:

$$dr \cdot g^2 \cdot A = 4\pi G \cdot Mg \cdot dr = 4\pi G \cdot dE$$

Dabei entsteht das Gravitationsfeld in der Kugelschale neu. Seine Energie erhält es aus dem Energieverlust  $dE = M \cdot g \cdot dr$  der Masse  $M$  beim Absinken. Denn die kinetische Energie  $0,5 \cdot M \cdot dv^2$  ist quadratisch in  $dv$  und somit verschwindet. Die Kugelschale hat das Volumen  $dV = dr \cdot A$ . Zur Bestimmung der Energiedichte  $dE/dV$  des Gravitationsfeldes wird

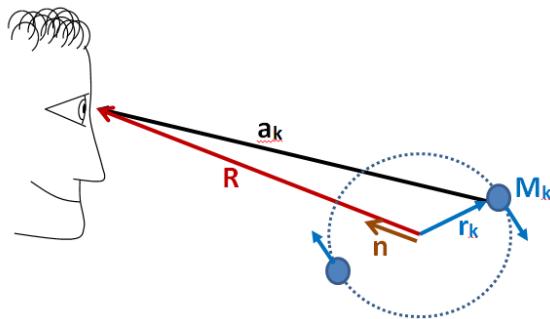
die obige Gleichung durch  $dV$  dividiert und man erhält so:

$$g^2 = 4\pi G \cdot dE/dV$$

Auflösen ergibt für die Energiedichte des Gravitationsfeldes den folgenden Term:

$$dE/dV = g^2/(4\pi G)$$

Auf diese Weise kann die Energiedichte des Gravitationsfeldes überall und jederzeit lokal im Prinzip mithilfe des Beschleunigungssensors gemessen werden. Denn der Beschleunigungssensor kann die Gravitationsfeldstärke  $g$  bestimmen (s. Abb. 4). Das hergeleitete Ergebnis stimmt mit dem üblichen Resultat der allgemeinen Relativitätstheorie überein, siehe den Anhang Abschnitt 35.



**Abb.13:** Zwei Pulsare kreisen um den gemeinsamen Schwerpunkt (rechts). In großer Entfernung  $R$  vom gemeinsamen Schwerpunkt werden Gravitationswellen beobachtet (links). Der Einheitsvektor  $n$  zum Abstandsvektor  $R$  heißt  $n$ . Eine Masse  $M_k$  hat den Abstandsvektor  $r_k$  zum Schwerpunkt und den Abstandsvektor  $a_k$  zum Beobachter.

## 17. Gravitationswellen: Abstrahlung

Die Schülerinnen und Schüler können diese Theorie der Gravitationswellen anhand eines Beobachtungsbeispiels testen. Dazu wird die Abstrahlung durch eine lokale Quelle, beispielsweise ein Doppelsternsystem, analysiert. Der Beobachter stellt die oben entwickelte Energiedichte  $dE/dV = g^2/(4\pi G)$  fest. Dabei erzeugt jede Masse  $M_k$  einen Teil  $g_k$  der Gravitationsfeldstärke  $g$ , kurz  $g = \sum_k g_k$ . Für jede Masse  $M_k$  können die Schülerinnen und Schüler die Gravitationsfeldstärke  $g_k$  durch das Potenzial darstellen:

$$g_k = -G \cdot M_k / a_k$$

Damit ist die beobachtete Energiedichte  $dE/dV$  im Prinzip vollständig bestimmt. Allerdings ist sie durch viele große Entfernungen  $a_k$  dargestellt. Praktischer ist die Verwendung nur einer großen Entfernung  $R$  und vieler kleiner Entfernungen  $r_k$  (s. Abb. 13). Für diesen Zweck wird für die Energiedichte eine Quadrupoldarstellung verwendet, die binnendifferenzierend von einigen Schülerinnen und Schülern hergeleitet werden kann (siehe Anhang 36):

$$dE/dV = G/(144\pi c^5 R^2) \cdot$$

$$\{[(d/dt)^3 D_{yy} - (d/dt)^3 D_{zz}]^2 + [2(d/dt)^3 D_{yz}]^2\}$$

Dabei ist das Quadrupolmoment

$$D_{ij} = \sum_k M_k \cdot (3 \cdot r_{ik} \cdot r_{jk} - \delta_{ij} r_k^2)$$

und der Abstand zwischen  $M_i$  und  $M_k$  ist  $r_{ik}$ .

Um den Energieverlust pro Zeit  $dE/dt$  der Quelle zu erhalten, multiplizieren die Schülerinnen und Schüler zunächst die Energiedichte mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit  $c$  und erhalten so die Energiestromdichte:

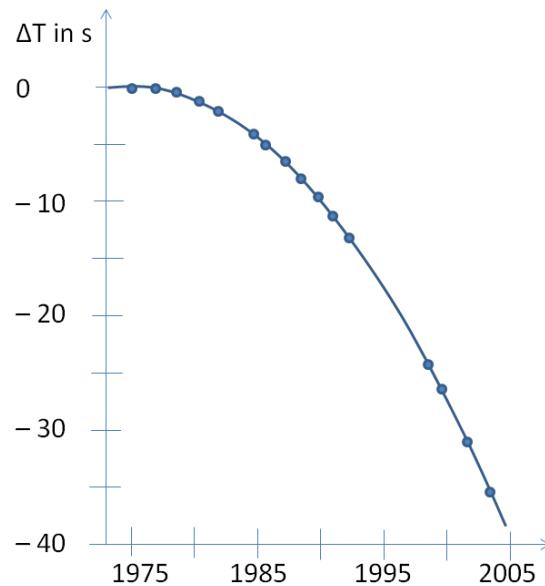
$$cdE/dV = G/(144\pi c^5 R^2) \cdot$$

$$\{[(d/dt)^3 D_{yy} - (d/dt)^3 D_{zz}]^2 + [2(d/dt)^3 D_{yz}]^2\}$$

Dieser Term wird mit dem Flächeninhalt  $4\pi R^2$  der Kugeloberfläche mit Radius  $R$  multipliziert:

$$dE/dt = G/(36c^5) \cdot$$

$$\{[(d/dt)^3 D_{yy} - (d/dt)^3 D_{zz}]^2 + [2(d/dt)^3 D_{yz}]^2\}$$



**Abb.14:** Verkürzung der Periodendauer  $T$  des Pulsardoppelsterns B1913+16: Die Periode  $T$  der Bahnbewegung des Doppelsternsystems hat sich seit 1975 um über 40 s verkürzt. Das können die Schülerinnen und Schüler mit einer Genauigkeit von ungefähr 1% durch die Abstrahlung von Gravitationswellen erklären.

## 18. Gravitationswellen: Beobachtung 1974

Die Schülerinnen und Schüler können mithilfe des oben bestimmten Energieverlustes pro Zeit die beobachtete Verkürzung der Periodendauer des Pulsardoppelsterns B1913+126 erklären (s. [4], S. 424-425 und [11], S. 58-63).

Zunächst können die Schülerinnen und Schüler mit Hilfe der beobachteten Periodendauer der Bahnbewegung von  $T = 27907$  s und den Massen  $m_1 = 2,88 \cdot 10^{30}$  kg sowie  $m_2 = 2,78 \cdot 10^{30}$  kg die Bahnbewegung analysieren:

Zuerst bestimmten sie den Abstand der beiden Pulsare:

$$r = (T^2 \cdot G \cdot [m_1 + m_2] \cdot 0,25/\pi^2)^{1/3} = 1,95 \cdot 10^9 \text{ m}$$

Darauf aufbauend folgt die Energie der Bahnbewegung, das ist die Hälfte der potenziellen Energie. Diese Hälfte können die Schülerinnen und Schüler aus den beiden Massen und deren Abstand  $r$  wie folgt bestimmen:

$$E = -0,5 \cdot G \cdot m_1 \cdot m_2 / r = -1,37 \cdot 10^{41} \text{ J}$$

Die Dynamik und damit das Quadrupolmoment können sie mithilfe der reduzierten Masse  $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$  und des Abstandes  $r$  untersuchen. Dazu können sie exemplarisch das Quadrupolmoment wie folgt ausdrücken:

$$D_{yy} = \mu r^2 (3 \cdot \cos^2 \varphi - 1)$$

Dabei ist  $\varphi$  der ebene Polarwinkel. Sie können dreimal ableiten und dabei jeweils  $d\varphi/dt = \omega = 2\pi/T = 0,225\text{mHz}$  einsetzen, denn  $\omega$  ändert sich kaum:

$$(d/dt)^3 D_{yy} = 24\mu \cdot r^2 \cdot \omega^3 \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi$$

Vereinfachend können die Schülerinnen und Schüler annehmen, dass die vier Quadrupolelemente gleich groß sind. Damit können sie die Energieänderung pro Zeit bestimmen:

$$dE/dt = G/(9c^5) \cdot [(d/dt)^3 D_{yy}]^2 = 64G\mu^2 \cdot r^4 \cdot \omega^6 \cdot \cos^2 \varphi \cdot \sin^2 \varphi / c^5$$

Um die mittlere Energieänderung zu bestimmen, können sie vereinfachend über den ebenen Polarwinkel mitteln, wobei  $\langle \cos^2 \varphi \cdot \sin^2 \varphi \rangle = 1/8$  ist und erhalten so den Betrag der mittleren Energieabnahme pro Zeit:

$$\langle dE/dt \rangle = 8G\mu^2 \cdot r^4 \cdot \omega^6 / c^5$$

Gemessen wurde die Änderung der Periodendauer  $dT/dt = 2,4 \cdot 10^{-12}$ . Mit dem obigen Zusammenhang von  $T$  und  $r$  können sie  $(dT/dt)/T = 1,5(dr/dt)/r$  feststellen. Weiter können sie mit dem obigen Energieterm  $E = -0,5 \cdot G \cdot m_1 \cdot m_2 / r$  der Bahnbewegung  $(dr/dt)/r = -(dE/dt)/E$  ermitteln. Einsetzen ergibt:

$$(dT/dt) = -1,5 T/E \cdot \langle dE/dt \rangle = 0,25 \cdot 10^{-12}$$

Das Ergebnis trifft in etwa die Größenordnung. Das kommt durch die vereinfachende Gleichsetzung von Quadrupolelementen, die vereinfachende Mittelung über den ebenen Polarwinkel sowie durch die Vernachlässigung der Bahnexzentrizität von  $e = 0,62$ . Die Bahnexzentrizität führt zu dem Faktor (s. [4], S. 423-425):

$$(1 + 73/24 e^2 + 37/96 e^4)/(1 - e^2)^{3.5}$$

Mit diesem Faktor ist  $(dT/dt) = 3,1 \cdot 10^{-12}$ . Die verbleibende Abweichung von 29% können die Schülerinnen und Schüler auf unter 1% senken (s. Abb. 14), wenn sie mit Hilfe eines entsprechenden Abschnitts im Buch von Landau und Lifschitz die übrigen Näherungen durch ausführliche Berechnungen ersetzen (s. [4], S. 423-425).

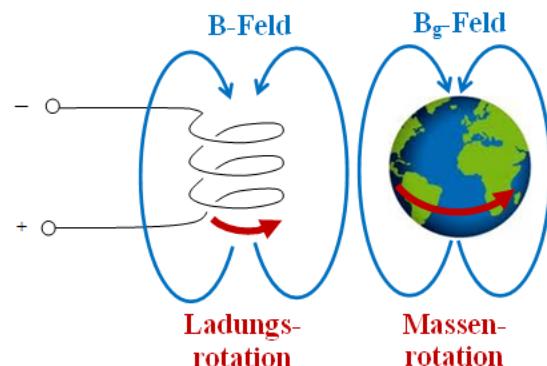
## 19. Erdrotation

In den Abschnitten zu Gravitationswellen habe ich gezeigt, wie Schülerinnen und Schüler auf elementare Weise erkennen können, dass beschleunigte Massen die Metrik verändern. In den folgenden Abschnitten 21-14 zur Erdrotation stelle ich eine einfache Möglichkeit vor, durch die Schülerinnen und Schüler entdecken können, dass schon eine Rotation eines Körpers um die eigene Achse die Metrik ändert. Diese Behandlung Raumkrümmung ist didaktisch besonders wertvoll, weil sie einer Untergeneralisierung entgegen wirkt, eine Strukturgleichheit nutzt und aufdeckt und so eine hohe Lernwirksamkeit erwarten lässt [13-15].

## 20. Erdrotation: Metrik

Die Schülerinnen und Schüler wissen, dass die europäischen Weltraumraketen in Französisch Guyana gestartet werden. Sie können den Grund dafür angeben: Das Land liegt dicht am Äquator und hat daher eine hohe Bahngeschwindigkeit der Erdrotation. Diese wird als Anfangsgeschwindigkeit der Rakete genutzt. So wird Energie gespart.

An diesem Beispiel erkennen die Schülerinnen und Schüler, dass die Erdrotation die Fluchtgeschwindigkeit verändert. Damit verändert sich auch der Schwarzschildradius. Somit verändert die Erdrotation die Metrik in der Nähe der Erde. Anscheinend ist die Metrik in der Umgebung eines Himmelskörpers abhängig von dessen Drehgeschwindigkeit.



**Abb.15:** Das magnetische B-Feld (links) kennen die Schülerinnen und Schüler gut. Bewegte Massen ändern die Metrik. Das können die Lernenden bei relativ geringer Geschwindigkeit und niedriger Gravitationsfeldstärke durch das strukturgleiche  $B_g$ -Feld leicht verstehen und handhaben. Das  $B_g$ -Feld wird auch gravito-magnetisches Feld genannt. Es ist aber nicht magnetisch, sondern lediglich mathematisch strukturgleich zum magnetischen B-Feld.

## 21. Erdrotation: Strukturgleichheit

Man könnte die Wirkung der Erdrotation mit der so genannten Kerr-Metrik beschreiben (s. [4], S. 384-393). Hier sollen aber aktuelle Beobachtungsdaten des Satelliten *Gravity Probe B* (s. Abb. 16 und [16]) modelliert werden. Hierfür gibt es einen einfacheren Zugang:

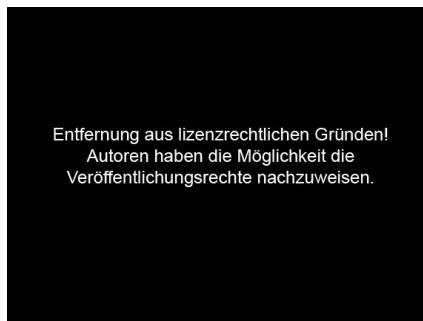
Die Schülerinnen und Schüler wissen, dass das magnetische Feld  $B$  durch die bewegte Ladung  $Q$  erzeugt wird, wogegen das elektrische Feld  $E$  durch die ruhende Ladung  $Q$  erzeugt wird. Die Gravitationsfeldstärke  $g = GM/r^2$  ist formal strukturgleich zur elektrischen Feldstärke  $E = 1/(4\pi\epsilon_0) \cdot Q/r^2$ . Entsprechend könnte es ein zum B-Feld strukturgleiches  $B_g$ -Feld geben (s. Abb. 15). Diese Idee wurde bereits im Jahr 1893 von Heavyside vorgeschlagen (s. [17-20]). Inzwischen wurde gezeigt, dass ein solches  $B_g$ -Feld aus der Einstein-Gleichung folgt für Felder mit geringer Gravitationsfeldstärke, die sich als retardierte Potenziale darstellen lassen (s. z. B. [17-20]). Die Schülerinnen und Schüler können mit ihren Kennt-

nissen des B-Feldes die Struktur des  $B_g$ -Feldes wie folgt nachvollziehen und anwenden.

## 22. Erdrotation: Felderzeugung

Die Schülerinnen und Schüler kennen die Erzeugung eines B-Feldes durch eine Spule mit einer Länge  $L$ , durch die ein Strom mit einer Stromstärke  $I$  fließt. Mit der magnetischen Feldkonstante  $\mu_0$  und einer Windung gilt für das B-Feld  $B = \mu_0 I/L$ .

Die Schülerinnen und Schüler folgern, dass zur Erzeugung des  $B_g$ -Feldes statt der Ladung die Masse kreisen muss. Das wird bei der Erdrotation durch die Kreisfrequenz  $\omega$  und das Trägheitsmoment  $\Theta = 0,4 \cdot M_E \cdot R_E \cdot 0,83$  beschrieben. Hierbei fasst der Faktor 0,83 Inhomogenitäten der Kugel zusammen (s. [22], S. 7). In einem Abstand  $R$  vom Mittelpunkt beträgt das  $B_g$ -Feld  $B_g = G^{0,5}/(2c) \cdot \Theta \cdot \omega / R^3$  (s. [17-20], S. 2). Denn auch in der Magnetostatik nimmt das B-Feld in großer Entfernung proportional zu  $R^{-3}$  ab. Genau genommen hängt der Proportionalitätsfaktor  $G^{0,5}/(2c)$  ein wenig vom Breitengrad ab. Diese geringe Abhängigkeit wird im Folgenden vernachlässigt. Hier ist  $G$  Newtons Gravitationskonstante und  $c$  die Lichtgeschwindigkeit.



**Abb.16:** Der Satellit *Gravity Probe B*: Start 2004. Ergebnisse: Kreisel präzedieren mit 6,6 Bogensekunden pro Jahr aufgrund der durch die Erdrotation verursachten Raumkrümmung sowie um 39,2 Millibogensekunden pro Jahr entsprechend dem Lense-Thirring-Effekt. Hier wird die zweite Erscheinung durch das  $B_g$ -Feld erklärt.

## 23. Erdrotation: Präzession

Die Schülerinnen und Schüler kennen die Präzession eines Kreisels. Sie kennen auch die Kernspintomographie. Dabei ist der Atomkern der Kreisel, der im Magnetfeld des Kernspintomographen eine Präzession ausführt. Sie erfahren durch geeignetes Informationsmaterial, dass die Kreisfrequenz  $\Omega$  dieser Präzession proportional zu  $B$  ist:  $\Omega = \gamma \cdot B$ . Dabei nennt man den Proportionalitätsfaktor  $\gamma$  das gyromagnetische Verhältnis. Bei der Gravitation beträgt das mittlere gyromagnetische Verhältnis  $\gamma = G^{0,5}/c$ . Man kann  $\gamma$  mithilfe des magnetischen Moments herleiten. Dabei hängt  $\gamma$  vom aktuellen Breitengrad des Satelliten ab und ist bereits entlang sei-

ner Flugbahn über diese Breitengrade gemittelt [18]. Eine konkrete Berechnung des Proportionalitätsfaktors erscheint zum grundlegenden Verständnis nicht unbedingt nötig.

Mit dieser Analogie zum Kernspintomographen können die Schülerinnen und Schüler die Kreisfrequenz der Präzession eines Kreisels, der sich in einem Abstand  $R$  vom Erdmittelpunkt befindet herleiten. Dazu setzen sie den Term für  $B_g$  ein und erhalten:  $\Omega = \gamma \cdot B_g = G^{0,5}/c \cdot G^{0,5} \cdot \Theta \cdot \omega / (2c \cdot R^3) = 0,5 \cdot G \cdot \Theta \cdot \omega / (c^2 \cdot R^3)$ .

Mit diesem Ergebnis analysieren sie die Präzession eines Kreisels im Satelliten *Gravity Probe B* mit der Flughöhe 649 km. Mit der Erdmasse  $6 \cdot 10^{24}$  kg und dem Erdradius 6378 km erhalten sie das Trägheitsmoment  $\Theta = 8,07 \cdot 10^{37}$  kg·m<sup>2</sup>. Mit der Umlaufdauer von 24 Stunden erhalten sie die Kreisfrequenz  $\omega = 72,7$  µHz. Einsetzen ergibt  $\Omega = 0,5G/c^2 \cdot \Theta \cdot \omega / R^3 = 40,8$  Millibogensekunden pro Jahr. Bei diesem Satelliten wurde die Kreisfrequenz  $\Omega = 37,2 \pm 7,2$  Millibogensekunden pro Jahr gemessen (s. [18] S. 15).

Der Satellit *Gravity Probe B* hat eine weitere Präzession, die so genannte geodätische Präzession, von 6,6 Bogensekunden pro Jahr gemessen [18]. Auch diese beruht auf der Erdrotation und kann durch das  $B_g$ -Feld erklärt werden [17-20]. Allerdings ist hier bei die Lernbarriere durch eine benötigte Transformation des Bezugssystems ein wenig erhöht.

## 24. Einsteingleichung

Die von den Schülerinnen und Schülern auf elementare Weise entwickelten Kompetenzen zur allgemeinen Relativitätstheorie sind direkt *anschlussfähig*. Das begründe ich dadurch, dass ich zeige, wie man aus den behandelten Beispielen die Einsteingleichung entwickeln kann.

Die oben entwickelte Schwarzschildmetrik legt das Konzept der gekrümmten Raumzeit nahe. Zugeleich liefert sie dessen Beschreibung durch den metrischen Tensor.

Aus der obigen Analyse der Gravitationsfeldstärke  $g$  lässt sich zunächst die Einsteingleichung für kleine Abweichungen vom flachen Raum (s. z. B. [3], [4] oder [17-20]) wie folgt entwickeln: In großer Entfernung einer Masse  $M$  ist die Gravitationsfeldstärke:

$$g = - G \cdot M / r^2$$

Erweitern mit  $4\pi r^2$  ergibt:

$$4\pi gr^2 = - 4\pi GM$$

Diese beiden Terme lassen sich wie üblich als Oberflächen- bzw. Volumenintegral sowie mit der Massendichte  $\rho$  deuten:

$$\int g dA = - 4\pi G \int \rho dV$$

Diese Gleichung lässt sich wie üblich mithilfe des Nablaoperators differenziell darstellen:

$$\nabla g = - 4\pi G \rho$$

Mithilfe der obigen Analyse der Dehnungen  $\epsilon$  ist die Gravitationsfeldstärke  $g = - \epsilon' c^2$ . Also wird das Gra-

vitationspotenzial  $\varphi$  wegen  $g = -\varphi^c$  wie folgt identifiziert:

$$\varphi = \varepsilon \cdot c^2$$

Die Raumdehnungen entsprechen also im Wesentlichen dem Gravitationspotenzial. Hier ist ein Vergleich mit der Werkstoffkunde interessant. Da das Potenzial im Wesentlichen die Spannungen darstellt, so ist die für das Material charakteristische Spannungs-Dehungs-Relation beim Raum im Wesentlichen durch den Faktor  $c^2$  gegeben. Gemäß der oben entwickelten Gleichung  $\varepsilon = 0,5 h_{yy}$  ist das Potenzial  $\varphi = 0,5c^2 h_{yy}$ . Einsetzen in  $\nabla g = -4\pi G p$  ergibt:

$$\nabla^2 h_{yy} = 8\pi G p / c^2$$

Mit der Äquivalenz von Energie und Masse,  $E = mc^2$ , ist  $p/c^2$  gleich der Energiedichte  $E/V$ . Damit ist:

$$\nabla^2 h_{yy} = 8\pi G / c^4 \cdot E/V$$

Die Gravitationswelle entspricht der oben entwickelten Wellengleichung  $1/c^2 \partial_t^2 h_{yy} - \partial_x^2 h_{yy} = 0$ . Wird die Welle durch eine Masse oder Energie erzeugt, so sollte ein entsprechender Term statt der null auf der rechten Seite der Gleichung stehen. Auch sollte für den stationären Fall die obige Gleichung  $\nabla^2 h_{yy} = 8\pi G / c^4 \cdot E/V$  entstehen. Diese beiden Forderungen erfüllt die Gleichung:

$$1/c^2 \partial_t^2 h_{yy} - \nabla^2 h_{yy} = -8\pi G / c^4 \cdot E/V$$

Entsprechend der Schwarzschildmetrik sollte die obige Gleichung zu einer tensoriellen Gleichung verallgemeinert werden. Dazu wird das Tensorelement  $h_{yy}$  durch  $h_{ij}$  ersetzt. Auch wird anstelle der Energiedichte  $E/V$  der Energie-Impuls-Tensor  $T_{ij}$  verwendet. Da die Gravitationswelle zwei unabhängige Polarisierungen hat, wird die Energiedichte verdoppelt. Das ergibt die Gleichung:

$$1/c^2 \partial_t^2 h_{ij} - \nabla^2 h_{ij} = -16\pi G / c^4 \cdot T_{ij}$$

Dieses ist die Einsteingleichung für den Fall kleiner Abweichungen  $h_{ij}$  vom flachen Raum (s. z. B. [25]).

Aus dieser Gleichung lässt sich die Einsteingleichung durch folgende Überlegung entwickeln. Die übliche Geometrie nach Euklid wurde durch Gauss und Riemann durch das Zulassen von Raumkrümmung verallgemeinert. Dazu wurde neben dem metrischen Tensor der Riemannsche Krümmungstensor  $R_{ijkl}$  verwendet. Man sucht nun eine Gleichung, die für kleine Abweichungen  $h_{ij}$  zu der obigen Gleichung führt und durch den Krümmungstensor ausgedrückt wird. Dazu muss die Stufe von vier auf zwei durch Verjüngung verringert werden. Die einzige Möglichkeit bieten der Riccitensor  $R_{ij}$  und der Krümmungsskalar  $R$  (s. z.B. [3], S. 62). Eine Gleichung aus diesen beiden Größen, die bei kleinen Abweichungen  $h_{ij}$  in die obige übergeht ist:

$$R_{ij} - 0,5R g_{ij} = -8\pi G / c^4 \cdot T_{ij}$$

Das ist die allgemeine Einsteingleichung.

Ein solcher Zugang zur Einsteingleichung über elementar entwickelte Zwischenergebnisse verspricht eine hohe Lernwirksamkeit (s. z. B. [26], [27] und [28]). Beispielsweise entsteht hierbei eine hohe Effektstärke von  $d = 1,32$  durch das Wiedererkennen bekannter Strukturen durch die Lernenden. Auch entsteht hierbei eine hohe Effektstärke von

$d=1,17$  durch den Einsatz von Heuristiken. Auch werden die Lernenden hier von Anfang an dazu befähigt selbstständig mit Symbolen erfolgreich zu experimentieren und können so eine Effektstärke von  $d = 0,89$  erreichen. Dagegen ist ein Zugang, der direkt von der Einsteingleichung ausgeht, auf längere Phasen von rezeptivem Lernen angewiesen, es sei denn, die Lernenden kennen bereits wesentliche Komponenten der allgemeinen Relativitätstheorie. Das lässt selbst beim Einsatz von Advance Organizers nur eine Effektstärke von  $d = 0,41$  erwarten. Der vorgestellte Zugang ist auch deshalb Erfolg versprechend, weil er Prinzipien des exemplarischen und genetischen Lernens berücksichtigt [29].

## 25. Möglichkeiten und Grenzen des vorgeschlagenen Zugangs

Für die **Schwarzschildmetrik** bietet der vorgestellte Zugang den Schülerinnen und Schülern eine *einfache und anschauliche Herleitung* (s. Abb. 17), wogegen bisherige Ansätze im Rahmen der Schulmathematik teils grobe Näherungen einführen [5]. Durch die Separation der vierdimensionalen Raumzeit in vier einzelne Dimensionen, in denen die jeweilige Schwarzschildmetrik zunächst eindimensional bestimmt wird, wird eine besonders einfache und zugleich exakte Herleitung möglich, wogegen die üblichen Zugänge den aufwändigen Weg über die vierdimensionale Differentialgeometrie und Tensoralgebra wählen [2-4].

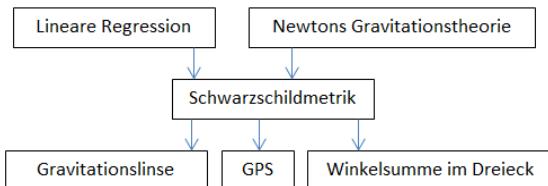


Abb.17: Lernstruktur zur Schwarzschildmetrik: Einfach und unkompliziert.

Selbstverständlich gilt die hier entwickelte Schwarzschildmetrik für das *Zentralkraftproblem* und ersetzt daher nicht die auf beliebige Massenverteilungen anwendbare Einstein-Gleichung. Dennoch kann man wohl sagen, dass das hier gelöste Zentralkraftproblem die am häufigsten untersuchte und angewandte Lösung der Einstein-Gleichung ist.

Unter einer „exakten Herleitung“ versteh ich hier, dass man von einer sachgemäßen geometrischen Beschreibung ausgeht. Das ist hier der metrische Tensor und bei den üblichen Herleitungen zusätzlich der Krümmungstensor [2-4]. Die Dynamik wird dadurch eingeführt, dass nur Terme mit möglichst niedrigen Exponenten betrachtet werden. Das geschieht hier durch lineare Regression. Das Ergebnis ist die richtige Schwarzschildmetrik.

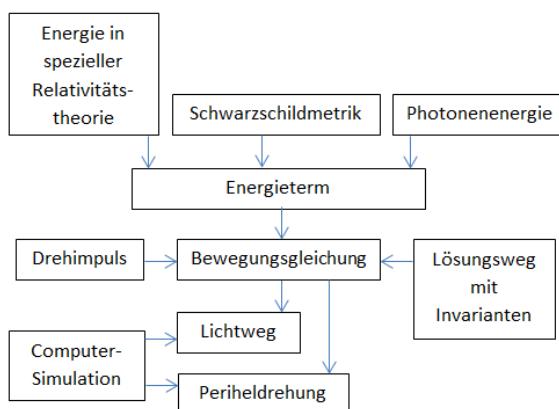
Die Herleitung beruht auf dem *newtonschen Gravitationsgesetz*. Genutzt werden die zwei Grenzwerte, die Kräftefreiheit im Unendlichen und der Lichteinfang am bereits 1784 von John Mitchell hergeleiteten schwarzen Loch (s. [21] S. 319).

Interessant ist, dass zur Entwicklung der Schwarzschildmetrik durch Regression schon die *lineare Regression* genügt. Zu untersuchen bleibt, inwieweit diese Linearität zur Entwicklung weiterer Lösungen genutzt werden kann. Festzustellen bleibt ferner, inwieweit das lineare Verfahren Lösungen zu offenen Fragen der Gravitation, beispielsweise zur Flyby-Anomalie [22,23], ermöglicht.

Anhand der Schwarzschildmetrik können die Schülerinnen und Schüler bereits aussagekräftige *quantitative Tests* nachvollziehen, beispielsweise die Uhren in Satelliten des GPS-Systems oder die Shapiro-Verzögerung (s. [11], S. 42).

Bei diesem Zugang werden die räumlichen und zeitlichen *Koordinaten mithilfe des Beschleunigungssensors gedeutet*: Mit einem im Bezugssystem des Himmelskörpers ruhenden Beschleunigungssensor lässt sich im Prinzip die Gravitationsfeldstärke und damit die Änderung  $\epsilon'$  der Dehnung  $\epsilon$  messen. Durch Messung von  $\epsilon'$  an mehreren Stellen  $r$  lässt sich  $\epsilon(r)$  extrapoliieren und integrieren. Mit  $\epsilon$  lässt sich das Verhältnis der Länge  $d\sigma$  und der Koordinate  $dr$  bestimmen sowie das Verhältnis der Zeit  $dt$  und der Koordinate  $dt$ . Dagegen verzichten klassische Lehrbücher auf eine konkrete Deutung der Koordinaten (s. z. B. [24] S. 246), Stephani schreibt beispielsweise „r und t sind nur Koordinaten und haben keine unmittelbare physikalische Bedeutung“ (s. [4], S. 103). Der Beschleunigungssensor, der den Schülerinnen und Schülern durch Smartphones verfügbar und auch im Innenohr [25] verankert ist, ermöglicht eine unmittelbare Deutung der Koordinaten für den Fall der Sensoranzeige null. Das kann den Lernprozess erleichtern.

Hier habe ich die übliche *Einstein-Interpretation* verwendet. Im Prinzip wäre eine ähnliche Herleitung vermutlich auch im Rahmen der Lorentz-Interpretation möglich [24].



**Abb.18:** Lernstruktur zu Flugbahnen: Im Prinzip elementar, es werden verallgemeinerbare Kompetenzen zu Erhaltungsgrößen entwickelt.

Aufbauend auf der Schwarzschildmetrik können die Schülerinnen und Schüler die **Dynamik eines Objekts in der Schwarzschildmetrik** analysieren. Hierzu können sie den üblichen *Energieterm elementar herleiten*.

Mit Hilfe des Energieterms können die Schülerinnen und Schüler die übliche *Bewegungsgleichung* für ein Teilchen in der Schwarzschildmetrik herleiten. Daraus sind die *beobachteten Bahnen* mit Hilfe einer einfachen Computersimulation oder durch Anwendung eines Computeralgebrasystems ermittelbar. Dadurch werden den Schülerinnen und Schülern *weitere genaue Tests* der allgemeinen Relativitätstheorie zugänglich.

Dieses Thema wird auch elementar behandelt und gut transferierbare Kompetenzen zu Invarianten werden entwickelt. Allerdings sind diese Kompetenzen relativ anspruchsvoll (s. Abb. 18). Daher erscheint diese Thematik eher für die Begabtenförderung geeignet.

Die Anwendung des elementaren Herleitungsverfahrens auf **Gravitationswellen** ist aus drei Gründen besonders interessant: Während die elementar hergeleitete Schwarzschildmetrik nur den Raum in der Umgebung einer Masse beschreibt, wurde zur Erklärung der Gravitationswellen die Dynamik der Raumdehnung *im Vakuum* elementar hergeleitet. In der Folge wurde diese Dynamik am Beispiel der vom Pulsardoppelstern B1913+16 ausgehenden Gravitationswellen (s. [11], S. 58-63) getestet.

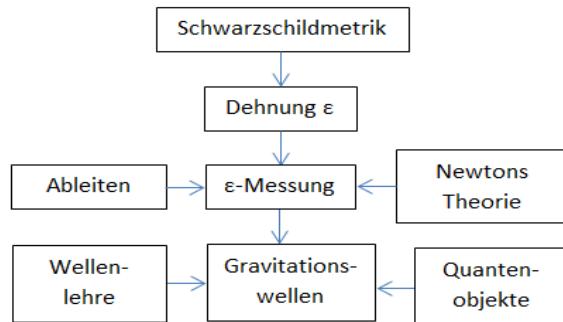
Die Einführung der Gravitationswellen ist elementar und unkompliziert (s. Abb. 19). Dagegen erscheint der Nachweis der Gravitationswellen wegen der nötigen Feldenergiedichte und Quadrupolstrahlung relativ komplex und daher eher für die Begabtenförderung geeignet (s. Abb. 20).

Die Analyse der durch **Rotation veränderten Metrik** ist für die Schülerinnen und Schüler besonders einfach, weil eine Strukturgleichheit zur bekannten Magnetostatik besteht. Das Thema ist besonders interessant, weil es empirische Tests gibt und weil es eine für die Schülerinnen und Schüler völlig unerwartete Eigenschaft der Schwerkraft verdeutlicht.

Eine weitere wichtige Anwendung der allgemeinen Relativitätstheorie ist die **Dynamik des Urknalls**. Auch diese lässt sich aus der newtonschen Gravitationstheorie gewinnen [21] und für den Unterricht elementarisieren [26,27]. Ein aktueller Bericht hierzu erscheint ebenfalls in dieser Ausgabe [27] und beschreibt auch die von Schülern durchgeführte theoretische Deutung der aktuellen und mit dem Physiknobelpreis 2011 ausgezeichneten Beobachtung der beschleunigten Expansion des Weltalls [28]. Zudem wird beschrieben, wie Schüler die beim Urknall wesentliche Robertson-Walker-Metrik elementar hergeleitet haben [27]. Die Urknall-Thematik konnte ich auch im regulären Unterricht mit großem Erfolg einsetzen [26]. Das führt mich auf das große allgemeine Interesse am Urknall zurück.

Insgesamt können die hier dargestellten elementaren Herleitungen der Schwarzschildmetrik, der Flugbahnberechnung von Objekten in der Schwarzschildmetrik, der Gravitationswellen sowie der Met-

riken in der Nähe rotierender Körper als Teil der Tradition der Gewinnung von Ergebnissen der allgemeinen Relativitätstheorie direkt aus der einfachen newtonschen oder der maxwellschen Theorie aufgefasst werden. Auch für die Dynamik des Urknalls ist eine solche elementare Herleitung im Unterricht erprobt [27]. Eine Besonderheit der elementaren Herleitung der Schwarzschildmetrik besteht darin, dass sie auch sehr große Gravitationsfeldstärken exakt beschreibt.



**Abb.19:** Lernstruktur zu Gravitationswellen: Einfach und unkompliziert.

## 26. Erfahrungen aus dem Unterricht

Eine **Unterrichtseinheit zur Schwarzschildmetrik** (Abschnitte 1-7) wurde in einer Arbeitsgemeinschaft für Astronomie erprobt. Die Schülerinnen und Schüler waren in den Klassenstufen 10-12 und kannten bereits die newtonsche Gravitationsgleichung sowie das Verfahren der linearen Regression. Erwartungsgemäß war das Interesse an dem Thema sehr groß und die Schüler arbeiteten konzentriert. Sie erfassten schnell die jeweils gestellten Probleme. In anschließenden Plenumsphasen der Ideenfindung machten sie zielführende Vorschläge, die durch Aushandeln in Lösungsansätze überführt wurden. Auf dieser Basis arbeiteten die Schüler die jeweiligen Lösungen weitgehend selbstständig aus, wobei binnendifferenzierend individuelle Lernhilfen erteilt wurden. Die Schülerinnen und Schüler präsentierten ihre jeweiligen Lösungen ausführlich an der Tafel und stellten sich der Diskussion im Plenum.

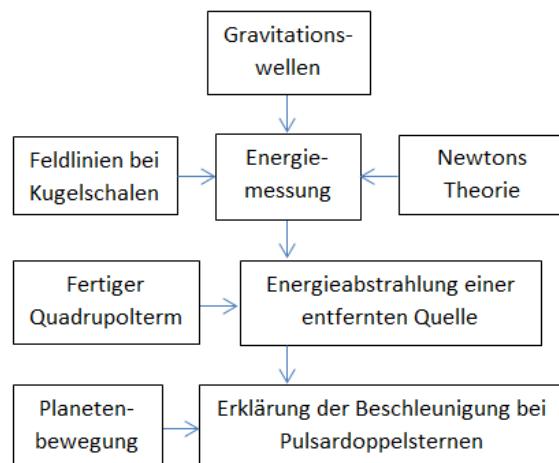
Damit der Unterricht offen für verschiedene Reaktionen der Lerngruppe durchgeführt werden konnte, wurden verschiedene Lernhilfen vorbereitet, siehe Anhang.

Die Erprobung dieser Unterrichtseinheit zeigt, dass Schülerinnen und Schüler der Klassenstufen 10-12 die Schwarzschildmetrik aus der newtonschen Mechanik weitgehend selbstständig entwickeln können, wenn sie die vier Dimensionen der Raumzeit separat behandeln. Dabei entwickeln sie die grundlegende Dynamik wie üblich durch Regression mit möglichst niedrigen Exponenten.

Anschließend konnten die Schüler ihre selbstentwickelte Schwarzschildmetrik auf ein geometrisches Problem und ein Navigationsproblem anwenden.

Die Abschnitte 9 bis 12 zu **Flugbahnen** wurden bis auf die Herleitung der Bewegungsgleichung in

der Arbeitsgemeinschaft für Astronomie und teils in Physikleistungskursen erprobt. Die Herleitung der Bewegungsgleichung dürfte für die Schülerinnen und Schüler im Prinzip eine ähnliche Lernbarriere darstellen wie die Entdeckung der Schwarzschildmetrik. Denn in beiden Fällen eröffnet die Separation der Dimensionen einen Zugang mit einfachen eindimensionalen Funktionstermen. Allerdings sind die auftretenden Berechnungen bei der Flugbahnberechnung etwas komplexer als bei der Bestimmung der Metrik. Die verwendeten Ergebnisse der speziellen Relativitätstheorie und der Computersimulation wurden bereits mit Schülerinnen und Schülern erfolgreich getestet.



**Abb.20:** Lernstruktur zum indirekten Nachweis von Gravitationswellen: Im Prinzip ist das Vorgehen elementar. Die mögliche Herleitung des Quadrupolterms ist allerdings aufwändig.

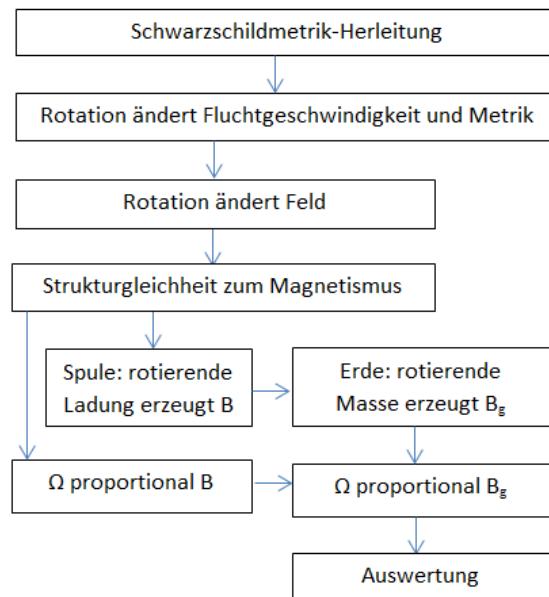
Zu den Abschnitten 13 bis 19 zu **Gravitationswellen** liegen Erfahrungen zur Analyse des Pulsardoppelsterns B1913 + 16 aus dem Bereich der Arbeitsgemeinschaft für Astronomie vor. Das Thema wurde relativ selbstständig von zwei Schülern bearbeitet, die später beide Physik studierten. Die Ergebnisse wurden der gesamten Arbeitsgemeinschaft und der Öffentlichkeit auf einem Astronomieabend in der Aula vorgestellt. Das Thema stieß auf allgemeines Interesse und erweiterte den Horizont der Zuhörerinnen und Zuhörer. Durch die hier vorgestellte grundlegende Herleitung der Gravitationswellen mit einfachen Mitteln kann das Thema Pulsar-Doppelsterne in Zukunft im Bereich der Begabtenförderung sehr viel umfassender und für die Beteiligten befriedigender behandelt werden.

Es ist zu erwarten, dass das Thema **Metrik bei rotierenden Körpern** als Anwendung der Magnetostatik die Schülerinnen und Schüler interessieren kann. So habe ich die Erfahrung gemacht, dass auch der Geodynamo als Anwendung der Magnetostatik für Schülerinnen und Schüler interessant ist. Auch arbeitet ein Jugend forscht Team an diesem Thema.

Mit dieser Thematik werden viele für das Leben grundlegende exemplarische [29] **Kontexte** ange- sprochen. Beispiele sind der Raum, die Zeit, die Entstehung der Welt beim Urknall, die Beschleuni-

gung, die Trägheit, die Schwerkraft, die Masse, die Energie und die Drehung. Auch werden viele Alltagskontakte berührt, beispielsweise der Beschleunigungssinn im Innenohr, das GPS, der Kreisel, die Überprüfung der Geradlinigkeit beim Hausbau durch Laser, die elastische oder plastische Dehnung von Werkstoffen oder die Abstrahlung von Wellen durch eine lokale Quelle, beispielsweise ein Handy.

Mit dieser Thematik werden viele **Kompetenzen** entwickelt. Beispiele sind die Erkenntnisgewinnung durch Beobachtung, Modellierung sowie Mathematisierung. Weitere geförderte Kompetenzen sind das Problemlösen, das Argumentieren, das Auswerten, das Planen, dass Arbeiten mit Analogien und Strukturgleichheit, das Bilden von Begriffen, das Beschreiben von Erkenntniswegen, das Arbeiten mit Computersimulationen, das Arbeiten mit Computeralgebrasystemen sowie das räumliche Denken.



**Abb.21:** Lernstruktur zur Metrik bei rotierenden Körpern. Im Prinzip ist das Vorgehen elementar und es gibt kaum Lernbarrieren, sofern die Schülerinnen und Schüler die Lernvoraussetzungen aus der Magnetostatik mitbringen.

## 27. Zusammenfassung

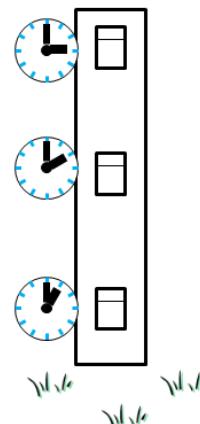
Es wurde eine innovative Herleitung der Schwarzschildmetrik einschließlich des Energieterms und der Bewegungsgleichungen für massive sowie masselose Teilchen vorgestellt. Diese Herleitung ist besonders einfach, weil die vier Dimensionen der Raumzeit separat behandelt werden. Auch ist dieser Zugang begrifflich besonders konkret, weil die Koordinaten durch die Anzeige des Beschleunigungssensors eingeführt und gedeutet werden. Die vorgestellte Einführung der Schwarzschildmetrik wurde bei Schülerinnen und Schülern der Klassenstufen 10-12 erfolgreich erprobt. Die Schüler benötigten als besondere Lernvoraussetzung lediglich die Kenntnis der newtonischen Gravitationsgleichung. Sie konnten bereits bei der Herleitung relativ eigenständig mitwirken. Auch konnten sie anschließend selbstständig

Probleme der Geometrie, der Satellitennavigation sowie Bahnberechnung im gekrümmten Raum lösen. Somit konnten sie verschiedene quantitative Tests der allgemeinen Relativitätstheorie von der Herleitung bis zur Berechnung beobachteter Werte nachvollziehen.

Das Lösungsverfahren ist auch deshalb so einfach, weil es durch lineare Regression zur exakten Metrik führt.

Aufbauend auf dem Lösungsverfahren zur Schwarzschildmetrik wurden in elementarer Weise die Bahnbewegungen von Objekten in der Schwarzschildmetrik, die Gravitationswellen sowie die Metriken in der Nähe rotierender Körper behandelt. Für alle behandelten Fälle wurden exakte Gleichungen hergeleitet, quantitative Vergleiche mit Beobachtungsdaten durchgeführt sowie im Unterricht einsetzbare Konzepte und Lernmaterialien entwickelt.

Es wurde konkret gezeigt, wie das vorgestellte Konzept einen elementaren und einfachen Zugang zur Einstiegleichung bietet. Es wurde durch Ergebnisse der Lernforschung begründet, dass die präsentierte Entwicklung der allgemeinen Relativitätstheorie eine hohe Lernwirksamkeit erwarten lässt.



**Abb.22:** Pound-Rebka-Snyder-Versuch: Nachweis der Raumkrümmung durch die Verkleinerung der Periodendauer elektromagnetischer Wellen im Schwefeld der Erde. Die Zeitstauchung wird durch drei auf Balkonen stehende Uhren veranschaulicht. Die Uhren verwenden nicht die Gravitation, wie es beispielsweise bei einer Pendeluhr oder bei einer Sanduhr der Fall wäre. Je tiefer die Uhr steht, desto weniger weit ist sie gegangen.

## 28. Anhang: Lernhilfe zur Krümmung

Wie kann man die Krümmung der Raumzeit veranschaulichen und experimentell nachweisen?

Das Experiment von Pound und Rebka [30] zeigt, dass eine elektromagnetische Welle auf dem Weg nach unten ihre Periodendauer verkürzt (s. Abb. 22). Im frei fallenden System ist die Periodendauer gleichbleibend. Die Tatsache, dass der Beobachter unten eine verkürzte Periodendauer feststellt, wird dadurch gedeutet, dass er die Uhren zum Vergleich

heranzieht und diese unten verlangsamt gehen. Diese Lernhilfe habe ich eingesetzt.

## 29. Anhang: Lernhilfe zur Messung von r

Man kann für die Umgebung eines Himmelskörpers der Masse  $M$  die Metrik  $g_{rr} = 1/(1 - R_S/r)^{0.5} = 1/(1 - 2GM/[rc^2])^{0.5}$  ermitteln, indem man  $r$  bestimmt. Aber wie bestimmt man  $r$ ?

In großem Abstand vom Himmelskörper ist der Raum kaum gekrümmt. Ist der Himmelskörper ein Stern, so kann man das Spektrum untersuchen und daraus mit Hilfe von Sternmodellen [31] die Leistung  $P$  bestimmen. Der Beobachter kann die Leistungsdichte  $S$  messen. Andererseits verteilt sich die Leistung  $P$  des Sterns gleichmäßig auf eine Kugelfläche  $A = 4\pi r^2$  mit dem Radius  $r$  um den Stern. Somit ist die Leistungsdichte  $S = P/(4\pi r^2)$ . Also ist  $r = (P/[4\pi S])^{0.5}$ . Diese Lernhilfe wurde nicht eingesetzt.

## 30. Anhang: Exakte Herleitung der Bewegungsgleichung für Objekte in der Schwarzschildmetrik

Im Bereich der Begabtenförderung können die Schülerinnen und Schüler die Bewegungsgleichung für Objekte in der Schwarzschildmetrik auch exakt herleiten: Die Schüler kennen eine weitere *Invariante*: Sie wissen, dass die Energie nicht explizit von der Zeit  $t$  abhängt. Daher bietet sich diese Variable als weiterer invarianter verallgemeinerter Impuls an. Zur Nutzung dieses Impulses werden zwei Konventionen eingeführt. Die raumzeitliche Änderung wird  $ds$  genannt und erhält folgende Vorzeichenkonvention:

$$ds^2 = dr^2/(1 - R_S/r) + (r \cdot d\phi)^2 - c^2 dt^2 \cdot (1 - R_S/r)$$

Es wird eine weitere Zeit benötigt: Eine Uhr, welche so kalibriert ist, dass sie die sogenannte *Eigenzeit*  $d\tau$  mit  $-c^2 d\tau^2 = ds^2$  misst, wird als Standarduhr betrachtet ( $d\sigma$  steht für räumliche Ausdehnung,  $ds$  für raum-zeitliche).

Die Schülerinnen und Schüler können nun die Eigenzeit in die Gleichung für  $ds$  einsetzen und erhalten so:

$$-c^2 = (dr/d\tau)^2/(1 - R_S/r) + (r \cdot d\phi/d\tau)^2 - c^2(dt/d\tau)^2 \cdot (1 - R_S/r)$$

Auch können sie  $c^2$  in die Gleichung für die Energie  $E = m_0 \cdot c^2$  einsetzen und erhalten so:

$$E = -m_0 \cdot (dr/d\tau)^2/(1 - R_S/r) - m_0 \cdot (r \cdot d\phi/d\tau)^2 + m_0 \cdot c^2 \cdot (dt/d\tau)^2 \cdot (1 - R_S/r)$$

Da  $E$  nicht von der unabhängigen Veränderlichen  $t$  abhängt, ist in Analogie zum obigen Beispiel der folgende Term ein erhaltener verallgemeinerter Impuls:

$$cdt/d\tau \cdot (1 - R_S/r) = A$$

Um wie in den vorherigen Beispielen eine Bewegungsgleichung durch Ableiten zu erhalten, werden in dem obigen Term für  $-c^2$  die beiden erhaltenen Impulse  $B$  und  $A$  eingesetzt:

$$-c^2 = (dr/d\tau)^2/(1 - R_S/r) + B^2/r^2 - A^2/(1 - R_S/r).$$

Wie oben wird mit  $u = 1/r$  gerechnet, somit ist:

$$-c^2 = B^2 \cdot u^2 / (1 - uR_S) + B^2 \cdot u^2 - A^2 / (1 - uR_S)$$

Multiplikation mit dem Nenner ergibt:

$$-c^2(1 - uR_S) = B^2 \cdot u^2 + B^2 \cdot u^2 - R_S B^2 u^3 - A^2$$

Die Schülerinnen und Schüler übertragen das Verfahren, indem sie diese Funktion von  $\phi$  ableiten:

$$u^2 c^2 R_S = +2B^2 \cdot u \cdot u' - 3R_S B^2 \cdot u^2 \cdot u' + 2B^2 \cdot u' \cdot u''$$

Zur Vereinfachung wird durch  $2B^2 \cdot u'$  geteilt:

$$0,5 R_S \cdot c^2 / B^2 = u - 1,5 R_S u^2 + u''$$

Das ist wieder die übliche Bewegungsgleichung (s. [3], S. 105) für einen Körper in der Schwarzschildmetrik.

## 31. Anhang: Analyse des Dehnungstensors

Im Allgemeinen könnte bei einer Gravitationswelle jedes Element  $g_{ik}$  des metrischen Tensors ungleich null sein. Wir analysieren die metrischen Abweichungen  $h_{ik} = 2\varepsilon_{ik} = \Delta x_i / dx_k$ , siehe oben. Da sich die ebene Welle mit Lichtgeschwindigkeit in  $x$ -Richtung ausbreitet, ändern sich die räumlichen Verlängerungen  $\Delta x_i$  periodisch wie folgt:

$$\Delta x_i = \Delta x_{iA} \cdot \cos(\omega t - 2\pi x/\lambda)$$

Mit der Kettenregel folgt:

$$\Delta x_j / dx = \Delta x_j / dt \cdot dt / dx = \Delta x_j / dt \cdot 1/c$$

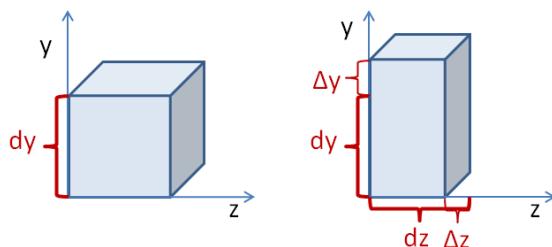
Wir betrachten ein Koordinatensystem, das sich mit der Gravitationswelle mitbewegt, so wie ein Wellenreiter auf der Welle reitet. In diesem System ändern sich die Verlängerungen  $\Delta x_i$  nicht mit der Zeit, kurz  $\Delta x_i / dt = 0$ . Gemäß der obigen Überlegung mit der Kettenregel ändern sich die Verlängerungen dann auch nicht mit der  $x$ -Koordinate, kurz  $\Delta x_i / dx = 0$ . Also sind nur die vier Dehnungen  $\varepsilon_{yy}$ ,  $\varepsilon_{zz}$ ,  $\varepsilon_{zy}$  sowie  $\varepsilon_{yz}$  ungleich null. Wegen der Symmetrie des metrischen Tensors sind die beiden Dehnungen in unterschiedliche Raumrichtungen gleich, kurz  $\varepsilon_{zy} = \varepsilon_{yz}$ .

Für die Berechnung der Energieänderung pro Zeit ist es wichtig, zu wissen, wie viele voneinander unabhängige Polarisationen es gibt. Da die  $z$ -Koordinate abhängig von der  $y$ -Koordinate skaliert werden kann, können die beiden diagonalen Dehnungen  $\varepsilon_{yy}$  und  $\varepsilon_{zz}$  zu einer gemeinsamen Polarisationsrichtung zusammengefasst werden. Dabei ist es üblich die  $z$ -Koordinate so zu transformieren, dass die beiden Dehnungen der diagonalen Raumrichtungen zueinander Gegenzahlen sind, kurz  $\varepsilon_{yy} = -\varepsilon_{zz}$ . Dazu multipliziert man die alte  $z$ -Koordinate mit  $(\Delta z / dz) / (-\Delta y / dy)$  und erhält so die neue  $z$ -Koordinate (s. Abb. 19).

Insgesamt werden die Dehnungen der Gravitationswelle durch die beiden Parameter  $\varepsilon_{yy}$  und  $\varepsilon_{yz}$  vollständig beschrieben. Jedem dieser beiden Parameter ordnet man eine Polarisationsrichtung der Gravitationswelle zu. Daher beschreibt  $\varepsilon_{yy}$  zusammen mit  $\varepsilon_{zz} = -\varepsilon_{yy}$  eine Dehnung in  $y$ -Richtung mit einer Stauung in  $z$ -Richtung (s. Abb. 23). Dabei wechseln sich Dehnungen und Stauungen zeitlich periodisch ab.

Da die Dehnungen nur senkrecht zur Ausbreitungsrichtung auftreten, ist die Gravitationswelle transversal.

Insgesamt entspricht diese Analyse des Dehnungstensors der Gravitationswellen den üblichen Ergebnissen und Konventionen der allgemeinen Relativitätstheorie (s. [4], S. 411-413). Die Dehnung des Vakuums ist ebenso wie die Dehnung eines Werkstoffes ein Tensor zweiter Stufe [12].



**Abb.23:** Polarisation von Gravitationswellen: Eine der beiden Polarisationen ist dadurch gekennzeichnet, dass sich der Raum in y-Richtung dehnt, während er sich in z-Richtung kontrahiert. Dabei breitet sich die Gravitationswellen x-Richtung aus, also in die Zeichenebene hinein. Durch die zeitliche Periodizität wechseln sich Dehnung und Kontraktion regelmäßig ab.

### 32. Anhang: Vergleich der Dynamiken

Die oben hergeleitete Dynamik von Gravitationswellen ist durch die Wellengleichung  $\varepsilon = \varepsilon_A \cdot \sin(\omega t - k \cdot x)$  bestimmt. Die zweite Ableitung nach der Zeit ist  $\partial_t^2 \varepsilon = -\omega^2 \cdot \varepsilon$ . Die zweite Ableitung nach der Ausbreitungsrichtung x ist  $\partial_x^2 \varepsilon = -k^2 \cdot \varepsilon = (k/\omega)^2 \cdot \partial_t^2 \varepsilon = 1/c^2 \cdot \partial_t^2 \varepsilon$ . Das stimmt mit dem Ergebnis der Einsteingleichung über ein (s. [4], S. 411-412).

### 33. Anhang: Vergleich der Energiedichten

Die oben hergeleitete Energiedichte von Gravitationswellen ist durch  $dE/dV = g^2/(4\pi G)$  bestimmt.

Für die Dehnung  $\varepsilon_{yy}$  wurde oben  $d\varepsilon_{yy}/dt = g/c = 0,5 \cdot dh_{yy}/dt$  hergeleitet. Aufgelöst nach dem Quadrat der Gravitationsfeldstärke  $g^2$  folgt  $g^2 = 0,25 \cdot c^2 \cdot [dh_{yy}/dt]^2$ .

Bei der obigen Herleitung der Energiedichte wurde  $g^2$  über eine Kugelschale gemittelt. Zur Berücksichtigung aller vier Dehnungen ist auch hier quadratisch zu mitteln:  $g^2 = 0,25 \cdot c^2 \cdot 0,25 \cdot [[dh_{yy}/dt]^2 + [dh_{zz}/dt]^2 + [dh_{yz}/dt]^2 + [dh_{zy}/dt]^2]$ .

Einsetzen ergibt die folgende Energiedichte:  $(dE/dV) = c^2/(64\pi G) \cdot [[dh_{yy}/dt]^2 + [dh_{zz}/dt]^2 + [dh_{yz}/dt]^2 + [dh_{zy}/dt]^2]$ . Das stimmt mit dem üblichen Ergebnis der allgemeinen Relativitätstheorie überein (s. [4], S. 413).

### 34. Anhang: Quadrupole

Im Bereich der Begabtenförderung oder binendifferenzierend können die Schülerinnen und Schüler die Quadrupoldarstellung der Energiedichte von Gravitationswellen selbst entwickeln:

Das Potenzial der Masse  $M_k$  ist (siehe oben):

$$\varepsilon_k = -G \cdot M_k / a_k \cdot 1/c^2$$

Da der Beobachter weit entfernt ist, gilt für den Abstandsvektor  $a_k = R_k - n_k \cdot r_k$ . Dieser Term wird in das Potenzial eingesetzt:

$$\varepsilon_k = -G \cdot M_k / (R - n \cdot r_k) \cdot 1/c^2$$

Damit die Schülerinnen und Schüler hier eine geometrische Reihe identifizieren können, klammern sie Nenner R aus:

$$\varepsilon_k = -G \cdot M_k / R \cdot 1/[1 - n \cdot r_k \cdot 1/R] \cdot 1/c^2$$

Den zweiten Faktoren können Sie als geometrische Reihe ausdrücken:

$$\varepsilon_k = -G \cdot M_k / R \cdot [1 + n \cdot r_k \cdot 1/R + (n \cdot r_k)^2 \cdot 1/R^2 + \dots]$$

Zur Bestimmung der Gravitationsfeldstärke  $g_k$  wird die zeitliche Ableitung dieses Potenzials verwendet (siehe oben):

$$g_k = c \cdot d\varepsilon_k / dt = -G \cdot M_k / (Rc) \cdot$$

$$d/dt [n \cdot r_k \cdot 1/R + (n \cdot r_k)^2 \cdot 1/R^2 + \dots]$$

Durch die zeitliche Ableitung konnte der erste Summand 1 beseitigt werden.

Zur Bestimmung der gesamten Gravitationsfeldstärke  $g$  summieren die Schülerinnen und Schüler über die Massen  $M_k$  und erhalten so:

$$g = \sum_k g_k = -G/(Rc) \cdot d/dt$$

$$[n \cdot \sum_k M_k \cdot r_k \cdot 1/R + \sum_k M_k \cdot (n \cdot r_k)^2 \cdot 1/R^2 + \dots]$$

Hier können die Schülerinnen und Schüler mithilfe des Hebelgesetzes erkennen, dass der erste Summand gleich null ist. Also stellt der zweite Summand den größten Term der geometrischen Reihe dar. Die weiteren Terme sind vernachlässigbar, weil der Abstand R sehr groß ist:

$$g = -G/(cR^3) \cdot d/dt \sum_k M_k \cdot (n \cdot r_k)^2$$

Die Schülerinnen und Schüler können hier die üblichen Quadrupole einführen, indem sie das Produkt  $n \cdot r_k$  durch die kartesischen Komponenten  $x_i$  darstellen:

$$\sum_k M_k \cdot (n \cdot r_k)^2 = \sum_k M_k \cdot (\sum_i n_i \cdot r_{ki})^2 =$$

$$\sum_k M_k \cdot \sum_{ij} n_i \cdot n_j \cdot r_{ki} \cdot r_{kj} =$$

$$\sum_{ij} n_i \cdot n_j \sum_k M_k \cdot r_{ki} \cdot r_{kj}$$

Um den üblichen Term für die Quadrapole zu erhalten, wird mit 3 erweitert:

$$\sum_k M_k \cdot (n \cdot r_k)^2 = 1/3 \cdot \sum_{ij} n_i \cdot n_j \sum_k 3M_k \cdot r_{ki} \cdot r_{kj}$$

Um den üblichen Term für die Quadrapole zu erhalten, wird wie oben die z-Koordinate so transformiert, dass  $\sum_k M_k \cdot \sum_{ij} \delta_{ij} r_{ki} \cdot r_{kj} = \sum_k M_k \cdot r_k^2 = \sum_k M_k \cdot (x_k^2 + y_k^2 + z_k^2)$  gleich null ist. Dann kann  $\delta_{ij} r_{ki} \cdot r_{kj}$  in der obigen Summe subtrahiert werden und man erhält:

$$\sum_k M_k \cdot (n \cdot r_k)^2 =$$

$$1/3 \cdot \sum_{ij} n_i \cdot n_j \sum_k M_k \cdot (3r_{ki} \cdot r_{kj} - r_k^2 \delta_{ij})$$

Hier können die Schülerinnen und Schüler die oben eingeführten Quadrapole erkennen und erhalten so:

$$\sum_k M_k \cdot (n \cdot r_k)^2 = 1/3 \cdot \sum_{ij} n_i \cdot n_j D_{ij}$$

Durch Einsetzen ermitteln sie für die Gravitationsfeldstärke den folgenden Term:

$$g = -G/(3cR^3) \cdot \sum_{ij} n_i \cdot n_j d/dt D_{ij}$$

Da dieser Term mit  $R^3$  abklingt, könnte man in großer Entfernung praktisch keine Gravitationswellen beobachten. Den in großem Abstand dominanten Term können die Schülerinnen und Schüler durch

die Analyse der retardierten Potenziale wie folgt ermitteln: Für den Beobachter ist zu einem Zeitpunkt  $t$  der Quadrupol  $D_{ij}$  zu den früheren Zeitpunkt  $t - R/c$  maßgeblich, kurz  $D_{ij}(t-R/c)$ . Binnendifferenzierend können die Schülerinnen und Schüler dieses bis zur zweiten Ordnung entwickeln:

$$D_{ij}(t-R/c) = D_{ij}(t) + d/dt \cdot D_{ij}(t) \cdot (-R/c) + 0,5(d/dt)^2 \cdot D_{ij}(t) \cdot (R/c)^2$$

Hier ist der zweite Term in großer Entfernung dominant. Einsetzen ergibt:

$$g = -G/(6R \cdot c^3) \cdot \sum_{ij} n_i \cdot n_j (d/dt)^3 D_{ij}$$

Zur Bestimmung der Energiedichte wird zunächst das Quadrat der Gravitationsfeldstärke gebildet:

$$g^2 = G^2/(36 \cdot R^2 \cdot c^6) \cdot [\sum_{ij} n_i \cdot n_j (d/dt)^3 D_{ij}]^2$$

Da bei der Herleitung der Formel  $dE/dV = g^2/(4\pi G)$  zur Energiedichte lediglich die Komponente  $h_{yy}$  der metrischen Abweichung betrachtet wurde, wird der Energieterm so verallgemeinert, dass jede Polarisation genau einen Beitrag leistet:

$$dE/dV = \sum_{\text{Polarisationen}} g^2 \text{ Polarisation} / (4\pi G)$$

Entsprechend ist:

$$g_{yy}^2 = G^2/(36 \cdot R^2 \cdot c^6) \cdot [(d/dt)^3 D_{yy} - (d/dt)^3 D_{zz}]^2 \text{ und}$$

$$g_{yz}^2 = G^2/(36 \cdot R^2 \cdot c^6) \cdot [2(d/dt)^3 D_{yz}]^2$$

Diese Ausdrücke werden in den Term für die Energiedichte eingesetzt:

$$dE/dV = G/(144\pi \cdot R^2 \cdot c^6) \cdot \{[(d/dt)^3 D_{yy} - (d/dt)^3 D_{zz}]^2 + [2(d/dt)^3 D_{yz}]^2\}$$

Diese Energiedichte für die Quadrupolstrahlung entspricht der Literatur (s. [4], S. 425).

Die hier hergeleiteten Terme sind strukturgleich zur elektrischen Dipolstrahlung sowie zur elektrischen Quadrupolstrahlung (s. [4], S. 223) und beschreiben insofern Alltagsgeräte wie das Handy. Diese Strukturgleichheit hat ihre Ursache in der Strukturgleichheit der Coulombkraft und der newtonschen Gravitationskraft.

### 35. Literatur

- [1] Muckenfuß, Heinz (1995): Lernen im sinnstiftenden Kontext. Berlin, Cornelsen, S. 64-66.
- [2] Meyenn, Karl von (1990): Albert Einsteins Relativitätstheorie. Braunschweig, Vieweg.
- [3] Stephani, Hans (1980): Allgemeine Relativitätstheorie. Berlin, Deutscher Verlag der Wissenschaften.
- [4] Landau, L.; Lifschitz, E. (1981): Lehrbuch der theoretischen Physik II - klassische Feldtheorie. Berlin, Akademie-Verlag.
- [5] Schröter, Uwe (2002): Allgemeine Relativitätstheorie mit Mitteln der Schulmathematik. In: Lotze, Karl-Heinz; Schneider, Werner: Wege in der Physikdidaktik, Bd. 5. Erlangen, Gruner.
- [6] Braun, Matthias (2007): Das GPS-System – Funktionsweise und Einsatzmöglichkeiten im Physikunterricht. Hausarbeit zum ersten Staatsexamen, Universität Würzburg.
- [7] Fruchter, A (2000): A Cosmic magnifying Glass. GRIN/NASA: <http://grin.hq.nasa.gov/ABSTRACTS/GPN-2000-000886.html>, Download 2011.
- [8] Carmesin, H.-O. (2012): Entdeckungen mit dem Beschleunigungssensor. CASIO forum.
- [9] Lechner, Robert (2003): Global Positioning System. [http://de.wikipedia.org/wiki/Global\\_Positioning\\_System](http://de.wikipedia.org/wiki/Global_Positioning_System), Download 2011.
- [10] Braun, Matthias (2007): Das GPS-System – Funktionsweise und Einsatzmöglichkeiten im Physikunterricht. Hausarbeit zum ersten Staatsexamen.
- [11] Clifford, M. Will (2006): The Confrontation between General Relativity and Experiment. Living Rev. Relativity, 9, 3. Download 2012, <http://www.livingreviews.org/lrr-2006-3>.
- [12] Arnold Sommerfeld (1977): Vorlesungen über Theoretische Physik - Mechanik der deformierbaren Medien. 6. Auflage, Frankfurt, Verlag Harri Deutsch.
- [13] John Hattie (2009): Visible Learning. London, Routledge.
- [14] Peter Häußler, Wolfgang Bunder, Reinders Duit, Wolfgang Gräber, Jürgen Mayer (1998): Perspektiven für die Unterrichtspraxis. Kiel, IPN.
- [15] Robert Marzano (1998): A Theory-Based Meta-Analysis of Research on Instruction. Aurora, Colorado, Mid-continent Educational Laboratory.
- [16] Saps Buchman u. a. (2000): The Gravity Probe B Relativity Mission. [http://einsteintanford.edu/content/sci\\_papers/papers/BuchmanS\\_2000\\_66.pdf](http://einsteintanford.edu/content/sci_papers/papers/BuchmanS_2000_66.pdf). Download 2012.
- [17] Jacob Biemond (2004): Which gravitomagnetic precession rate will be measured by Gravity Probe B? <http://arxiv.org/ftp/physics/papers/0411/0411129.pdf>. Download 2012.
- [18] Jacob Biemond (2012): The gravitomagnetic field of a sphere, the Gravity probe B and LAGEOS satellites: <http://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/0802/0802.3346.pdf>. Download 2012.
- [19] Neil Ashby, Bahman Shahid-Saless (1989): Geodetic Precession or Dragging of Intertial Frames? [http://ntrs.nasa.gov/archive/nasa/casi.ntrs.nasa.gov/19890018085\\_1989018085.pdf](http://ntrs.nasa.gov/archive/nasa/casi.ntrs.nasa.gov/19890018085_1989018085.pdf). Download 2012.
- [20] Bahram Mashhoon (2008): Gravitomagnetism – A Brief Review. <http://arxiv.org/pdf/gr-qc/0311030v2.pdf>. Download 2012.
- [21] Harrison, Edward (1990): Kosmologie. 3. Aufl. Darmstadt, Verlag Darmstädter Blätter.
- [22] John D. Anderson, James K. Campbell, John E. Ekelund, Jordan Ellis, and James F. Jordan (2008): Anomalous Orbital-Energy Changes Observed during Spacecraft Flybys of Earth. PRL 100.
- [23] Fabian Heimann (2011): Simulation der Flyby-Anomalie. Jugend forscht Arbeit.

- [24] Brandes, J. und Czerniawski, J. (2010): Spezielle und Allgemeine Relativitätstheorie. Karlsbad, VRI.
- [25] Carmesin, H.-O. (2004): Messung von Beschleunigungen mit einer Bogenwasserwaage im Physikunterricht einer 11. Klasse. In: Nordmeier, Volker; Oberländer, Arne (Hrsg.): Tagungs-CD Fachdidaktik Physik. ISBN 3-86541-066-9.
- [26] Carmesin, H.-O. (2002): Urknallmechanik im Unterricht. In: Nordmeier, Volker (Hrsg.): Tagungs-CD Fachdidaktik Physik. ISBN 3-936427-11-9.
- [27] Carmesin, H.-O. (2012): Schüler beobachten den Urknall mit einem C11-Teleskop. PhyDid B, eingereicht zur Veröffentlichung.
- [28] Adam G. Riess, Alexei V. Filippenko, Michael C. Liu, Peter Challis, Alejandro Clocchetti, Alan Diercks, Peter M. Garnavich, Craig J. Hogan, Saurabh Jha, Robert P. Kirshner, B. Leibundgut, M. M. Phillips, David Reiss, Brian P. Schmidt, Robert A. Schommer, R. Chris Smith, J. Spyromilio, Christopher Stubbs, Nicholas B. Suntzeff, John Tonry, Patrick Woudt, Robert J. Brunner, Arjun Dey, Roy Gal, James Graham, James Lar- kin, Steve C. Odewah n, Ben Oppenheimer (2000): Tests of the Accelerating Universe with Near-Infrared Observations of a High-Redshift Type Ia Supernova. Download 2011. URL: <http://lanl.arxiv.org/abs/astro-ph/0001384v1>.
- [29] Martin Wagensein (1968): Verstehen lehren. Weinheim, Beltz Verlag.
- [30] Pound, R. V.; Rebka Jr. G. A. (1960): Apparent weight of photons. Phys. Rev. Lett. **4** (7): 337–341.
- [31] Carmesin, H.-O. (2004): Sternmodelle. In: Nordmeier, Volker; Oberländer, Arne (Hrsg.): Tagungs-CD Fachdidaktik Physik. ISBN 3-86541-066-9.

Dieser Bericht betrifft den folgenden Tagungsbeitrag der Frühjahrstagung in Mainz 2012:

Beitragsnummer DD 15.6

Titel des Beitrags: Untersuchung der Einstein-Geometrie mit dem Beschleunigungssensor. Der Beitrag wurde bei der Zeitschrift PhyDid B im Mai 2012 zur Veröffentlichung eingereicht.