

## Ein elementarer Zugang zum Sagnac-Effekt

Stefan Heusler

\*Institut für Didaktik der Physik, Wilhelm-Klemm Str. 10, 48149 Münster,  
stefan.heusler@uni-muenster.de

### Kurzfassung

Drehratensensoren, die auf optischer Technologie beruhen, spielen in einer Vielzahl von modernen technischen Anwendungen eine Rolle. Die historischen Wurzeln gehen auf den Beginn des 20. Jahrhunderts zurück, als Interferenzexperimente mit Licht und deren Interpretation im Rahmen der Äthertheorie noch kontrovers diskutiert wurden. Im Gegensatz zum Michelson-Morley-Experiment, wo keine Verschiebung von Interferenzstreifen bei Rotation des gesamten Aufbaus beobachtet wurden, sagte Sagnac im Jahr 1913 voraus, dass bei einer ringförmigen Anordnung des Lichtweges sehr wohl eine Verschiebung der Interferenzstreifen bei Rotation auftritt, was heute als passiver Sagnac-Effekt bezeichnet wird. 1963 wurde eine weitere Variante mit einem ringförmig angeordneten Laserresonator realisiert, der heute als aktives Sagnac-Interferometer bezeichnet wird. In diesem Beitrag wird ein akustisches Analogieexperiment für das aktive Sagnac-Interferometer vorgestellt.

### 1. Lichtwellen, Wasserwellen, Schallwellen

Für Schüler ist Licht ein Alltagsphänomen, das ihnen bereits vor der Behandlung im Physikunterricht wohlvertraut ist. Interferenzerscheinungen von Licht können in vielen Zusammenhängen beobachtet werden, wie z.B. bei Seifenblasen. Allerdings ist eine Deutung der Farberscheinungen als Interferenz von Lichtwellen alles andere als offensichtlich. Hier helfen Analogien zu leichter zugänglichen Interferenzexperimenten, wie etwa mit Wasserwellen in der Wellenwanne. Durch Analogien können aber immer nur gewisse Teilaspekte abgebildet werden. Sozusagen als „Beipackzettel“ muss jede Analogie noch mit einer Warnung versehen werden, was genau durch den Vergleich abgebildet werden kann. Im Fall der Interferenz von Wasserwellen gibt es nur einen einzigen – allerdings entscheidenden – Punkt, der in Analogie zu Lichtwellen gesetzt werden kann: Konstruktive und destruktive Interferenz der Wasserwellen verhält sich ähnlich wie konstruktive und destruktive Interferenz der elektromagnetischen Wellen. Bei allen anderen Eigenschaften von Licht versagt die Analogie zu Wasserwellen. Die Dispersion ist verschieden, ganz zu schweigen vom Ausbreitungsmechanismus von Licht, und der grundlegenden Quantisierung gemäß  $E = h \cdot f$ . Weiterhin ist die Lichtintensität proportional zum Quadrat des elektrischen Feldes bzw. der Amplitude, während der Zusammenhang zwischen Amplitude und Energie der Wasserwelle im Fall von Schwerewellen linear ist.

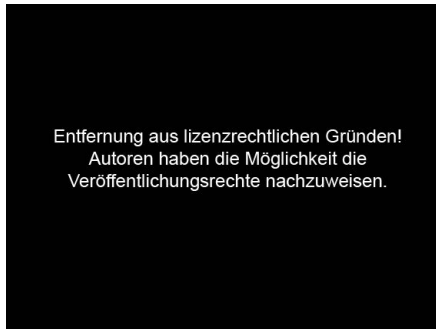
Eine weitere mögliche Analogie zur Beschreibung von Interferenzphänomenen bei Licht sind Schallwellen. Schallwellen haben den Nachteil, dass diese ebenso wie Lichtwellen unsichtbar sind – die Wellenlänge als physikalische Kenngröße ist nicht sichtbar, stattdessen wird die Tonhöhe bei Schallwellen

bzw. die Farbe bei Lichtwellen als Sinneseindruck wahrgenommen. Allerdings bietet die Analogie zwischen Licht und Schall auch Vorteile: Die Dispersion von Schallwellen in Luft ist vernachlässigbar klein, so dass analog zu Licht im Vakuum die Ausbreitungsgeschwindigkeit als unabhängig von der Wellenlänge bzw. Frequenz angenommen werden kann. Weiterhin ist die Schallintensität proportional zum Betrag der Amplitude, in Analogie zur Lichtwelle. Bei einer bewegten Schallquelle ändert sich die wahrgenommene Frequenz aufgrund des Dopplereffekts. Der Dopplereffekt der bewegten Schallquelle kann mit dem relativistischen Dopplereffekt der Lichtwelle in Bezug gesetzt werden. Bis auf diese relativistische Korrektur aufgrund der Tatsache, dass die Lichtgeschwindigkeit unabhängig vom Bezugssystem ist, ist es möglich, hier die Analogie zu Schallwellen zu nutzen.

Solange also die betrachtete Lichtquelle eine ausreichend hohe Lichtintensität hat und somit Quantenfluktuationen irrelevant sind, und solange die betrachtete Geschwindigkeit der bewegten Schall- bzw. Lichtquelle klein gegen die Lichtgeschwindigkeit ist, kann das Verhalten von Lichtwellen gut in Analogie zum Verhalten von Schallwellen gesetzt werden.

### 2. Rotierendes Licht, rotierender Schall

Im Jahr 1913 veröffentlichte der französische Physiker Sagnac den Aufbau eines Interferenzexperiments, bei dem Lichtwellen in einem geschlossenen, ringförmigen System herumlaufen. Ein Teil des rechts- bzw. linkslaufenden Lichtes wird ausgekoppelt und zur Interferenz gebracht (auf dem Schirm P-P' in Abb. 1). Die Motivation für diesen Aufbau ergab sich aus der Frage, ob der Äther von der Erde „mitgerissen“ wird, damals noch als mögliche



**Abb.1:** Passives Sagnac-Interferometer: Am Strahlteiler trennen sich die Lichtwege R und T, durchlaufen die vier Spiegel M1...M4 in umgekehrter Reihenfolge, vereinen sich anschließend wieder und treffen auf den Interferenzschirm PP'. Bei Rotation der gesamten Anlage ergibt sich eine Phasenverschiebung, die der Rotationsgeschwindigkeit proportional ist.

Erklärung für das Michelson-Morley-Experiment diskutiert wurde. Wird die gesamte Apparatur in Rotation versetzt, so ergibt sich eine Phasenverschiebung zwischen den Lichtwellen aufgrund der unterschiedlichen optischen Weglängen.

Je nach Phasenverschiebung zwischen rechts- und linkslaufender Lichtwelle ergibt sich beim ausgekoppelten Signal ein Interferenzmaximum bzw. Minimum. Die Änderung der Drehgeschwindigkeit führt zu einer Änderung der gemessenen Lichtintensität, so dass sich die Möglichkeit ergibt, Drehraten genau zu vermessen. Streng genommen war Sagnacs Argumentation kein Beweis dafür, dass die Äthertheorie falsch ist. Tatsächlich lässt sich der beobachtete Effekt sowohl im Rahmen der allgemeinen Relativitätstheorie als auch klassisch herleiten [1]. In der weiteren historischen Entwicklung hat sich der Fokus der Arbeit verschoben, da die Frage nach der Existenz des Äthers durch den Erfolg der Relativitätstheorie in den Hintergrund gedrängt wurde. Das wichtigste Ziel war nun die Steigerung der Präzision bei den Messungen. So gelang es Michelson und Gale im Jahr 1925, die Erdrotation durch den Sagnac-Effekt experimentell nachzuweisen [3]. Der Sagnac-Effekt kann in diesem Sinn als das „Foucault'sche Pendel der Optik“ bezeichnet werden.

Der Sagnac-Effekt ist auch technologisch relevant. Drehratensensoren, die auf dem Sagnac-Effekt beruhen, werden z.B. bei der Steuerung von Industrierobotern verwendet. Je länger der zurückgelegte Lichtweg, desto genauer der Sensor. In Abb. 2 zeigen wir einen modernen Drehratensensor der Firma LITEF, bei dem mehrere Kilometer Glasfaserkabel aufgewickelt sind.

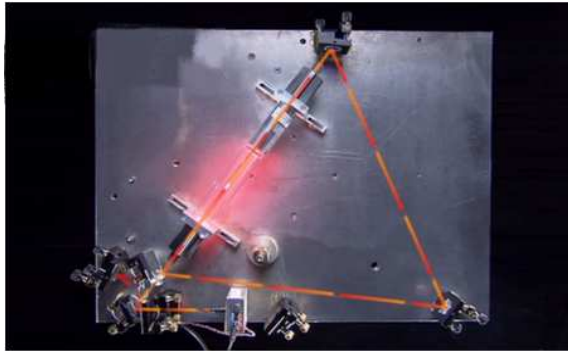
Im Jahr 1963 haben Macek und Davis eine neue Variante des Sagnac-Effekts vorgestellt, bei der sich das Licht in einem geschlossenen Laserresonator



**Abb.2:** Beispiel für eine moderne Variante des passiven Sagnac-Interferometers: Der Drehratensensor der Firma LITEF, bei dem das Licht in unterschiedlichen Richtungen durch mehrere Kilometer Glasfaserkabel propagiert, bevor beide Teilstrahlen zur Interferenz gebracht werden. (Bild: HiQ Media, Köln/LITEF)

befindet. Durch den Übergang vom passiven zum aktiven Sagnac-Interferometer wird nicht mehr eine Phasendifferenz, sondern eine Frequenzdifferenz im Resonator durch die Rotation erzeugt, wodurch sich die Genauigkeit der Messung nochmals erheblich steigern lässt. Die rechts- und die linkslaufende Mode im Resonator sind voneinander unabhängig. Wird nun die gesamte Apparatur in Rotation versetzt, so verstimmen sich aufgrund des relativistischen Dopplereffekts die Frequenzen beider Moden zueinander. Dreht sich die Apparatur rechts herum, so wird die Frequenz  $f_R$  der rechtslaufenden Mode etwas niedriger, die der linkslaufenden Mode  $f_L$  etwas höher als die ursprüngliche Frequenz sein. Die Überlagerung ergibt ein Schwebungssignal, wobei die Schwebungsfrequenz ( $f_R - f_L$ ) der Differenzfrequenz zwischen den verstimmten Moden entspricht. Die Schwebungsfrequenz ist direkt proportional zur Winkelgeschwindigkeit der Rotation der gesamten Anordnung (die Berechnung wird im Anhang vorgestellt). Die Schwebungsfrequenz ist somit ein Maß für die Rotation der Anordnung, so dass sich die Möglichkeit ergibt, einen präzisen Drehratensensor zu konstruieren.

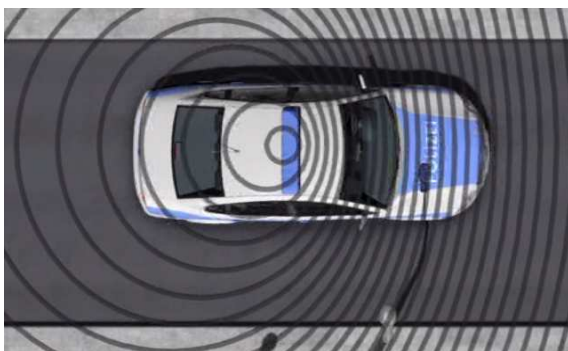
Ringlaser sind aus der Navigation von Schiffen und Flugzeugen nicht mehr wegzudenken. In der Forschung werden Ringlaser z.B. in der Geophysik zur Vermessung der Plattentektonik eingesetzt [3]. Die Thematik ist daher für den Schulunterricht sowohl aus physikgeschichtlicher als auch technologischer Perspektive interessant. Im Rahmen einer Examensarbeit wurde an der Universität Hannover ein Ringlasersystem aufgebaut [4], bei dem das ausgekoppelte Schwebungssignal in ein akustisches Signal umgewandelt wird (Abb. 3). Bei Drehung der Apparatur entsteht ein hoher Ton, dessen Frequenz proportional zur Winkelgeschwindigkeit der Rotation ist.



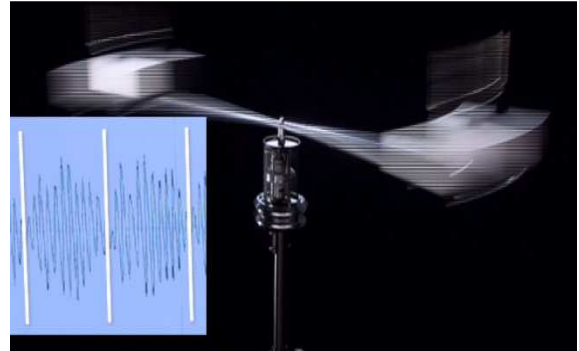
**Abb.3:** Modellaufbau eines aktiven Sagnac-Interferometers: Ein HeNe-Laser propagiert in einem offenen Resonator, der durch drei Spiegel dreieckförmig angeordnet ist. Die rechts- (in rot) und linkslaufende (in orange) Mode werden ausgekoppelt (links unten im Bild) und durch ein Spiegelsystem zur Überlagerung gebracht. Das Verhältnis von Schwebungsfrequenz zu Rotationsfrequenz ist in etwa 2.700.000:1. (Bild: HiQ Media/Universität Hannover)

### 3. Analogieexperimente zum Sagnac-Effekt

Im Rahmen einer Unterrichtseinheit zum Thema Interferenz von Licht lässt sich der Sagnac-Effekt gut in den Unterricht der Sek. II integrieren. Während beim Glasfaserkreisel lediglich Phasenverschiebungen eine Rolle spielen, die von unterschiedlichen optischen Weglängen vom hin- und rücklaufenden Licht herrühren, ist die Erklärung des Ringlaserkreisels um einiges komplexer. Durch die Rotation ändert sich die effektive Länge des Resonators und somit die Frequenz der resonanten Lichtwelle. Die Veränderung der Frequenz kann auch durch den relativistischen Dopplereffekt beschrieben werden. Hier bietet sich die Analogie zu einer bewegten Schallquelle an. Wie in Abb. 4 am Beispiel eines bewegten Polizeiautos zu sehen, wird die Frequenz aufgrund der Bewegung vor der Schallquelle höher, und dahinter niedriger. In Abb. 5 zeigen wir unseren Aufbau mit zwei rotierenden Stimmgabeln (im Prinzip würde eine Stimmgabel ausreichen, durch den



**Abb.4:** Doppler-Effekt: Vor der bewegten Schallquelle wird die Wellenlänge kleiner, dahinter wird sie größer. Befindet sich die Schallquelle in Rotation, überlagern sich die verstimmten Frequenzen und es entsteht ein Schwebungssignal. (Bild: HiQ Media/D. Terstegge)



**Abb.5:** Analogieexperiment zum aktiven Sagnac-Interferometer: Befinden sich zwei Stimmgabeln in Rotation, ergibt sich ein deutlich wahrnehmbares Schwebungssignal (Graphik links unten im Bild). Das Verhältnis von Schwebungsfrequenz zu Rotationsfrequenz beträgt etwa 5:1. (Bild: HiQ Media, Köln)

symmetrischen Aufbau ist die Konstruktion stabiler). Jede Stimmgabel sendet eine radial verlaufende Schallwelle aus. Durch die Superposition der leicht verschobenen Frequenzen entsteht ein Schwebungssignal, das proportional zur Rotationsfrequenz der Anordnung ist. Mit Cassy lassen sich leicht die Rotationsfrequenz und das Schwebungssignal messen. Bei der Messung ist darauf zu achten, dass Reflexionen von den Wänden möglichst gut gedämpft werden. Wie im mathematischen Anhang gezeigt, besteht eine enge Analogie zwischen der Berechnung der Schwebungsfrequenz beim Ringlaserkreisels und bei der Anordnung der rotierenden Stimmgabeln. Dies liegt daran, dass für diesen Effekt weder die Quanteneigenschaften von Licht eine Rolle spielen, noch relativistische Effekte. Schallwellen können in diesem Fall als eine sehr gute Analogie gesehen werden.

Der Vorteil der Analogie besteht darin, dass sowohl die Rotation der Stimmgabeln als auch die Schwebung zu einem unmittelbaren sinnlichen Erlebnis werden. Die von Schülern oft aufgestellte Vermutung, dass die Rotationsfrequenz genau dem Anschwellen und Abklingen der Lautstärke entspricht, wird durch die Beobachtung widerlegt. Hier bietet sich ein guter Anknüpfungspunkt zur genaueren mathematischen Beschreibung und der Berechnung vom Verhältnis aus Schwebungs- und Rotationsfrequenz mit Hilfe des Dopplereffektes. Aus der Akustik bekannte Effekte können so auf elektromagnetische Wellen verallgemeinert werden. Weitere Effekte, die zu Schwebungen führen, können an dieser Stelle diskutiert werden. Rotierende Boxen, die zu Schwebungseffekten führen, sind z.B. in der Musik als Leslie-Boxen bekannt [5]. Wissenstransfer durch Analogiebildung kann auf diese Weise gefördert werden. Der „Beipackzettel“ zur Analogie sollte allerdings auf jeden Fall mitgeliefert werden, um eine Sensibilisierung für die Grenzen der Anschaulichkeit zu erhalten.

#### 4. Mathematischer Anhang

In diesem Anhang werden zunächst die bekannten Resultate der Phasen- bzw. Frequenzverschiebung beim Sagnac-Effekt hergeleitet, um dann die Analogie zu Schallwellen zu diskutieren. Wir betrachten zunächst den passiven Glasfaserkreis. Streng genommen muss die allgemeine Relativitätstheorie zur Herleitung verwendet werden, die klassische Betrachtung führt jedoch in diesem Fall zum selben Resultat [1]. Klassisch gesehen muss lediglich die zusätzliche Wegstrecke betrachtet werden, die das Licht aufgrund der Rotation zurücklegen muss. Es sei  $k$  der Wellenvektor des Lichts, und

$$\Delta t = 2\pi N R / c_n$$

die Zeit, die das Licht braucht, um durch die  $N$  Windungen im Glasfaserkreis zu propagieren. Hierbei bezeichnet  $c_n$  die Lichtgeschwindigkeit in der Glasfaser. In dieser Zeit verlängert sich die Wegstrecke um  $\Delta L = R \Omega \Delta t$ , und die Phase verschiebt sich um

$$\phi_{+/-} = \pm k \Delta L = \pm k R \Omega \Delta t.$$

Hierbei ist  $R$  der Radius, um den das Glasfaserkabel gewickelt ist, und  $\Omega$  die Winkelgeschwindigkeit der Rotation. Die gemessene Intensität ergibt sich nach Überlagerung der rechts- und linkslaufenden Teilwellen. Sind beide vor Umlauf durch das Kabel in Phase, so ist die Phasendifferenz nach dem Umlauf

$$I \sim |E_+ e^{i\phi_+} + E_- e^{i\phi_-}|^2.$$

Hierbei bezeichnet  $E_{+/-}$  die elektrischen Feldstärken der rechts- und linkslaufenden Moden. Sind beide Feldstärken gleich groß, so ergibt sich für die gemessene Intensität

$$I(\Delta\phi) = 2 I_0 (1 + \cos(\Delta\phi)).$$

Hier ist  $I_0$  die Ausgangsintensität pro Teilwelle. Die Phasenverschiebung ist proportional zur Winkelgeschwindigkeit der Rotation  $\Delta\phi \sim \Omega$ ; es gilt

$$\Delta\phi = \phi_+ - \phi_- = (8\pi N A) / (\lambda c_n) \Omega.$$

Interferenz von Teilwellen aufgrund von unterschiedlichen optischen Weglängen wie hier gezeigt spielen auch bei verschiedenen Anwendungen in der Schule eine Rolle - wie etwa beim Doppelspalt - und lassen sich relativ einfach mit elementaren Bildern einzelner Sinuswellen erklären. Etwas komplexer ist der Fall von aktiven Ringlasergyroskopen. Zur Herleitung des Zusammenhangs zwischen der Schwebungsfrequenz und der Winkelgeschwindigkeit der Rotation beginnen wir mit der relativistischen Frequenzverschiebung beim Dopplereffekt,

$$f_R(v) = f \sqrt{(c+v)/(c-v)} \approx f(1+v/c).$$

Für kleine Geschwindigkeiten kann näherungsweise dieselbe Formel wie für den nichtrelativistischen Dopplereffekt verwendet werden. Für die Schwebungsfrequenz zwischen zwei durch Bewegung mit

der Geschwindigkeit  $+v$  bzw.  $-v$  verstimmte Signale ergibt sich

$$f_R - f_L \approx 2f v / c.$$

Für den Fall einer ringförmigen Anordnung ist die Geschwindigkeit  $v$  durch das Produkt aus Winkelgeschwindigkeit und Radius ( $v = \Omega R$ ) gegeben,

$$\Delta f = 2f \Omega R / c = 4A / (\lambda P) \Omega.$$

In unserer Herleitung haben wir uns auf den Spezialfall eines perfekt ringförmigen Gyroskops beschränkt. Drücken wir das Ergebnis als Funktion von Fläche  $A$  und Umfang  $P$  aus, so erhalten wir das Ergebnis, was sich für den allgemeinen Fall durch eine etwas kompliziertere Argumentation herleiten lässt. Interessant ist das folgende Verhältnis von Schwebungsfrequenz und Umdrehungsfrequenz des Ringlasers,

$$\Delta f_{\text{Licht}} / f_{\text{Rot}} = 8\pi A / (P \lambda_{\text{Licht}}).$$

Im experimentellen Aufbau der Universität Hannover [4] beträgt die Wellenlänge 632.8 nm. Die Kantenlänge des Dreiecks ist  $a=0.47\text{m}$ , siehe Abb. 3. Das Verhältnis von Fläche  $A$  zum Umfang  $P$  ist  $a/\sqrt{3}$ , so dass wir für diesen Aufbau als Frequenzverhältnis

$$\Delta f_{\text{Licht}} / f_{\text{Rot}} \approx 2.701.000$$

erhalten. Für die rotierenden Stimmgabeln (Abb. 5) gilt ganz analog wie im Fall der Lichtwellen

$$f_R - f_L \approx 2f \langle v \rangle / c_{\text{Schall}}.$$

Es muss in dieser Formel lediglich die Lichtgeschwindigkeit durch die Schallgeschwindigkeit ersetzt werden, und eine passend gemittelte Geschwindigkeit angesetzt werden. Im Gegensatz zum Ringlaser breiten sich die Schallwellen im gesamten Raum aus. Ein weit von der Anordnung platzierter Beobachter nimmt deutlich ein Schwebungssignal wahr, das von der um eine halbe Periode gemittelten Geschwindigkeit  $\pm v \sin(\theta)$  der rechten bzw. linken Stimmgabeln herrührt. Mittelung über eine halbe Periode ergibt

$$\langle v \rangle = (2\Omega R / \pi).$$

Hierbei bezeichnet  $R$  den Radius der Kreisbahn, auf der sich die Stimmgabel bewegt und  $\Omega = 2\pi f_{\text{Rot}}$  die Winkelgeschwindigkeit. Analog zum Fall vom Ringlaser ergibt sich für das Verhältnis von Schwebungs- zur Rotationsfrequenz

$$\Delta f_{\text{Schall}} / f_{\text{Rot}} = 16A / (P \lambda_{\text{Schall}}).$$

Bis auf den durch die unterschiedliche Mittelung verursachten Vorfaktor ist das Resultat identisch mit dem Ergebnis für die Lichtwellen. Bei unserer Anordnung war der Radius  $R=0.5\text{m}$ ,  $f=440\text{ Hz}$ , und die Schallgeschwindigkeit  $340\text{m/s}$ . Für die Proportionalitätskonstante ergibt sich der Wert

$$\Delta f_{\text{Schall}} / f_{\text{Rot}} \approx 5.2.$$

Im Experiment bestätigt sich, dass die gemessene Schwebungsfrequenz gut fünfmal höher ist die Rotationsfrequenz der Stimmgabeln ist. Wie im Haupttext erwähnt ergeben sich gute Messergebnisse, wenn Reflexionen von den Wänden gedämpft sind. Die Analogie zu Schallwellen kann somit nicht nur qualitativ, sondern auch quantitativ nachvollzogen werden.

## 5. Literatur

- [1] Schreiber, U. (2006): Ringlaser messen die Erdrotation, Physik in unserer Zeit 3/2006 (37).
- [2] Sagnac, G. (1913): L'éther lumineux démontré par l'effet du vent relatif d'éther dans un interféromètre en rotation uniforme, Comptes Rendus, Acad. Sci. (Paris), 157, 708.
- [3] Michelson, A. A., Gale, H.G (1925): The Effect of the Earth's Rotation on the Velocity of Light I., Astroph. Journal 61, 140.
- [4] Müller, T. (2002): Aufbau eines Versuchs zur Messung des optischen Sagnac-Effektes, Hausarbeit im Rahmen der ersten Staatsprüfung für das Lehramt an Gymnasien, Institut für Quantenoptik, Universität Hannover.
- [5] <http://de.wikipedia.org/wiki/Leslie-Lautsprecher>, Zugriff am 30.5.2011. Ich danke K. Wendt für den Hinweis auf die Analogie zu Leslie-Boxen.