Posterbeitrag DPG-Frühjahrstagung 2011, Universität Münster, Di - 22. März 2011, 16:30 h – 18:00 h, DD 18.15

Geometrische Algebra in höheren Dimensionen

Martin Erik Horn, Email: m.horn@physik.uni-frankfurt.de

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

Für drei- und vierdimensionale Räume bzw. Raumzeiten gilt:

»Basic Clifford algebra can be explained to the first person you meet in the street.«

Parra Serra (2009)

Räumliche Welt mit drei Basisvektoren und insgesamt 2^3 = 8 Basis-Elementen:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \sigma_1 \qquad \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \sigma_2 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \sigma_3 \qquad \text{außerdem: } \sigma_{13} = \sigma_1 \sigma_3 = -i\,\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = E_{2x2} \equiv 1 \quad \text{und} \quad \sigma_i \sigma_j = -\sigma_j \sigma_i \qquad E_{2x2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I_{2x2} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

Ausgangspunkt:

Pauli-Matrizen

= Basisvektoren des dreidimensionalen euklidischen Raums

= Basis-Reflexionen im dreidimensionalen euklidischen Raum *(Cartan, Hestenes)*

Die der Welt der Quantenalgebra gilt:

»Für unsere Zwecke ist das Tensorprodukt einfach und anschaulich zu handhaben. Aus den Räumen für zwei Quantenbits $|x\rangle$ und $|y\rangle$ mit Basen $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ erhalten wir durch das Tensorprodukt einen Raum für das Register aus diesen beiden Bits.«

Homeister (2008): Quantum Computing verstehen, 2. Aufl., S. 39

$\Rightarrow$ Wir nutzen diese Quantenalgebra im Kontext klassischer Physik.

Zehfuss-Kronecker-Produkt = Zweiwertiges Tensorprodukt im flachen Raum (also ohne ko- und kontravariante Unterscheidung)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B \\ a_{21}B & a_{22}B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ **Aus (2x2)-Matrizen werden (4x4)-Matrizen.**
Beispiel: Konstruktion der Dirac-Matrizen

$$\gamma_i = \sigma_{13} \otimes \sigma_i \quad \text{mit } i = 1, 2, 3$$
$$\gamma_4 = \sigma_3 \otimes E_{2x2}$$
$$\gamma_5 = \sigma_1 \otimes E_{2x2}$$

Zwischenschritt:

Dirac-Matrizen

= Basisvektoren eines fünfdimensionalen Raums

= Basis-Reflexionen im fünfdimensionalen Raum

(Hestenes, Keller)

Raumzeitliche Welten mit (2n+1) Basisvektoren und $2^{(2n+1)}$ Basis-Elementen können durch quadratische (2^nx2^n)-Matrizen modelliert werden:

$$\kappa_{i(neu)} = \sigma_{13} \otimes \kappa_{i(alt)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \kappa_{i(alt)} = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa_{i(alt)} \\ \kappa_{i(alt)} & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{mit } i = 1, 2, 3, \ldots, 2n-1$$

$$\kappa_{2n(neu)} = \kappa_{2n-2(alt)} \otimes E_{2x2}$$

$$\kappa_{2n+1(neu)} = \kappa_{2n-1(alt)} \otimes E_{2x2}$$

Basisvektoren des (2n+1)-dimensionalen Raums — *Basisvektoren des (2n−1)-dimensionalen Raums*

Zentrale Eigenschaft der Basisvektoren:

$$\kappa_i \kappa_j = -\kappa_j \kappa_i$$

Die κ_i sind anti-kommutativ.

Ortsvektoren sind Linearkombinationen der κ_i: $r = x_1 \kappa_1 + x_2 \kappa_2 + x_3 \kappa_3 + \ldots + x_{2n+1} \kappa_{2n+1}$

Reflexion an der κ_i-Achse: $\pm \kappa_i\, r\, \kappa_i = -x_1 \kappa_1 - x_2 \kappa_2 - \ldots + x_i \kappa_i - \ldots - x_{2n+1} \kappa_{2n+1}$

Folgeschritte:

Mit Hilfe des Zehfuß-Kronecker-Produkts in n Schritten erzeugte höherdimensionale Matrizen

= Basisvektoren eines (2n + 1)-dimensionalen Raums

= Basis-Reflexionen eines (2n + 1)-dimensionalen Raums

Fazit:

Koordinatenperspektive und Operatorenperspektive stehen sich gleichberechtigt in dualistischer Weise ergänzend gegenüber.

Was in der Quantenmechanik strukturell sinnvoll ist...

For many reasons, algebraic and geometric approaches to quantum mechanics and its peculiar features have always been appealing. In this regard, we share with many authors the idea that operators and operands should be elements of the same space. This is in contrast with standard quantum mechanics in which they are treated as elements sitting in separate spaces.

Vianna, Trindade, Fernandes (2008)

...kann auch ein didaktisch tragfähiges Vorgehen im Bereich der klassischen Physik ermöglichen.