Die fünfdimensionale Raumzeit-Algebra am Beispiel der Kosmologischen Relativität

Martin Erik Horn*

*Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt/Main, Institut für Didaktik der Physik,
Max-von-Laue-Str. 1, D – 60438 Frankfurt/Main
Email: m.horn@physik.uni-frankfurt.de

Kurzfassung

Mit der Kosmologischen Relativität hat Moshe Carmeli ein speziell-relativistisches Modell unserer Welt entworfen, das neben einer Zeit- und drei Raumdimensionen die Geschwindigkeit als fünfte Dimension setzt. Auch wenn sein Konstrukt die physikalische Welt, in der wir leben, nicht unbedingt korrekt zu beschreiben vermag, so ist dieses Modell doch ein interessantes Gedankengebäude, das als didaktisches Instrument auf dem Weg von vier- zu höherdimensionalen Räumen genutzt werden kann. Ohne Kompaktifizierung gestattet dieser Ansatz in eingänglicher Weise eine Diskussion darüber, welche Effekte und physikalischen Phänomene bei der Einbeziehung einer zusätzlichen Dimension zu erwarten sind.

Im folgenden wird die fünfdimensionale Kosmologische Relativität vorgestellt, mit der auf Graßmann und Hestenes zurückgehenden Geometrischen Algebra verknüpft und in Relation zur fünfdimensionalen Ausgestaltungen der Geometrischen Algebra durch Keller diskutiert.

Inhaltsübersicht

1. Weltbeschreibungen der modernen Physik
2. Geometrische Algebra und START
3. Kernpunkte der Kosmologischen Relativität
4. Modellierung dreidimensionaler Welten
5. Modellierung fünfdimensionaler Welten
6. Koordinaten- und Operatorensichtweise
7. Die klassische vierdimensionale Raumzeit
8. Eine persönliche Einschätzung: Was haben Keller und Carmeli geleistet?
9. Literatur

1. Weltbeschreibungen der modernen Physik

In unserer Welt können wir uns nach rechts und links bewegen (in x-Richtung), nach hinten und vorne (in y-Richtung) und nach oben und unten (in z-Richtung). Wir nehmen diese geometrisch-strukturelle Basis unserer Raumerfahrungen tagtäglich durch Bewegungen und Bewegungsmöglichkeiten wahr. Es ist offenkundig, dass wir diese Alltagserfahrung mathematisch mit Hilfe dreidimensionaler Geometrien effektiv beschreiben können.

Dennoch ist die Frage nach der Anzahl der Dimensionen unserer Welt bei weitem nicht geklärt. Es dauerte über 150 Jahre, bis die von dem französischen Physiker und Mathematiker Jean d'Alembert 1751 verklausuliert vorgetragene Idee, dass „duration could be regarded as a fourth dimension and that the product of time and solidity would be in some was a product of four dimensions“ [20, S. 96] physikalisch überzeugend ausgearbeitet und physikdidaktisch umgesetzt werden konnte.

In einer ähnlichen Position wie d'Alembert befinden wir uns heute. In der modernen Physik gibt es eine Unzahl von Ansätzen, die empirisch aufgefundenen Welterscheinungen mit Hilfe höherdimensionaler Beschreibungen konzeptuell zu fassen. Ob diese weiteren Dimensionen, die über die drei räumlichen hinausgehen, tatsächlich existieren oder nicht, mag für uns sogar von untergeordneter Bedeutung sein.

Denn für uns als Physikdidaktikerinnen und Physikdidaktiker ist vor allem wichtig, was Michio Kaku in einer Kapitelüberschrift schreibt: „The laws of nature are simpler in higher dimensions“ [16, S. 11]. Diese einfachere Zugänglichkeit physikalischer Zusammenhänge ist das entscheidende Kriterium, das eine didaktische Beschäftigung mit höheren Dimensionen nicht nur rechtfertigt, sondern geradezu erzwingt.

Darüber hinaus stellt die Formulierung höherdimensionaler raumzeitlicher Ansätze eine kulturelle Leistung unserer Epoche ganz eigener Art dar. Michio Kaku vermutet, dass „...future historians of science, when looking back at the tumultuous twentieth century, may view one of the greatest conceptual revolutions to be the introduction of higher-dimensional space-time theories“ [16, S. 313]. Diese geradezu euphorische Einschätzung liegt darin begründet, dass die Gesetze der Natur in höherdimensionaler Formulierung nicht nur einfacher sein mögen, sondern so überhaupt erst vollständig fassbar und in einem überzeugenden einheitlichen Rahmen darstellbar werden.

Da das Gedankengebäude der modernen Physik nicht ohne höherdimensionale Strukturen zu errichten ist, muss es folglich eine der Aufgaben der Physikdidaktik sein, für Lernende einen oder mehrere Wege zu diesen Strukturen zu bahnen. Im folgenden werden erste mögliche Schritte eines solchen Weges diskutiert.

Dabei dient die fünfdimensionale Weltbeschreibung als eine Brücke vom Vier- zum Höherdimensionalen. Darüber hinaus soll diese Brücke, über die die Lernenden voranschreiten, eine schrittweise Annäherung an die kompaktifizierten höherdimensionalen Welten gestatten, indem die Einführung weiterer Dimensionen und die Kompaktifizierung von Dimensionen konzeptuell getrennt werden. Deshalb liegt hier – wir machen den ersten Schritt – der Schwerpunkt auf der Einführung einer weiteren, fünften Dimension, die vorerst als ausgedehnt und nicht kompaktifiziert gedacht werden soll.

2. Geometrische Algebra und START

Der konzeptionelle Rahmen, in den dieser Beitrag einzuordnen ist, wird durch die Geometrische Algebra von David Hestenes [10], [11], [12] abgesteckt. Die von Hestenes geschaffene didaktische Aufarbeitung der Ideen Graßmanns [8] und Cliffords [6] geht davon aus, dass die strukturellen Gegebenheiten unserer Welt durch eine vierdimensionale Raumzeit abgebildet werden können.

Gull, Lasenby und Doran fassen diese Sichtweise mit den Worten „We have no objection to the use of higher dimensions as such; it just seems to us to be unnecessary at present, when the algebra of the space that we do observe contains so many wonders that are not yet generally appreciated" [9, S. 1200] zusammen. Doch diese Selbstbeschränkung wird von einigen Wissenschaftlern, die sich mit der Geometrischen Algebra beschäftigen, so nicht akzeptiert.

Einer dieser Wissenschaftler, der mexikanische Physiker Jaime Keller, öffnet den von Hestenes geschaffenen konzeptuellen Rahmen, indem er eine fünfdimensionale nichtkompaktifizierte Geometrie postuliert, die er im Kontext der Geometrischen Algebra beschreibt. Den drei räumlichen und einer zeitlichen Dimension stellt Keller eine fünfte Dimension zur Seite, die er physikalisch als Wirkung interpretiert. Das Akronym seines Konstrukts spiegelt dies im englischen wider: START steht hier als Abkürzung für Space-Time-Action Relativity Theory. Eine ausführliche Darstellung findet sich in den Beiträgen [17], [18] oder [19].

Einer der Gründe für die immense Wirkungsmächtigkeit seines Ansatzes liegt sicherlich im Gebrauch seines mathematischen Instrumentariums begründet. Auf der Basis der Clifford-Algebra gewinnt Keller die Möglichkeit einfacher geometrischer Interpretationen, die die Bezeichnung des algebraischen Rahmens als Geometrische Algebra im Sinne von Hestenes rechtfertigt.

Allerdings beinhaltet die Kellersche Theoriebildung auch eine quantenmechanische Komponente, indem er die fünfte Dimension gequantelt einführt und die Bedingung aufstellt, dass Wirkungen und Wirkungsänderungen sinnvollerweise nur in Vielfachen des Planckschen Wirkungsquantums h zugelassen werden (siehe [17, S. 315], [18, S. 17].

Diese zusätzliche Bedingung impliziert jedoch, dass auf dem Weg vom Vier- zum Fünfdimensionalen im Rahmen von START zwei Schritte zu gehen sind: einerseits die Einführung einer fünften Dimension, zweitens die Quantisierung derselben. Aus diesem Grund wäre die Wahl von START als mögliches didaktisches Modell einer fünfdimensionalen Welt problematisch, da alleine die Bewältigung eines einzigen Schrittes, nämlich der Einführung einer fünften, im Tagtäglichen nicht als dimensionsartig erlebten Dimension, konzeptuell so anspruchsvoll ist, dass dieser Schritt nicht durch weitere Ergänzungen überlagert werden sollte.

Aus diesem Grund wird die Idee Kellers, eine fünfdimensionale Welt im Rahmen der Geometrischen Algebra zu formulieren mit einer inhaltlich gänzlich anderen Idee verknüpft: Der Kosmologischen Relativität Carmelis.

Moshe Carmeli formulierte seinen Ansatz (siehe beispielsweise [2], [3], [4] oder [1]) nahezu zeitgleich zu Kellers Arbeiten – allerdings ohne die Geometrische Algebra zu nutzen. Um ein didaktisch handhabbares Modell für eine fünfdimensionale Welt zu erhalten, werden im Folgenden Hestenes', Kellers und Carmelis Ideen zergliedert und neu zusammengesetzt. Das muss nicht zwingend eine physikalisch korrekte Weltbeschreibung ergeben, sondern lediglich ein Konstrukt, das didaktisch überzeugt und zum Erlernen und Begreifen höherdimensionaler physikalischer Räume geeignet ist.

3. Kernpunkte der Kosmologischen Relativität

Ansatzpunkt der Kosmologischen Relativität Carmelis ist das strukturell gleichartige Verhalten von Licht und Galaxien (siehe Abbildungen 1 und 2). Die Spezielle Relativitätstheorie baut darauf auf, dass sich Licht in jedem Inertialsystem zu allen Zeiten und an allen Orten mit der gleichen Geschwindigkeit

$$c = 2,9979 \cdot 10^{8}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \qquad \{1\}$$

fortbewegt. Die Dynamik von Galaxien kann als ein dynamisch ähnliches Verhalten interpretiert werden. Carmeli schlussfolgert aus der Hubbleschen Rotverschiebung keine Expansion des Weltalls, sondern postuliert ein übergreifendes kosmologisches Relativitätsprinzip.

Dies besagt, dass Galaxien in jedem Inertialsystem zu allen Zeiten und an allen Orten das in Abbildung 2 dargestellte dynamische Verhalten zeigen. Kein Orts- und Zeitpunkt des Weltalls ist ausgezeichnet, so dass die Geschwindigkeit nach Carmeli als fünfte Koordinate interpretiert werden muss.

Dies hat allerdings zur Konsequenz, dass der Kopplungskonstanten zwischen Geschwindigkeit und Raumlängen eine ebenso fundamental unveränderliche Rolle zukommt wie der Lichtgeschwindigkeit. Nach Carmeli [3, S. 100] hat das Inverse der

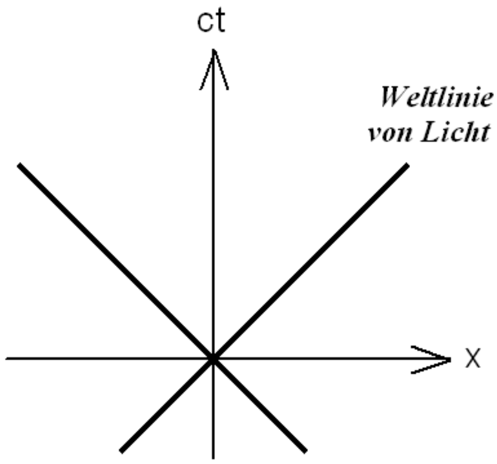

Abb.1: Dynamisches Verhalten von Licht.

Hubble-Konstanten (Hubble-Zeit oder „big bang time“) zu allen Zeiten und an allen Orten den festen Wert von

$$\tau = \frac{1}{H_0} \approx 12{,}486 \cdot 10^9 \,\text{Jahre} \qquad \{2\}$$

Mithin erscheint das Universum zu allen Zeiten und an allen Orten gleich alt.

Carmeli erklärt mit Hilfe der Kosmologischen Relativität die Kosmische Inflation, die Tully-Fisher-Formel und damit das Rätsel der dunklen Materie sowie Phänomene wie die Pioneer-Anomalie [3], [4].

Dennoch gibt es auch überzeugende Gründe, die Hubblesche Rotverschiebung als tatsächliche Expansion des Universums aufzufassen. Deshalb hier erneut der Hinweis: Die Kosmologische Relativität wird hier als Spielzeugmodell für fünfdimensionale Strukturen und nicht zur tatsächlichen Begründung physikalisch realer Erscheinungen herangezogen.

4. Modellierung dreidimensionaler Welten

Zur Modellierung dreidimensionaler Räume kann die Geometrische Algebra in sehr eingänglicher Weise verwendet werden, da sie eine konsistente und didaktisch überzeugende Verknüpfung algebraischer und geometrischer Zusammenhänge ermöglicht [7], [11], [12], [14].

Sie baut auf der Feststellung Cartans [5] auf, dass die Pauli-Matrizen einen dreidimensionalen euklidischen Raum aufspannen und $\boldsymbol{\sigma_x}$, $\boldsymbol{\sigma_y}$ sowie $\boldsymbol{\sigma_z}$ als Basisvektoren dieses Raum interpretiert werden können [7], [9].

Pauli-Matrizen sind komplexe (2x2)-Matrizen. Deshalb ist es möglich, die Basis-Elemente dreidimensionaler Räume direkt durch komplexe (2x2)-Matrizen zu repräsentieren. Einfaches Abzählen der Matrizenpositionen zeigt, dass es genau acht linear unabhängige komplexe (2x2)-Matrizen gibt. Die einfachste Manifestation von acht solchen linear unabhängigen

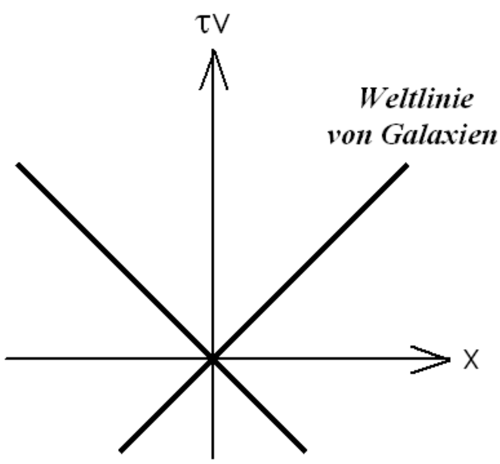

Abb.2: Dynamisches Verhalten von Galaxien.

komplexen (2x2)-Matrizen zeigt die Formelübersicht (3).

$$\begin{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \end{matrix} \qquad \{3\}$$

Diese acht Matrizen sind jedoch rechnerisch wenig attraktiv, da ihre Determinanten jeweils Null ergeben. Deshalb ist es sinnvoll, aus ihnen linear unabhängige Matrizen zu konstruieren, deren Determinanten 1 oder –1 betragen. Diese können direkt den räumlichen Basis-Elementen zugeordnet werden, so dass jeder räumliche Vektor $\underline{r}$ sich durch die Linearkombination

$$\underline{r} = x\sigma_x + y\sigma_y + z\sigma_z \qquad \{4\}$$

darstellen lässt. Jedes in diesem dreidimensionalen Raum vorstellbare mathematische Objekt ist dann Linearkombination der folgenden acht Matrizen:

a) Dimensionsloser Skalar:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \qquad \{5\}$$

b) Eindimensionale Basisvektoren:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \sigma_x \qquad \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \sigma_y \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \sigma_z \qquad \{6\}$$

c) Zweidimensionale Basis-Bivektoren: (Basis-Pseudovektoren)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \sigma_z\sigma_x \quad \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = \sigma_x\sigma_y \quad \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \sigma_y\sigma_z \qquad \{7\}$$

d) Dreidimensionales Basis-Volumen: (Basis-Pseudoskalar)

$$I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = \sigma_x\sigma_y\sigma_z \qquad \{8\}$$

5. Modellierung fünfdimensionaler Welten

Zur Modellierung vierdimensionaler Räume wurde von David Hestenes [10], [12] die Raumzeit-Algebra vorgeschlagen, die darauf aufbaut, dass die Dirac-Matrizen einen vierdimensionalen pseudoeuklidischen Raum aufspannen. $\boldsymbol{\gamma_x}$, $\boldsymbol{\gamma_y}$, $\boldsymbol{\gamma_z}$ sowie $\boldsymbol{\gamma_t}$ können als Basisvektoren dieses Raum interpretiert werden [7], [12], [13].

Üblicherweise werden Dirac-Matrizen als komplexe (4x4)-Matrizen dargestellt. Deshalb ist es möglich, die Basis-Elemente vierdimensionaler Räume direkt durch komplexe (4x4)-Matrizen zu repräsentieren.

Einfaches Abzählen der Matrizenpositionen zeigt jedoch, dass die Struktur von komplexen (4x4)-Matrizen weit mehr Basis-Elemente beinhaltet [15], als die zur Darstellung vierdimensionaler Räume notwendigen $2^4 = 16$ linear unabhängigen Matrizen.

Es existieren tatsächlich insgesamt $2^5 = 32$ linear unabhängige komplexe (4x4)-Matrizen, wie die einfachste Manifestation von solchen linear unabhängigen komplexen (4x4)-Matrizen, die in Formelübersicht (9) angedeutet werden, zeigt.

$$\begin{matrix}
\begin{pmatrix} 1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0 \end{pmatrix}, \dots \\
\begin{pmatrix} 0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0 \end{pmatrix}, \dots \\
\dots \qquad \dots \qquad \dots \\
\begin{pmatrix} 0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\i&0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&i&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&i&0 \end{pmatrix}, \dots
\end{matrix} \qquad \{9\}$$

Diese 32 Matrizen sind jedoch rechnerisch wenig attraktiv, da ihre Determinanten jeweils Null ergeben. Deshalb ist es sinnvoll, aus ihnen linear unabhängige Matrizen konstruieren, deren Determinanten 1 oder –1 betragen. Diese können direkt den Basis-Elementen eines fünfdimensionalen Raumes zugeordnet werden, da dann ein Skalar, fünf Basisvektoren, zehn Basis-Bivektoren, zehn Basis-Trivektoren, fünf Basis-Quadrovektoren[1] und ein Basis-Pentavektor[2] gebildet werden können. Die Basisvektoren [15, S. 160] sind:

a) Basisvektor der Zeit:

$$\gamma_t = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & \mathbf{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1 \end{pmatrix} \qquad \{10\}$$

b) Basisvektoren in räumlichen Richtungen:

$$\gamma_x = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_x \\ -\sigma_x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\\-1&0&0&0 \end{pmatrix} \qquad \{11\}$$

$$\gamma_y = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_y \\ -\sigma_y & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0&0&0&-i\\0&0&i&0\\0&i&0&0\\-i&0&0&0 \end{pmatrix} \qquad \{12\}$$

$$\gamma_z = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_z \\ -\sigma_z & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0&0&1&0\\0&0&0&-1\\-1&0&0&0\\0&1&0&0 \end{pmatrix} \qquad \{13\}$$

c) Zeitartiger Basisvektor in eine fünfte Richtung:

$$\gamma_v = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0 \end{pmatrix} \qquad \{14\}$$

In dieser Welt der Kosmologischen Relativität wird jeder Punkt des fünfdimensionalen Koordinatensystems eindeutig durch die Linearkombination dieser Basisvektoren beschrieben:

$$\underline{\underline{r}} = ct\gamma_t + x\gamma_x + y\gamma_y + z\gamma_z + \tau v\gamma_v \qquad \{15\}$$

Da der fünfte Basisvektor mit $\gamma_v^2 = 1$ eine zeitartige Signatur aufweist, kann er mit dem Geschwindigkeits-Basisvektor des Raums der Kosmologischen Relativität identifiziert werden [15].

6. Koordinaten- und Operatorensichtweise

„We share with many authors the idea that operators and operands should be elements of the same space. This is in contrast with standard quantum mechanics in which they are treated as elements sitting in sepa-

[1] zur Beschreibung der vierdimensionalen Hyper-Ebenen dieses fünfdimensionalen Raums

[2] zur Beschreibung des fünfdimensionalen Hyper-Volumens

rate spaces", fassen Vianna, Trindade und Fernandes den didaktischen Kernpunkt des Einsatzes der Clifford-Algebra in der Quantenmechanik zusammen 23, S. 962]. Die gleiche Argumentation gilt auch für die klassische Physik: Die mathematische Einheitlichkeit unserer Weltbeschreibung kann erst dann gewährleistet werden, wenn wir Koordinaten und Operatoren mathematisch gleichartig beschreiben können.

Dieser Kerngedanke ist in der Geometrischen Algebra in verblüffend einfacher Weise umgesetzt: Die Basisvektoren als Operanden, auf die gewirkt wird), können gleichzeitig die Rolle von Operatoren, die auf die Basisvektoren wirken, einnehmen [14].

Dieser Operatorencharakter wird durch rechts- und linksseitige Multiplikation eines je nach Signatur positiven oder negativen Ortsvektors {15} mit einem beliebigen Basisvektor deutlich:

$$\underline{\underline{r}}^{(a)} = \gamma_t(ct\gamma_t + x\gamma_x + y\gamma_y + z\gamma_z + \tau v\gamma_v)\gamma_t$$

$$= ct\gamma_t - x\gamma_x - y\gamma_y - z\gamma_z - \tau v\gamma_v \qquad \{16\}$$

$$\underline{\underline{r}}^{(b)} = -\gamma_x(ct\gamma_t + x\gamma_x + y\gamma_y + z\gamma_z + \tau v\gamma_v)\gamma_x$$

$$= -ct\gamma_t + x\gamma_x - y\gamma_y - z\gamma_z - \tau v\gamma_v \qquad \{17\}$$

$$\underline{\underline{r}}^{(c)} = -\gamma_y(ct\gamma_t + x\gamma_x + y\gamma_y + z\gamma_z + \tau v\gamma_v)\gamma_y$$

$$= -ct\gamma_t - x\gamma_x + y\gamma_y - z\gamma_z - \tau v\gamma_v \qquad \{18\}$$

$$\underline{\underline{r}}^{(d)} = -\gamma_z(ct\gamma_t + x\gamma_x + y\gamma_y + z\gamma_z + \tau v\gamma_v)\gamma_z$$

$$= -ct\gamma_t - x\gamma_x - y\gamma_y + z\gamma_z - \tau v\gamma_v \qquad \{19\}$$

$$\underline{\underline{r}}^{(e)} = \gamma_v(ct\gamma_t + x\gamma_x + y\gamma_y + z\gamma_z + \tau v\gamma_v)\gamma_v$$

$$= -ct\gamma_t - x\gamma_x - y\gamma_y - z\gamma_z + \tau v\gamma_v \qquad \{20\}$$

In allen Fällen wirkt der Basisvektor als Reflexionsoperator, da das Vorzeichen der operatorgleichen Koordinate sich nicht ändert, während alle anderen Koordinaten einen Vorzeichenwechsel durchlaufen. Somit wird durch diese Operation eine Reflexion am entsprechenden Basisvektor generiert.

Diese Operationszuordnung kann genutzt werden, um eine sachlogische Verknüpfung drei- und fünfdimensionaler Räume zu erhalten.

Die Basis-Reflexionen sind im klassischen dreidimensionalen euklidischen Raum analog zu den Formeln {17} bis {19} gegeben:

$$\underline{r}^{(a)} = \sigma_x(x\sigma_x + y\sigma_y + z\sigma_z)\sigma_x$$

$$= x\sigma_x - y\sigma_y - z\sigma_z \qquad \{21\}$$

$$\underline{r}^{(b)} = \sigma_y(x\sigma_x + y\sigma_y + z\sigma_z)\sigma_y$$

$$= -x\sigma_x + y\sigma_y - z\sigma_z \qquad \{22\}$$

$$\underline{r}^{(c)} = \sigma_z(x\sigma_x + y\sigma_y + z\sigma_z)\sigma_z$$

$$= -x\sigma_x - y\sigma_y + z\sigma_z \qquad \{23\}$$

Darüber hinaus wird erwartet, dass bei einer räumlichen Reflexion die Zeit unverändert bleibt, da sie im Kontext der dreidimensionalen Welt nicht durch räumliche Operationen beeinflusst werden soll. Identifizieren wir jedoch den fünfdimensionalen Basisvektor γ_x naiv mit dem dreidimensionalen Basisvektor σ_x, so passiert genau dies, sobald wir in die Operatorensichtweise wechseln. In diesem Fall würde eine Reflexion im dreidimensionalen Raum an der x-Achse entsprechend Gleichung {17} eine Zeitumkehr bewirken, ebenso wie eine Umkehr der Geschwindigkeitskoordinaten.

Beides kann mathematisch nur verhindert werden, indem im fünfdimensionalen Fall zusätzlich zur Reflexion an der x-Achse γ_x eine Reflexion an der Zeitachse γ_t und eine Reflexion an der Geschwindigkeitsachse γ_v vorgenommen wird.

Das bedeutet, dass eine Reflexion an σ_x im dreidimensionalen Fall im fünfdimensionalen Fall einer Reflexion an der Hyperebene $\gamma_x\gamma_t\gamma_v$ entspricht. Mithin sind dreidimensionale Vektoren mit fünfdimensionalen Trivektoren zu identifizieren:

$$\sigma_x := \gamma_x\gamma_v\gamma_t \qquad \{24\}$$

$$\sigma_y := \gamma_y\gamma_v\gamma_t \qquad \{25\}$$

$$\sigma_z := \gamma_z\gamma_v\gamma_t \qquad \{26\}$$

Damit werden Pauli-Matrizen als komplexe (4x4)-Matrizen dargestellt:

$$\sigma_x := \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 \\ 0 & \sigma_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \{27\}$$

$$\sigma_y := \begin{pmatrix} \sigma_y & 0 \\ 0 & \sigma_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix} \qquad \{28\}$$

$$\sigma_z := \begin{pmatrix} \sigma_z & 0 \\ 0 & \sigma_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \{29\}$$

Die Pauli-Algebra wird hier didaktisch einsichtig als Unteralgebra der Dirac-Algebra formuliert. Übertragen in die Koordinatensichtweise bedeutet dies, dass eindimensionale Vektoren des dreidimensionalen Raumes im fünfdimensionalen Raum dreidimensional ausgedehnten Trivektoren sind. Ein Einheitsvektor des dreidimensionalen Raumes entspricht somit einem Einheitswürfel des fünfdimensionalen Raums, wobei eine Kante als räumlich, die zweite als zeitlich und im Falle von Carmeli die dritte Würfelkante als geschwindigkeitsartig zu denken ist.

7. Die klassische vierdimensionale Raumzeit

Der Übergang von Carmelis fünfdimensionaler Raumzeitgeschwindigkeit zur klassischen vierdimensionalen Raumzeit kann ebenfalls über die Analyse der Operatoreneigenschaften ermittelt werden und liefert analog zu den Formeln {24} bis {26}die Beziehungen {30} bis {33}, da wiederum bei Reflexion im vierdimensionalen Kontext die fünfte (zwar im Hintergrund vorhandene, sich im Vierdimensionalen aber nicht bemerkbar machende Geschwindigkeits-) Komponente nicht einer Reflexion unterzogen werden darf.

$$\gamma_t^{*} = \gamma_t \gamma_v \qquad \{30\}$$

$$\gamma_x^{*} = \gamma_x \gamma_v \qquad \{31\}$$

$$\gamma_y^{*} = \gamma_y \gamma_v \qquad \{32\}$$

$$\gamma_x^{*} = \gamma_z \gamma_v \qquad \{33\}$$

Die vier Bivektoren γ_t^{*}, γ_x^{*}, γ_y^{*} und γ_z^{*} der fünfdimensionalen Raumzeitgeschwindigkeits-Welt entsprechen dann den Basisvektoren der klassischen Raumzeit mit der Metrik (–, +. +. +) im vierdimensionalen Fall.

Der Übergang von einer vierdimensionalen Raumzeit zum dreidimensionalen euklidischen Raum liefert nun ein Kriterium, um zu unterscheiden, ob man sich tatsächlich in einer vierdimensionalen oder aber fünfdimensionalen Welt befindet – oder ob die Welt sogar noch höherdimensionaler strukturiert ist.

In einer rein vierdimensionalen Welt gelten die Beziehungen, die Sobczyk in seinem Rückblick auf die Entwicklung der Geometrischen Algebra in den ersten Jahren prominent in [22, S. 1292] platziert:

$$\sigma_k = \gamma_k \gamma_0 \qquad \{34\}$$

In der Sternchen-Schreibweise dieses Beitrags für vierdimensionale Basisvektoren bedeutet dies

$$\sigma_x{}' = \gamma_x^{*} \gamma_t^{*} \qquad \{35\}$$

$$\sigma_y{}' = \gamma_y^{*} \gamma_t^{*} \qquad \{36\}$$

$$\sigma_z{}' = \gamma_z^{*} \gamma_t^{*} \qquad \{37\}$$

Mit Hilfe der Beziehungen {30} bis {33} ergibt sich somit:

$$\sigma_x{}' = \gamma_x \gamma_v \gamma_t \gamma_v = -\gamma_x \gamma_t \qquad \{38\}$$

$$\sigma_y{}' = \gamma_y \gamma_v \gamma_t \gamma_v = -\gamma_y \gamma_t \qquad \{39\}$$

$$\sigma_z{}' = \gamma_z \gamma_v \gamma_t \gamma_v = -\gamma_z \gamma_t \qquad \{40\}$$

Die drei gestrichenen euklidischen Basisvektoren einer rein vierdimensionalen Welt unterscheiden sich deutlich von den drei ungestrichenen euklidischen Basisvektoren, wie wir sie in einer fünfdimensionalen Welt (siehe {24} bis {26}) erhalten. Mit Hilfe dieses unterschiedlichen Transformationsverhaltens ergibt sich eine Möglichkeit, experimentell zu entscheiden, ob wir in einer vier- oder fünfdimensionalen Welt leben, und die schwache Wechselwirkung lässt grüßen.

8. Eine persönliche Einschätzung: Was haben Keller und Carmeli geleistet?

„Dass Newton Raum und Zeit quasi zur rechten Hand Gottes gesetzt hat und zwar auf den leer gewordenen Platz des von ihm von dort vertriebenen Gottessohnes, ist eine besondere Pikanterie der Geistesgeschichte. (...) Bekanntlich hat es dann einer ganz außerordentlichen Anstrengung bedurft, um Raum und Zeit aus diesem Olymp wieder herunterzuholen. Diese Arbeit wurde noch künstlich erschwert durch Kants philosophischen Versuch, den Zugang zu diesem Olymp für die menschliche Vernunft zu sperren“, schreibt Wolfgang Pauli [21, S. 219] in einem Brief an seinen Kollegen Markus Fierz.

An dieser Stelle ist zu fragen: Welche weiteren physikalischen Größen befinden sich noch in diesem, durch schulische und hochschulische Prägungen und Festigungen für die menschliche Vernunft gesperrtem Olymp? Keller und Carmeli geben ihre jeweils eigene, ganz spezielle Antwort auf diese Frage: Keller identifiziert die Wirkung als eine im Olymp vor relativistischen Nachstellungen geschützte Größe, Carmeli die Geschwindigkeit.

Die in Paulis prägnant-provokativer Analyse genannten Schritte gehen beide Wissenschaftler in waaghalsiger Geschwindigkeit nahezu synchron. In einem ersten Schritt stellen sie die Wirkung bzw. die Geschwindigkeit Raum und Zeit gleich und erheben sie damit im Sinne Newtons und Kants ins göttliche Olymp. Und das nur, um sie gleich darauf in einem zweiten Schritt wieder – relativistisch motiviert – aus diesem Olymp zu verbannen.

Diese nach Pauli „ganz außerordentliche Anstrengung“ ist tatsächlich eine physikalisch halsbrecherische Angelegenheit, die von den meisten Fachkolleginnen und Fachkollegen so nicht nachvollzogen wird. Letztlich kann auch hier nur jeweils das Experiment entscheiden, welche Art von Theoriebildung die geringsten Abweichungen von den von uns aufgefundenen physikalischen Phänomenen aufweist.

Es spricht derzeit einiges dafür, dass andere theoretische Ansätze diese Modellierung zwischen Theorie und Experiment besser bewältigen. Dennoch sind die Arbeiten von Keller und Carmeli wegweisend: Sie öffnen uns Brücken in eine andere Modellwelt, die bisher existierende Gedankenbarrieren einreist und noch nicht beschrittene didaktische Wege freilegt.

9. Literatur

[1] Behar, Silvia; Carmeli, Moshe (2000): Cosmological Relativity: A New Theory of Cosmology. In: International Journal of Theoretical Physics, 39 (2000), S. 1375 – 1396.

[2] Carmeli, Moshe; Malin, Shimon (2000): Theory of Spinors – An Introduction. World Scientific, Singapore.

[3] Carmeli, Moshe (2002): Cosmological Special Relativity. The Large-Scale Structure of Space, Time and Velocity. Second Edition, World Scientific, Singapore.

[4] Carmeli, Moshe (2006): Cosmological Relativity. The Special and General Theories for the Structure of the Universe. World Scientific, Singapore.

[5] Cartan, Élie (1981): The Theory of Spinors. Unveränderter Wiederabdruck der englischen Übersetzung, im Original erschienen 1937 unter dem Titel ‚Leçons sur la théorie des spineurs', Dover Publications, New York.

[6] Clifford, William Kingdon (1878): Applications of Grassmann's Extensive Algebra. In: American Journal of Mathematics, 1 (1878), S. 350 – 358.

[7] Doran, Chris; Lasenby, Anthony (2003): Geometric Algebra for Physicists, Cambridge University Press, Cambridge.

[8] Graßmann, Hermann Günther (1844): Die Wissenschaft der extensiven Größen oder die Ausdehnungslehre, eine neue mathematische Disciplin. Ersther Theil, die lineale Ausdehnungslehre enthaltend. Verlag Otto Wigand, Leipzig.

[9] Gull, Stephan; Lasenby, Anthony; Doran, Chris (1993): Imaginary Numbers are not Real – The Geometric Algebra of Spacetime. In: Foundations of Physics, 23 (1993), S. 1175 – 1201.

[10] Hestenes, David (2002): New Foundations for Classical Mechanics. 2. Auflage, Kluwer Academic Publishers, New York, Boston.

[11] Hestenes, David (2003): Reforming the Mathematical Language of Physics. Oersted Medal Lecture. In: American Journal of Physics, 71 (2003), S. 104 – 121.

[12] Hestenes, David (2003): Spacetime Physics with Geometric Algebra. In: American Journal of Physics, 71 (2003), S. 691 – 714.

[13] Horn, Martin Erik (2009): Vom Raum zur Raumzeit. In: Dietmar Höttecke (Hrsg.): Chemie- und Physikdidaktik für die Lehramtsausbildung, Beiträge zur Jahrestagung der GDCP in Schwäbisch Gmünd, Band 29, LIT-Verlag Dr. W. Hopf, Berlin, S. 455 – 457.

[14] Horn, Martin Erik (2011a): Grassmann, Pauli, Dirac – Special Relativity in the Schoolroom, In: Hans-Joachim Petsche, Albert C. Lewis, Jörg Liesen, Steve Russ (Hrsg.): From Past to Future – Graßmann's Work in Context, Birkhäuser-Verlag, Basel, Berlin, S. 435 – 450.

[15] Horn, Martin Erik (2011b): Die fünfdimensionale Welt der Kosmologischen Relativität. In: Dietmar Höttecke (Hrsg.): Naturwissenschaftliche Bildung als Beitrag zur Gestaltung partizipativer Demokratie, Beiträge zur Jahrestagung der GDCP in Potsdam, Band 31, LIT-Verlag Dr. W. Hopf, Berlin, S. 158 – 160.

[16] Kaku, Michio (1999): Hyperspace. A Scientific Odyssey through the 10th Dimension. Reissued as paperback edition in new covers, Oxford University Press, Oxford.

[17] Keller, Jaime (1999): The Geometric Content of the Electron Theory. Part II: Theory of the Electron from START. In: Advances in Applied Clifford Algebras, 9 (1999), S. 309 – 395.

[18] Keller, Jaime (2001): Theory of the Electron. A Theory of Matter from START. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston.

[19] Keller, Jaime (2010): Geometry and Space-Time. In: Advances in Applied Clifford Algebras, 20 (2010), S. 285 – 297.

[20] Nahin, Paul J.(1993): Time Machines. Time Travel in Physics, Metaphysics, and Science Fiction. AIP Press & Springer-Verlag, New York 1993.

[21] Pauli, Wolfgang (1994): Writings on Physics and Philosophy, herausgegeben von Charles P. Enz und Karl von Meyenn. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.

[22] Sobczyk, Garret (1993): David Hestenes – The Early Years. In: Foundations of Physics, 23 (1993), S. 1291 – 1293.

[23] Vianna, J.D.M.; Trindade, M.A.S.; Fernandes, M.C.B (2008): Algebraic Criteria for Entanglement in Multipartite Systems. In: International Journal of Theoretical Physics, 47 (2008), S. 961 – 970.