Nicht-harmonische Schwingungen am Huygens-Raebiger Pendel

Ein computergestützter Versuch für das physikalische Praktikum

Martina Brandenburger, Silke Mikelskis-Seifert, Lutz Kasper

Pädagogische Hochschule Freiburg, Abteilung Physik, Kunzenweg 21, 79117 Freiburg
martina.brandenburger@ph-freiburg.de, silke.mikelskisseifert@ph-freiburg.de, lutz.kasper@ph-freiburg.de

Kurzfassung

In der Lehramtsausbildung haben im physikalischen Praktikum zunehmend computergestützte Versuche ihren Platz gefunden. Hierbei ist nicht nur die computergestützte Messwertaufnahme von Vorteil. Die Studierenden haben auch bei der Auswertung die Möglichkeit sich mit vergleichsweise geringem Aufwand mit mathematischen Modellierungen von physikalischen Sachverhalten zu beschäftigen.
Aus einer Reihe entwickelter Versuche für das physikalische Praktikum an der Pädagogischen Hochschule Freiburg beschäftigt sich ein Versuch mit den Unterschieden zwischen einer harmonischen Schwingung und einer nicht-harmonischen Schwingung. Es soll mit diesem Versuch gezeigt werden, dass für große Winkel ein physikalisches Pendel keine harmonische Schwingung vollzieht und dass dieser Effekt bei längeren Pendeln größer ist als bei kürzeren. In diesem Zusammenhang werden die Grenzen einer mathematischen Modellierung mit Hilfe eines CAS veranschaulicht.
Als physikalisches Pendel wird das Huygens-Raebiger Pendel verwendet – ein Pendel das sowohl gekoppelt als ein Pendel schwingen kann, als auch entkoppelt als sieben „kleine“, sich durch die Länge der Stange unterscheidende, Pendel.
Im Folgenden werden der Versuch und die Modellierung der Messergebnisse vorgestellt.

1. Vorstellung der Hintergründe

Im Rahmen einer wissenschaftlichen Hausarbeit für die erste Staatsprüfung des Lehramts an Realschulen wurde eine Reihe von computergestützten Versuchen für das physikalische Praktikum entwickelt, die sich an Studierende der Physik an der Pädagogischen Hochschule Freiburg richten.

Für die entwickelten Experimente wurde das TI-Nspire™ CAS als Werkzeug ausgewählt. Das TI-Nspire™ CAS bietet leistungsfähige Methoden und Hilfsmittel, um nicht nur Messwerte aufzunehmen und darzustellen, sondern auch mit Hilfe mathematischer Werkzeuge zu bearbeiten und zu interpretieren, wodurch es als interessante Möglichkeit gesehen werden kann, Physik und Mathematik im physikalischen Praktikum miteinander zu verbinden.

Als Sensor wurde ein „Vernier Low-g Accelerometer“ Beschleunigungssensor verwendet, der nicht über den Umweg der Differentiation eines Weg-Zeit-Zusammenhangs arbeitet, sondern direkt die Beschleunigung misst.

Der Versuch beschäftigt sich mit den Unterschieden zwschen einer harmonischen Schwingung und einer nicht-harmonischen Schwingung. Die Studierenden sollen dafür sensibilisiert werden, dass (physikalische) Pendel nur für kleine Winkel eine harmonische Schwingung vollziehen und dieser Effekt beobachtet und aufgezeichnet werden kann. Es kann so plausibel gemacht werden, dass eine Näherung nur in einem bestimmten Bereich Gültigkeit besitzt, auch wenn darüber oftmals schnell hinweg gegangen wird. Durch die Beschäftigung mit den Grenzen einer mathematischen Modellierung eines physikalischen Sachverhalts (hier: Schwingung als harmonische Schwingung) erhalten die Studierenden Einblick in die Problematik der Angemessenheit eines Modells: Für begrenzte Situationen mag ein Modell angemessen sein, geht man über diese Grenzen jedoch hinaus, muss das Modell angepasst werden. Über diese Erfahrung mit dem Modellcharakter einer naturwissenschaftlichen Theorie wird für die Studierenden die Basis für ein angemessenes Verstehen der Physik dahinter gelegt (vgl. Mikelskis-Seifert, 2004).

Das CAS wird von den Studierenden als Möglichkeit zu Schaffung eines Vergleichs der Messungen mit einem Modell kennengelernt. Über den Vergleich der Messwerte mit einer Sinuskurve kann entschieden werden, wie angemessen die Beschreibung als eine harmonische Schwingung ist.

2. Physikalische Grundlagen

2.1. Das Huygens-Raebiger Pendel

Da als Material für die Untersuchung von nicht-harmonischen Schwingungen das sogenannte „Huy-

gens-Raebiger Pendel“ verwendet wird, wird im Folgenden selbiges kurz vorgestellt.

Ausgangspunkt für das Huygens-Raebiger Pendel war die Frage nach der Länge eines Fadenpendels, das die gleiche Schwingungsdauer besitzt wie ein vorgegebenes physikalisches Pendel, also die Suche nach dem isochronen mathematischen Pendel. Christian Huygens war der erste, der im 17. Jahrhundert eine Lösung für dieses Problem fand.

Es liegt die Vermutung nahe, dass man einfach ein Fadenpendel benötigt, das von der Länge der Lage des Schwerpunktes des physikalischen Pendels entspricht. Man betrachtet also das Pendel vereinfacht als einen Massenpunkt. Leider erweist sich eine solche Vereinfachung bereits bei einem einfachen linearen Pendel, besonders wenn es nicht an seinem Ende, sondern irgendwo dazwischen aufgehängt ist, als nicht praktikabel.

Christoph Raebiger (1985) hat die Bearbeitung dieses Problems in seinem Aufsatz „Sieben Pendel in eins“ ausführlich vorgestellt.

Für die Lösung des Problems muss man das Pendel nicht nur über einen Massenpunkt darstellen, sondern in eine Vielzahl von Massenpunkten zerlegen. Anschaulich bedeutet dies, dass man ein Pendel über mehrere kleinere, sich über die Pendellänge unterscheidende, sonst baugleiche Pendel darstellt, die gekoppelt als ein Pendel schwingen, aber auch einzeln (vgl. Abb. 1).

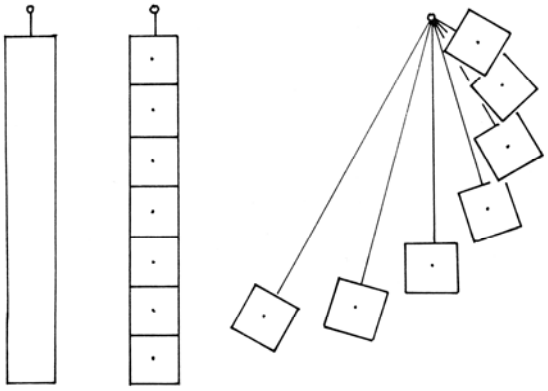

Abb. 1: Huygens-Raebiger Pendel schematisch (aus: Raebiger (1985))

Raebiger hat sich zwar ausführlich mit diesem „zerstückelten“ Pendel und seinen Möglichkeiten zum Verständnis zur Physik beschäftigt, es aber nie gebaut. Helmut Mikelskis entwickelte auf der Grundlage der Ideen von Raebiger die Bauanleitung und ließ es dann bauen. 1995 wurde ein Prototyp eines solchen Pendels in Untersuchungen mit Studierenden eingesetzt (s. h. Abb. 2, Mikelskis & Seifert, 1995). Die Fragestellung, die dahinter stand, war, ob und inwiefern Studierende das Verhalten des „Huygens-Rabiger Pendels“ voraussagen und erklären können.

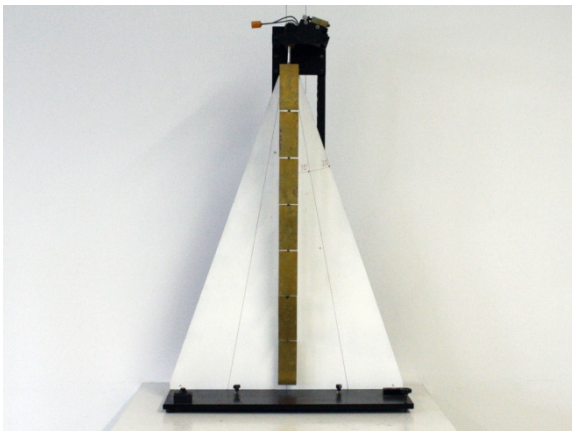

Abb. 2: Huygens-Raebiger Pendel

Das Pendel ist seit 2010 in der Sammlung der Pädagogischen Hochschule Freiburg vorhanden und wird auch in den fachwissenschaftlichen Veranstaltungen eingesetzt. Die Möglichkeit der Verwendung im physikalischen Praktikum zur Betrachtung nichtharmonischer Schwingungen stellt eine Erweiterung des Einsatzes des Pendels dar.

2.2. Harmonische Schwingungen

Eine große Kategorie periodischer Bewegungen sind die harmonischen Schwingungen. Harmonische Schwingungen sind dadurch gekennzeichnet, dass die für die Schwingung verantwortliche rückstellende Kraft F_R proportional zur Auslenkung s ist und der Bewegungsrichtung entgegengesetzt. Also $F_R \sim -s$. Somit muss für eine harmonische Schwingung zwischen s und $\ddot{s}$ folgender Zusammenhang bestehen: $\ddot{s} \sim -s$. Durch die Beschreibung

$$s(t) = \hat{s} \cdot \sin(\omega \cdot t) \qquad \{1\}$$

kann die Differentialgleichung gelöst werden.

2.3. Physikalisches Pendel

Es ist sinnvoll ein *physikalisches Pendel* als Grundlage zur Beschreibung zu wählen, das heißt einen schwingenden Körper, der nicht in seinem Schwerpunkt aufgehängt ist. Analog zum mathematischen Pendel wird statt einer rückstellenden Kraft nun das rückstellende Drehmoment betrachtet (vgl. Abb. 3).

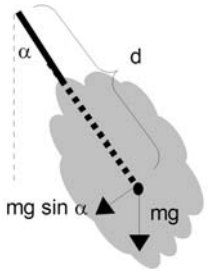

Abb. 3: Skizze physikalisches Pendel

Das Drehmoment M ergibt sich wie folgt:

$$M = -F_R \cdot d = -m \cdot g \cdot d \cdot \sin\alpha \qquad \{2\}$$

(m: Masse des Körpers; g: Erdbeschleunigung; d: Abstand des Schwerpunkts vom Aufhängepunkt; α: Auslenkung aus der Ruhelage).

Um zu zeigen, dass es sich um eine harmonische Schwingung handelt, wird nun versucht, einen Zusammenhang zwischen Auslenkung (α) und der (Winkel)Beschleunigung ($\ddot{\alpha}$) herzustellen. Es gilt:

$$M = \mathrm{I} \cdot \ddot{\alpha} \qquad \{3\}$$

(I: Trägheitsmoment).

Somit ergibt sich folgende Gleichung:

$$-m \cdot g \cdot d \cdot \sin\alpha = \mathrm{I} \cdot \ddot{\alpha} \qquad \{4\}$$

Nutzt man die Taylor - Reihenentwicklung der Sinusfunktion[1], kann für kleine Auslenkungen ($\alpha < 5°$) angenommen werden, dass $\sin\alpha = \alpha$. Somit ergibt sich folgende Differentialgleichung

$$-m \cdot g \cdot d \cdot \alpha = \mathrm{I} \cdot \ddot{\alpha} \qquad \{5\}$$

für die ein sinusförmiger Verlauf der Auslenkung α (und somit auch für die Beschleunigung als zweite Ableitung der Auslenkung) eine geeignete Lösung darstellt. Bei kleinen Auslenkungen vollzieht also ein physikalisches Pendel eine harmonische Schwingung.

Betrachtet man jedoch größere Auslenkungen, so kann die Näherung $\sin\alpha = \alpha$ nicht einfach angewandt werden. Die Funktion, die die Elongation (und somit auch Geschwindigkeit und Beschleunigung) beschreibt, kann somit kein Sinus sein, sondern nur eine dem Sinus ähnliche periodische Funktion.

3. Aufbau und Durchführung des Versuchs

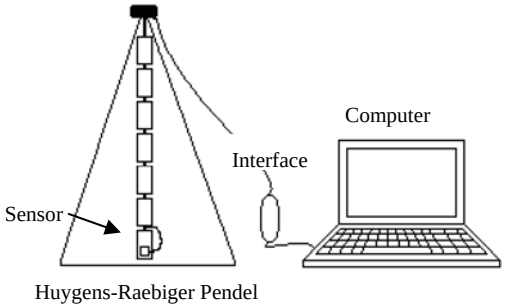

Abb. 4: Skizze des Versuchsaufbaus

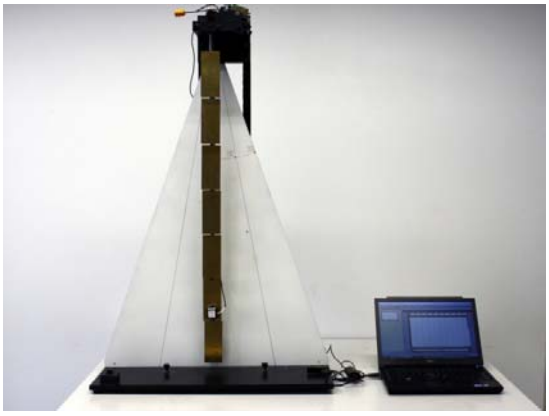

Abb. 5: Foto des Versuchsaufbaus

3.1. Zu untersuchende Hypothesen

Folgende Hypothesen sollen mit den Messungen und der darauf folgenden Modellierung geprüft werden:

- Das Huygens-Raebiger Pendel führt bei großer Auslenkung (≥ 20°) keine harmonische Schwingung aus.
- Dieser Effekt ist bei langen Pendeln größer als bei kürzeren.

3.2. Durchführung

Das Huygens-Raebiger Pendel ermöglicht Messungen an unterschiedlichen Pendellängen bei sonst baugleichen Pendeln. Dieser Versuch wird mit den drei längsten Pendeln (im Folgenden Pendel 5 – 7; gezählt von oben) durchgeführt.

Für die Messung sollen die *Zeit* und die *Beschleunigung* tangential zur Bahnkurve gemessen werden.

4. Modellierung der Messergebnisse

Für die Modellierung der Messergebnisse lässt man sich aus den Messwerten Streudiagramme erstellen, die auf ihre Ähnlichkeit mit einer Sinusfunktion untersucht werden. Hierzu wird über das Streudiagramm einer Messung eine Funktion der Form

$$f(x) = a \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{b} \cdot x - c\right) \qquad \{6\}$$

gelegt, in die direkt wichtige Größen der Schwingung einfließen: a ist die Amplitude der Schwingung, b die Periodendauer und die c Verschiebung entlang der x-Achse.

Die Aufgabe der Studierenden ist es nun zunächst, geeignete Werte für a, b und c zu finden, so dass der Sinus das Streudiagramm der einzelnen Messung möglichst gut darstellt. Empfehlenswert ist, die für jede Schwingung charakteristische Periodendauer b anzupassen. Der Ausgangspunkt hierfür ist die grobe Abschätzung der Periodendauer mit einer Stoppuhr während der Aufnahme der Messwerte. Um zu prüfen, ob ein geeigneter Wert für b gefunden wurde, wird mit Hilfe von c die Sinusfunktion so entlang der x-Achse verschoben, dass die Nulldurchgänge verglichen werden können. Da es sich bei jeder Schwingung, ob harmonisch oder nicht, um einen periodischen Vorgang handelt, sollten die Nulldurchgänge bei einer geeigneten Periodendauer alle einigermaßen übereinstimmen, weshalb man die „Passung“ sowohl bei einigen ausgewählten Nulldurchgängen (vgl. Abb. 6), als auch über die gesamte Messung hinweg (vgl. Abb. 7) überprüfen sollte.

[1] $\sin\alpha = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{\mathrm{n}} \cdot \frac{\alpha^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{\alpha^1}{1!} - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - \cdots$

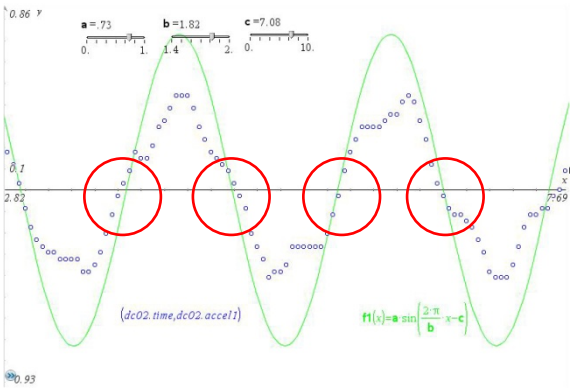

Abb. 6: Pendel 7; Ausgewählte Nulldurchgänge

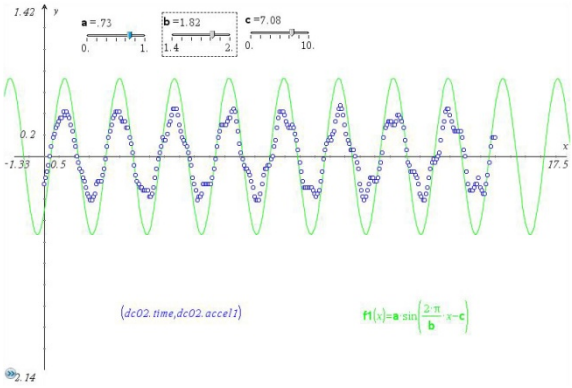

Abb. 7: Pendel 7; Nulldurchgänge gesamte Messung

Als nächstes wird die Amplitude a so eingestellt, dass sie zu den Messergebnissen passt (vgl. Abb. 8, Abb. 9 und Abb. 10). Nachdem die Sinusfunktion bestmöglich an die Messergebnisse angepasst wurden, soll nun von den Studierenden analysiert werden, inwiefern und warum sich die Daten der Messung vom Sinus unterscheiden. Je größer die Ähnlichkeit zur Sinusfunktion ist, als desto „harmonischer“ kann die Schwingung angesehen werden.

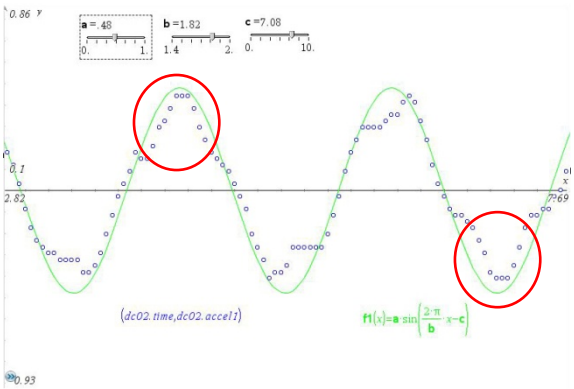

Abb. 8: Anpassung der Amplitude an Pendel 7

Beim Pendel 7 (vgl. Abb. 8) ist gut zu erkennen, dass es sich um keine harmonische Schwingung handelt. Die Punkte des Streudiagramms liegen im Vergleich zu einem Sinus in der Umgebung eines Hochpunktes enger zusammen, der Sinus ist quasi „zugespitzt“.

Physikalisch lässt sich diese abzulesende größere Änderung der Beschleunigung (im Folgenden „Zuspitzung“) an den Umkehrpunkten der Schwingung durch das Drehmoment erklären. Das Drehmoment übernimmt die rückstellende Wirkung für die Schwingung und verhält sich wie folgt:

$$M = -m \cdot g \cdot d \cdot \sin\alpha \qquad \{7\}$$

M hängt mit der (Winkel)Beschleunigung linear zusammen ($M = \mathrm{I} \cdot \ddot{\alpha}$), weshalb im Folgenden stellvertretend für die Änderung der Beschleunigung die Änderung des Drehmoments betrachtet wird. Die momentane Änderung des Drehmoments ist:

$$\dot{M} = -m \cdot g \cdot d \cdot \cos\alpha \qquad \{8\}$$

Sie ist also vom $-\cos\alpha$ abhängig, welcher im Bereich 0° bis 90° streng monoton steigend ist. Somit ist die Änderung des Drehmoments bei kleinen Winkeln kleiner als bei großen Winkeln. Dies gilt damit auch für die Änderung der (Winkel)Beschleunigung.

Da es sich um eine Schwingung handelt, bei der es zwischen „rechts“ und „links“ keine Unterschiede gibt, sollten sich idealerweise die Werte ausgehend von den Hochpunkten achsensymmetrisch verhalten. Im oberen Beispiel ist dies nur bedingt der Fall, was sich vermutlich durch die Überlagerung einer zur eigentlichen Schwingung orthogonalen Schwingung erklären lässt. Durch die Länge des Pendels und die nicht vollkommen starre Befestigung lässt sich eine solche Schwingung aber kaum vermeiden.

Des Weiteren trägt diese Überlagerung zur Verstärkung des Effekts des „Zuspitzens“ bei.

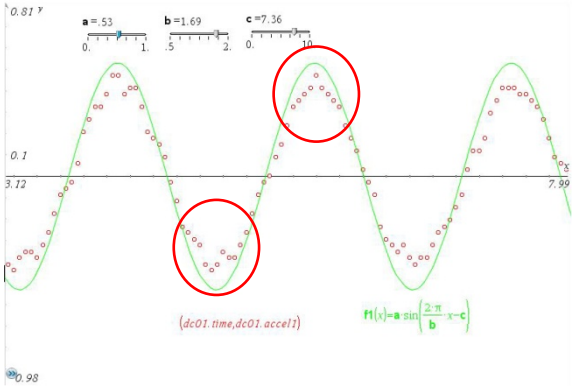

Abb. 9: Anpassung der Amplitude an Pendel 6

Auch beim Pendel 6 (vgl. Abb. 9) lässt sich an den Hochpunkten eine „Zuspitzung“ der Werte erkennen, die über den Sinus nicht beschrieben werden kann. Da es sich jedoch um ein kürzeres Pendel handelt, ist dieser Effekt erwartungsgemäß nicht mehr ganz so stark ausgeprägt wie bei Pendel 7. Auch dies lässt sich aus den Überlegungen zum Zusammenhang zwischen Drehmomentsänderung und Beschleunigungsänderung erklären: Da $\dot{M}$ von der Länge des Pendels (in Form vom Abstand vom Schwerpunkt zur Aufhängung) abhängt (s. h. Formel {8}), ist dieser Effekt umso größer, je länger das Pendel ist. Zudem fällt bei kürzeren Pendeln die mangelnde Starrheit weniger ins Gewicht, weshalb der Effekt der überlagernden Schwingung abnimmt.

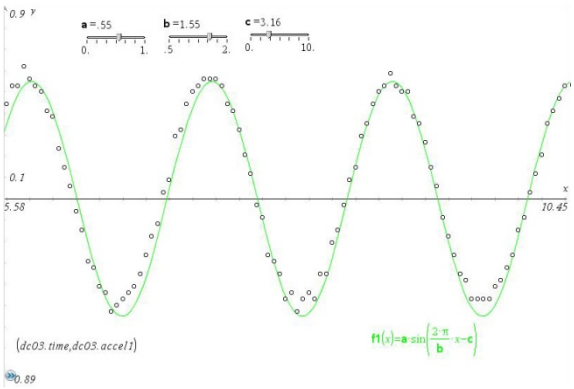

Abb. 10: Anpassung der Amplitude an Pendel 5

Erwartungsgemäß ist dieser Effekt der „Zuspitzung“ am Pendel 5 (vgl. Abb. 10) noch weniger zu beobachten – man kann schon fast sagen, dass es sich um eine harmonische Schwingung handelt.

5. Reflexion und Ausblick

Mit der Modellierung konnten die Hypothesen aus 3.1 bestätigt werden. Es wurde gezeigt, dass ein physikalisches Pendel bei großen Auslenkungen keine harmonische Schwingung vollzieht und dass dieser Effekt deutlich sichtbar von der Pendellänge abhängt.

Der Computereinsatz ergibt für die Studierenden einige Vorteile. Nicht-harmonische Schwingungen lassen sich, im Gegensatz zu harmonischen Schwingungen, nicht so leicht mit relativ einfachen mathematischen Mitteln beschreiben. Eine Bearbeitung und Reflexion nicht-harmonischer Schwingungen mit „Papier und Bleistift“ wäre sehr aufwändig. Durch die Auswertung mit dem CAS wird den Studierenden jedoch ein einfacher und direkter Vergleich der Messwerte mit einer Sinusfunktion ermöglicht. Die Studierenden erhalten so einen einfachen qualitativen Zugang zu den Grenzen einer mathematischen Modellierung.

Der Versuch – wie auch andere Versuche aus der entwickelten Reihe – wurde in das physikalische Praktikum an der Pädagogischen Hochschule Freiburg integriert und stößt bei den Studierenden auf positives Feedback.

6. Literatur

[1] Raebiger, C. (1985): Sieben Pendel in eins – ein Lehrstück –. In: physica didactica. Jahrgang 12, Heft 2. 3 – 16.

[2] Mikelskis, H./ Seifert, S. (1995): Nochmals: Das „Huygens-Raebiger-Pendel“ - nun real gebaut, und wie Studenten es verstehen. In: Behrendt, H. (Hrsg.): Zur Didaktik der Physik und Chemie - Probleme und Perspektiven. Alsbach. 204 – 206.

[3] Mikelskis-Seifert, S. (2004): Über Modelle lernen - Empirische Erforschung einer theoriegeleiteten Konzeption und Konsequenzen für die Unterrichtspraxis. In: Pitton, A. (Hrsg.): Chemie- und physikdidaktische Forschung und naturwissenschaftliche Bildung. LIT Verlag Münster. 14 – 29.