

Kartesische Ovale mit einer Tabellenkalkulation

Roger Erb

Goethe-Universität Frankfurt, Institut für Didaktik der Physik, Max-von-Laue Str.1, 60438 Frankfurt

roger.erb@physik.uni-frankfurt.de

Kurzfassung

Mit Hilfe einer Erweiterung des Fermat-Prinzips lässt sich die Entstehung reeller und auch virtueller Abbildungen nachvollziehen. Hierfür wird die optische Weglänge unter Berücksichtigung der Brechzahlen der beteiligten Medien berechnet, wobei im Falle virtueller Bilder eine der Brechzahlen als negativ angenommen wird. Für die Berechnung kann eine Tabellenkalkulation verwendet werden, wodurch die Form der spiegelnden oder brechenden Grenzfläche, das so genannte kartesische Oval, unmittelbar erkennbar wird.

1. Das Fermat-Prinzip zur Beschreibung der optischen Abbildung

Hauptsächlicher Gegenstand des Themas „Optische Abbildung“ im Physikunterricht ist die Konstruktion reeller und virtueller Bilder an Spiegeln und Linsen. Dabei wird die gekrümmte Form dieser abbildenden Objekte oft als gegeben hingenommen. Bei anderer Schwerpunktsetzung kann gerade dies aber auch der wesentliche Unterrichtsinhalt sein.

Ausgehend von einer Lochkamera wird hierzu das Charakteristische einer optischen Abbildung untersucht: Das Licht eines Objekts erreicht offenbar nicht alle Punkte auf dem Schirm gleichermaßen. In diesem einfachsten Fall wird das durch die Lochblende erreicht: Sie nimmt das Licht, das von dem Objekt auf den Schirm fällt, in den meisten Bereichen weg, so dass nur kleine Stellen von jedem Objektpunkt beleuchtet werden.

Die Ausbreitung des Lichtes über einen Spiegel kann auf einfache Weise mit dem Fermat-Prinzip beschrieben werden. Vereinfacht ausgedrückt, nimmt das Licht denjenigen Weg zwischen einem Punkt *A* und einem Punkt *B* über den Spiegel, der im Vergleich zu möglichen Nachbarwegen am kürzes-

ten ist (Abb. 1). Auch die Brechung lässt sich auf diese Weise verstehen. Hierzu wird der in jedem Medium zurückgelegte Weg *l* mit der jeweiligen Brechzahl *n* gewichtet. Als die so genannte optische Weglänge *OWL* ergibt sich dann im Fall einer Grenzfläche zwischen zwei Medien

$$OWL = n_1 l_1 + n_2 l_2 .$$

Das Fermat-Prinzip lautet dann in einer vereinfachten Form: Das Licht nimmt zwischen zwei Punkten den Weg mit der kürzesten optischen Weglänge. Gleichbedeutend ist die Formulierung: Das Licht nimmt zwischen zwei Punkten den Weg, für den es bei der Ausbreitung die kürzeste Zeit benötigt.

Nun kann der Spiegel aus Abbildung 1 so gebogen werden, dass das Licht auf vielen Wegen zu *B* kommt. Beim Biegen werden die benachbarten Wege zunehmend kürzer, bis schließlich ein Hohlspiegel entsteht, bei dem alle Wege zwischen *A* und *B* gleich lang sind (Abb. 2). Als Erweiterung zum Fermat-Prinzip kann daher festhalten werden: Wenn mehrere optisch gleich lange Wege zwischen zwei Punkten bestehen, nimmt das Licht all diese.

Dadurch wird wie im Fall der Lochblende ein kleiner Bereich des Raums oder eine Stelle auf einem

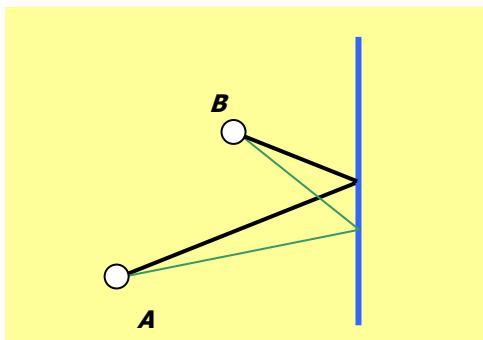


Abb. 1: Reflexion am ebenen Spiegel.

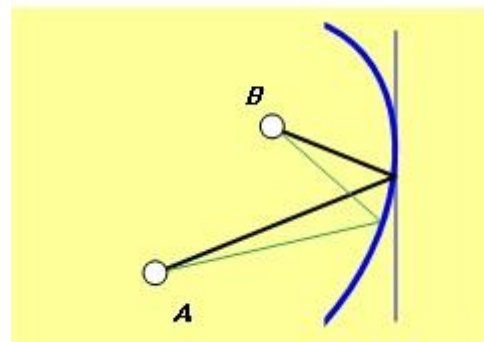


Abb. 2: Reflexion am gekrümmten Spiegel.

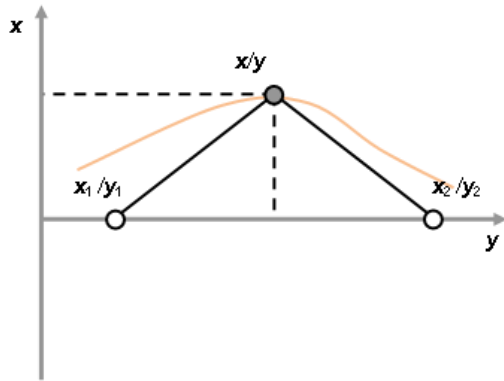


Abb. 3: Konstruktion des kartesischen Ovals für die Reflexion

Schirm stärker beleuchtet.

Das Fermat-Prinzip kann somit verwendet werden, um die Form von Spiegeln oder Linsen zu berechnen, mit denen das Licht eines Objektpunktes O in einem anderen Punkt gesammelt wird [1]. Dieser Punkt ist dann der Bildpunkt B des betreffenden Objektpunktes, und die Form wird als kartesisches Oval bezeichnet. Abbildung 3 veranschaulicht, wie hierfür in der Ebene die Form der Spiegelkurve (orange) bestimmt wird. Die Längen der beiden Wegabschnitte werden hierzu mit den angegebenen Koordinaten als Dreiecksseiten berechnet. Für die Berechnung an einem Spiegel wird bei dieser Formulierung für beide Brechzahlen der Wert 1 angenommen.

Dies ist zwar umständlich, aber einfach; daher kann die Berechnung in genau dieser Weise von einer Tabellenkalkulation übernommen werden. Hierfür werden dem Objektpunkt O und dem Bildpunkt B jeweils ein Tabellenfeld zugewiesen (Abb. 4), und alle anderen Tabellenfelder werden als Punkte eines möglichen kartesischen Ovals angesehen. In jedes Tabellenfeld wird also als Formel die Berechnung der OWL von O nach B über dieses Tabellenfeld

G11																	
=B\$2*WURZEL((\$G\$2-G\$4)^2+\$A1^2)+\$I																	
A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	
1	Cartesisches Oval										R. Erb						
2	n1	1	n2	1	x1	0.4	x2	1	Objekt- und Bildpunkt								
3																	
4		0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
5	0.8	2.2	2.1	2	1.9	1.8	1.7	1.7	1.7	1.7	1.8	1.9	2	2.1	2.2	2.3	
6	0.7	2	1.9	1.8	1.7	1.6	1.6	1.5	1.5	1.5	1.6	1.6	1.7	1.8	1.9	2	2.2
7	0.6	1.9	1.8	1.6	1.5	1.4	1.4	1.4	1.3	1.4	1.4	1.4	1.5	1.6	1.8	1.9	2
8	0.5	1.8	1.6	1.5	1.4	1.3	1.2	1.2	1.2	1.2	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.8	1.9
9	0.4	1.6	1.5	1.3	1.2	1.1	1.1	1	1	1	1.1	1.1	1.2	1.3	1.5	1.6	1.8
10	0.3	1.5	1.4	1.2	1.1	1	0.9	0.9	0.8	0.9	0.9	1	1.1	1.2	1.4	1.5	1.7
11	0.2	1.5	1.3	1.1	1	0.8	0.8	0.7	0.7	0.8	0.8	1	1.1	1.3	1.5	1.7	
12	0.1	1.4	1.2	1	0.8	0.7	0.7	0.6	0.6	0.7	0.7	0.8	1	1.2	1.4	1.6	1.8
13	0	1.4	1.2	1	0.8	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.8	1	1.2	1.4	1.6	1.8
14	-0.1	1.4	1.2	1	0.8	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.8	1	1.2	1.4	1.6	1.8
15	-0.2	1.5	1.3	1.1	1	0.8	0.8	0.7	0.7	0.8	0.8	1	1.1	1.3	1.5	1.7	
16	-0.3	1.5	1.4	1.2	1.1	1	0.9	0.9	0.8	0.9	0.9	1	1.1	1.2	1.4	1.5	1.7
17	-0.4	1.6	1.5	1.3	1.2	1.1	1.1	1	1	1.1	1.1	1.2	1.3	1.5	1.6	1.8	1.9
18	-0.5	1.6	1.5	1.4	1.3	1.2	1.2	1.2	1.2	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.8	1.9	2
19	-0.6	1.9	1.8	1.6	1.5	1.4	1.4	1.4	1.3	1.4	1.4	1.4	1.5	1.6	1.8	1.9	2
20	-0.7	2	1.9	1.8	1.7	1.6	1.6	1.5	1.5	1.5	1.6	1.6	1.7	1.8	1.9	2	2.2
21	-0.8	2.2	2.1	2	1.9	1.8	1.7	1.7	1.7	1.7	1.8	1.9	2	2.1	2.2	2.3	
22	-0.9	2.3	2.2	2.1	2	1.9	1.9	1.9	1.9	1.9	2	2	2	2.1	2.2	2.3	2.5
23	-1	2.5	2.4	2.3	2.2	2.2	2.1	2.1	2.1	2.1	2.1	2.2	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6
24	-1.1	2.7	2.6	2.5	2.4	2.4	2.3	2.3	2.3	2.3	2.4	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9
25	-1.2	2.8	2.7	2.7	2.6	2.6	2.5	2.5	2.5	2.5	2.6	2.6	2.7	2.7	2.8	2.9	3
26	-1.3	3	2.9	2.8	2.8	2.7	2.7	2.7	2.7	2.7	2.7	2.8	2.8	2.9	3	3.1	

Abb. 4: Berechnung der Länge der Lichtwege in der Tabellenkalkulation

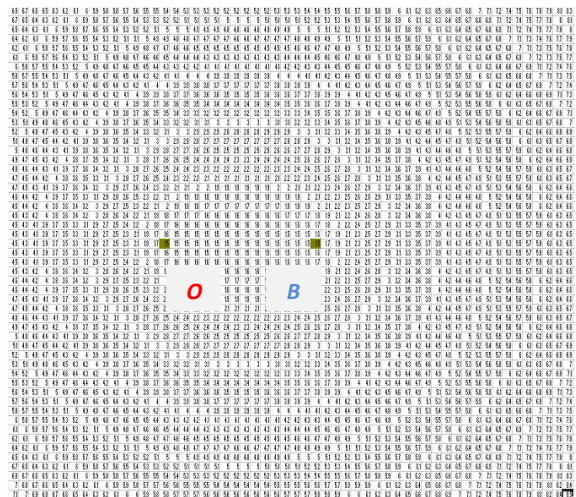


Abb. 5: Kartesische Ovale für das reelle Bild bei der Reflexion.

gelegt. Die Tabellenfelder, die bei der Berechnung denselben Wert bekommen, sind somit Bestandteile eines kartesischen Ovals.

Durch geeignet eingestellte Rundung wird der Inhalt mancher Tabellenfelder ohne Dezimalstelle angezeigt; in Abbildung 4 sind dies unter anderem diejenigen mit dem Wert „1“. Das von ihnen gebildete Oval ist daher besonders auffällig.

2. Die reelle Abbildung

Abbildung 5 veranschaulicht dieselbe Situation in einem größeren Tabellenbereich. Auch ohne die Werte der einzelnen Tabellenfelder auslesen zu müssen, zeigt sich, dass das kartesische Oval für die Abbildung mit einem Spiegel die Ellipse ist. Mehrere solcher Ellipsen, die jeweils O und B als ihre beiden Brennpunkte haben, sind zu erkennen.

Für zwei Medien mit unterschiedlichen Brechzahlen kommt es an der Grenzfläche zur Brechung. Das kartesische Oval für die reelle Abbildung liegt dann zwischen O und B (Abb. 6).

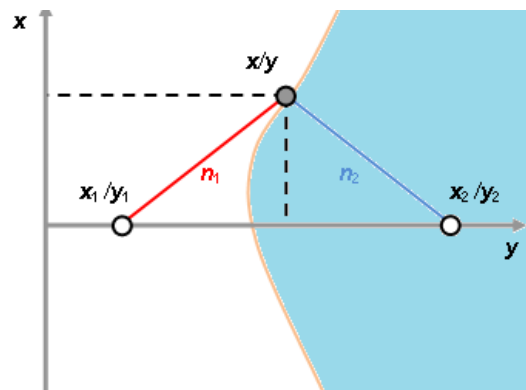


Abb. 6: Konstruktion des kartesischen Ovals für die Brechung.

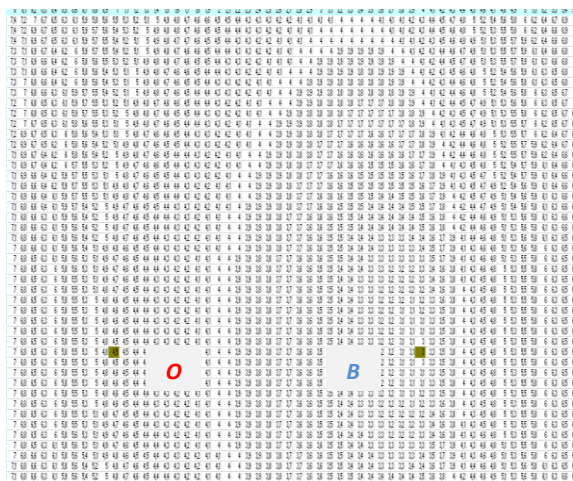


Abb. 7: Das kartesische Oval für das reelle Bild bei der Brechung.

Abbildung 7 zeigt diese Grenzfläche für $n_1 = 1,0$ und $n_2 = 1,5$, wobei B im optisch dichteren Medium liegt. Wie erwartet ergibt sich eine konvex gekrümmte Grenzfläche. Zu beachten ist, dass lediglich der Teil des Ovals, bei dem der Lichtweg von O kommend vollständig im optisch dünneren und zu B gehend vollständig im optisch dichteren Medium liegt, die geforderte Bedingung erfüllt.

Diese und die folgenden Abbildungen wurden horizontal so weit gestauch, dass die einzelnen Tabellenfelder quadratisch wurden, um einen realistischen Eindruck von der Kurvenform zu geben.

3. Virtuelle Bildpunkte

Da das Fermat-Prinzip die optische Länge von Lichtwegen vergleicht, umfasst es zunächst nicht die Entstehung virtueller Bilder. Es kann jedoch für diese Aufgabe erweitert werden, wenn man negative Brechzahlen zulässt. Im Fall der Reflexion werden

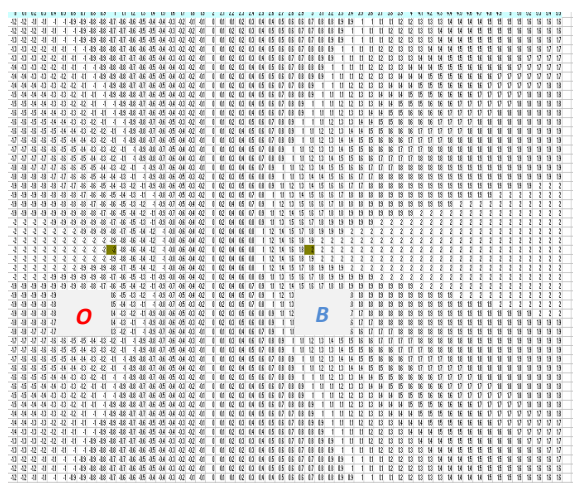


Abb. 8: Kartesische Ovale für das virtuelle Bild bei der Reflexion.

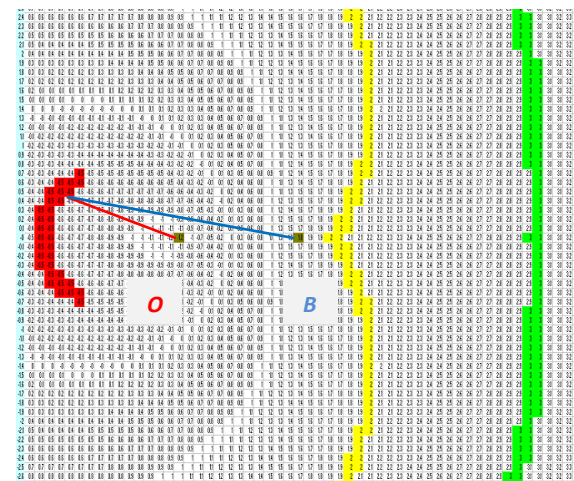


Abb. 9: Kartesische Ovale für das virtuelle Bild bei der Brechung.

hierbei $n_1 = 1$ und $n_2 = -1$, und es entstehen die in Abbildung 8 erkennbaren kartesischen Ovale. Die gerade Linie in der Mitte zwischen O und B entspricht dem „Oval“ des ebenen Spiegels. Alle Lichtwege über ihn zwischen O und B sind im Sinne der oben gemachten Erweiterung gleich lang, nämlich 0. Näher an O ist das Oval des Hohlspiegels, der O in B abbildet; erwartungsgemäß liegt B weiter hinter dem Spiegel, als O davor. Weiter rechts ergibt sich das Oval des Wölbspiegels.

Für das virtuelle Bild an einer brechenden Grenzfläche ($n_1 = 1,5; n_2 = -1,0$) ergeben sich Ovale, wie sie in Abbildung 9 zu sehen sind. Zur besseren Verdeutlichung sind drei davon nach der Berechnung eingefärbt worden. Blickt man von links auf O , so ist die rote Kurve eines der Ovale, das O in B virtuell abbildet. Beispielhaft ist ein Lichtweg von O zum Oval rot eingezeichnet. Dieser Weg wird mit der Brechzahl $n_1 = 1,5$ gewichtet. Der blaue Weg zwischen dem Oval und B wird mit $n_2 = -1,0$ angerechnet. Die Situation zeigt das Oval, mit dem von links auf ein Objekt im optisch dichteren Medium geblickt wird; wie das virtuelle Bild an einer Sammellinse liegt B hinter O . Von rechts blickend erhält man das gelbe Oval, das in der Nähe der optischen Achse dem Blick in eine Zerstreuungslinse entspricht. Hierbei liegt B dichter als O . Schließlich zeigt das grüne Oval (Blick von rechts) B als den Ort des virtuellen Bildes, in den O beim Blick auf eine (in der Nähe der optischen Achse) ebene Grenzfläche angehoben erscheint.

4. Zusammenfassung

Die Berechnungen eröffnen auf die gezeigte Weise die Möglichkeit, alle Abbildungssituationen mit nur einem Grundgedanken, dem Fermat-Prinzip, zu entwickeln. Die Verwendung einer Tabellenkalkulation lässt dabei im Sinne einer „white-box“-Konstruktion die einfache Berechnung in jedem Tabellenfeld erkennen.

Eine vorbereitete Tabelle kann unter www.physikdidaktik.uni-frankfurt.de >Material heruntergeladen werden. Eine erweiterte Fassung dieses Beitrags erscheint im Mai 2011 in „Physik in unserer Zeit“ [2].

5. Literatur

- [1] Erb, R. (1995) Curved mirrors. In: Physics Education, vol. 30, 5, 287-289.
- [2] Erb, R. (2011). Das kartesische Oval in der Optik. In: Physik in unserer Zeit, 42, Heft 3.
- [3] Hecht, E. (1989) Optik. Bonn [usw.]: Addison-Wesley.