

## Höret! Die Elektronendichte! Messung eines geophysikalischen Parameters und die Elementarisierung der Hintergrundtheorie

Patrik Vogt, Andreas Müller

Universität Koblenz-Landau/Campus Landau, INnB – Lehrinheit Physik  
Fortstraße 7, 76829 Landau  
[vogtp@uni-landau.de](mailto:vogtp@uni-landau.de), [muellera@uni-landau.de](mailto:muellera@uni-landau.de)

### Kurzfassung

Hätten wir Antennen statt Ohren, so wären wir von einem allgegenwärtigen und immerwährenden Konzert im VLF-Bereich (Very Low Frequency) umgeben, mit „Instrumenten“, die von der globalen Gewitteraktivität sowie vom Sonnenwind gespielt werden und von deren Signalen aller Art: z. B. Knistern (Sferics), eine Art Vogelgezwitzcher (Tweaks) oder in der Frequenz abfallende Pfeiftöne (Whistlers). Nachdem wir in einem früheren Beitrag bereits vorgestellt haben, wie diese Höreindrücke empfangen und zur Abschätzung eines mikroskopischen sowie geophysikalischen Parameters – nämlich zur Bestimmung der Elektronendichte im erdnahen Weltraum – genutzt werden können [4], wird durch den vorliegenden Artikel eine Elementarisierung des für Schule und Lehrerbildung im Allgemeinen zu komplexen theoretischen Hintergrunds ergänzt. Der gefundene Zugang erlaubt Lernenden ohne jegliche Vorkenntnisse aus dem Bereich der Magnetohydrodynamik (z. B. Begriffe wie Plasma oder Gyrationfrequenz) und allein unter Nutzung der Mittelstufenmathematik, die notwendige Berechnungsgleichung (von einem Faktor der Größenordnung 1 abgesehen) zu erschließen.

### 1. Einleitung

Der Entladungskanal eines Blitzes stellt ein riesiges verzweigtes Antennengebilde dar, über welches der Impulsstrom der Haupt- und Zwischenentladungen ein sehr breitbandiges Spektrum an elektromagnetischen Wellen abstrahlt [5]; der größte Energieanteil entfällt dabei auf den VLF-Bereich, der von 3 bis 30 kHz reicht. Die emittierten Signale bezeichnet man als Atmosphericics oder kurz Sferics. Durchdringt ein solcher elektromagnetischer Impuls die Ionosphäre, so kann er sich entlang der Magnetfeldlinien des Erdmagnetfeldes ausbreiten und am magnetischen Konjugationspunkt des Emissionsortes registriert werden (Abb. 1). Durch die Wechselwirkung der elektromagnetischen Welle mit aus dem Sonnen-

wind stammenden Plasmaelektronen unterliegt das Signal einem Dispersionseffekt, der sich in einer kontinuierlichen Abnahme der Frequenz äußert (Abb. 2). Schallgewandelt ähnelt das Signal daher einem Pfeifton fallender Frequenz, woraus sich die Bezeichnung „Whistler“ (von engl. to whistle = pfeifen) ableitet.

Wie die anhand eines empfangenen Whistlersignals gemessene Dispersion zur Abschätzung der Elektronendichte des erdnahen Weltraums genutzt werden kann, wurde bereits in [4] ausführlich erläutert und wird daher im Folgenden nur in aller Kürze beschrieben. Ergänzt werden die Ausführungen durch eine Elementarisierung der Hintergrundtheorie, welche – von einem Faktor der Größenordnung 1 abgesehen – eine quantitative Erschließung der Berechnungsgleichung zulässt.

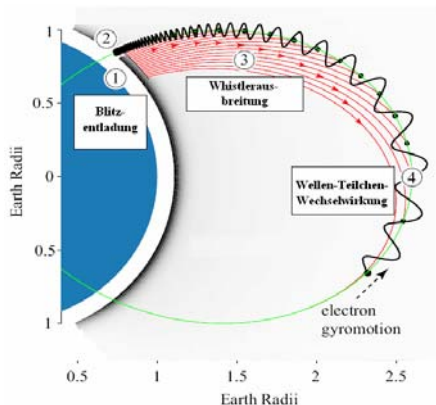


Abb. 1: Entstehung eines Whistlers [8]

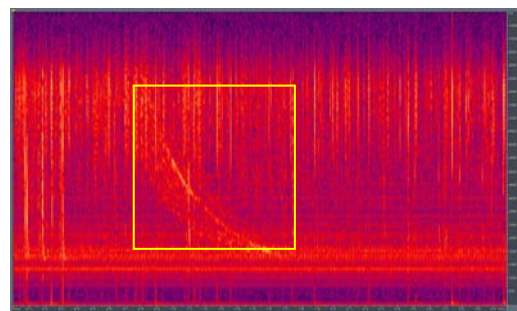


Abb. 2: Dynamisches Spektrum eines Whistlers (Frequenz in Abhängigkeit der Zeit), dargestellt mit der Software Cool Edit Pro

## 2. Experimentelle Bestimmung der Whistlerdispersion

Bereits L. R. O. STOREY hat im Jahr 1953 erkannt, dass  $1/\sqrt{f}$  proportional ist zur Ankunftszeit  $t$  der einzelnen Frequenzen  $f$  und definierte die Whistlerdispersion  $D$  als den reziproken Proportionalitätsfaktor [3]. Es gilt also:

$$D = \sqrt{f} \cdot t \quad \{1\}$$

Um nun die Dispersion  $D$  eines registrierten Whistlers zu bestimmen, muss der Frequenzverlauf unter Nutzung einer geeigneten Tonanalysesoftware (z. B. Cool Edit Pro [6]) ausgelesen werden (Abb. 3).

Aufgrund der Proportionalität zwischen  $1/\sqrt{f}$  und  $t$  würden zur Ermittlung von  $D$  prinzipiell zwei Whistlerfrequenzen und die dazugehörigen Ankunftszeiten ausreichen, es bietet sich jedoch an, die Geradensteigung und somit die reziproke Whistlerdispersion mit Hilfe einer linearen Regression zu bestimmen (Abb. 4). Diese führt für den betrachteten Whistler zur Beziehung

$$\frac{1}{\sqrt{f}}(t) = 14,2 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1/2} \cdot t - 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1/2}, \quad \{2\}$$

mit einem adjustierten Bestimmtheitsmaß nahe eins ( $R_{\text{adj.}}^2 > 0,99$ ) und einem Steigungsfehler von  $0,1 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1/2}$ . Somit ergibt sich die Whistlerdispersion zu

$$D = (70 \pm 0,5) \text{ s}^{1/2}, \quad \{3\}$$

was einem typischen Wert für unsere Breiten entspricht.

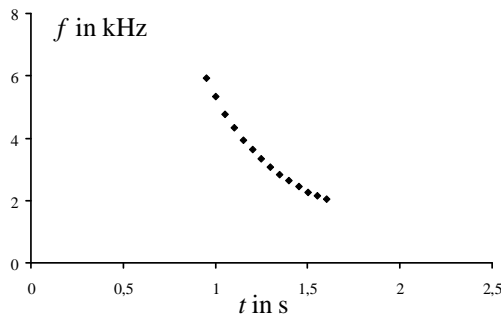


Abb. 3: Mit Cool Edit Pro ausgelesene Frequenzen

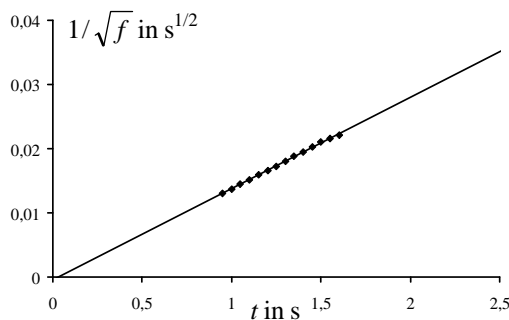


Abb. 4: Ermittlung der Whistlerdispersion

## 3. Theoretischer Hintergrund der Whistlerdispersion

Die Dispersion eines Whistlers hängt neben der Länge des Ausbreitungsweges  $s$  (Feldlinienlänge), der Elementarladung  $e$ , der elektrischen Feldkonstanten  $\epsilon_0$ , der Elektronenmasse  $m_e$  und der Lichtgeschwindigkeit  $c$  von der Elektronendichte  $N_e$  sowie der magnetischen Flussdichte  $B$  längs der Feldlinie ab. Aus der Theorie folgt:

$$D = \sqrt{\frac{e}{8\pi\epsilon_0}} \frac{1}{c} \int_s \sqrt{\frac{N_e}{B}} ds \quad \{4\}$$

## 4. Abschätzung der Elektronendichte

Im Folgenden wird die Abhängigkeit der Whistlerdispersion von der Plasmafrequenz zur Abschätzung des Höhenprofils der Elektronendichte im Bereich des erdnahen Weltraums genutzt. Mit dem Abstand zum Erdmittelpunkt  $r$  gilt in guter Näherung ein einfaches Potenzgesetz der Form

$$N_e(r) \propto \frac{1}{r^3} \quad \text{bzw.} \quad N_e(r) \approx \frac{k}{r^3} \quad [1], [5]. \quad \{5\}$$

Ausgehend von der Beziehung {4} ergibt sich die Whistlerdispersion zu

$$D \approx \sqrt{\frac{e \cdot k}{M_0}} \cdot \frac{s(\varphi_B)}{2,7} \cdot \int_{-\varphi_B}^{+\varphi_B} \sqrt{1 + 3 \sin^2 \varphi} \cdot \cos \varphi d\varphi \quad \{6\}$$

( $M_0$  magnetisches Moment der Erde,  $\varphi$  geomagnetische Breite,  $\varphi_B$  geomagnetische Breite des Beobachtungsstandortes,  $s(\varphi_B)$  Länge der zum Beobachtungspunkt gehörenden Feldlinie).

Unter Berücksichtigung der geomagnetischen Breite des Beobachtungsstandortes von ca.  $50^\circ$  bzw.  $0,87$  im Bogenmaß (Landau i. d. Pfalz), beträgt das Integral ca.  $1,7$  und die Beziehung {6} vereinfacht sich zu

$$D \approx 0,63 s(\varphi_B) \sqrt{\frac{e \cdot k}{M_0}}. \quad \{7\}$$

Auflösen nach der Konstanten  $k$  und einsetzen der Zahlenwerte ( $M_0 \approx 7,78 \cdot 10^{22} \text{ Am}^2$ ,  $e \approx 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ ,  $D \approx (70 \pm 0,5) \text{ s}^{1/2}$ ,  $s(\varphi_B = 0,87) \approx 29 \cdot 100 \text{ km}$  [4]) ergibt

$$k \approx 2,52 \frac{D^2 \cdot M_0}{s(\varphi_B)^2 \cdot e} \approx (7,1 \pm 0,1) \cdot 10^{30} \quad \{8\}$$

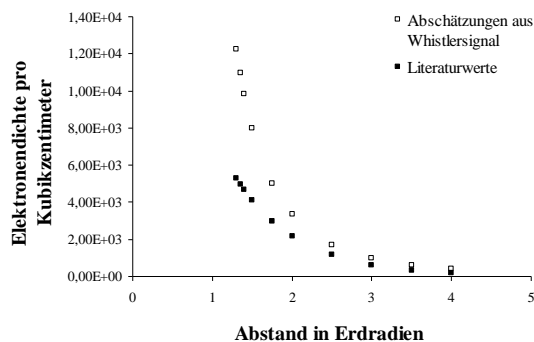
und liefert das gesuchte Höhenprofil

$$N_e(r) \approx \frac{k}{r^3} \approx \frac{7,1 \cdot 10^{30}}{r^3}. \quad \{9\}$$

Eine ausführliche Herleitung von Gleichung {6} findet sich in [4].

In der Abb. 5 sind die für verschiedene Abstände ermittelten Elektronendichten den Literaturwerten [7] gegenübergestellt. Dieser Vergleich zeigt, dass die mittels Dispersionsintegral {4} ermittelten Ab-

schätzungen zumindest in ihrer Größenordnung mit den tatsächlichen Elektronendichten übereinstimmen. Beachtet man, dass zur Abschätzung eines mikroskopischen und geophysikalischen Parameters ausschließlich eine einfache Sfericempfangsanlage [4] genutzt wurde, so stellt bereits die Angabe der richtigen Größenordnung ein – vielleicht auch für Schülerinnen und Schüler – erstaunliches Ergebnis dar.



**Abb. 5:** Vergleich der abgeschätzten mit den tatsächlichen Elektronendichten in Abhängigkeit des Abstands zum Erdmittelpunkt (für den Erdradius wurde ein Wert von 6 380 km angenommen); die Fehlergrenzen der Abschätzungen sind kleiner als die Punktdarstellungen.

### 5. Elementarisierung der Hintergrundtheorie

Die Herleitung der Berechnungsgleichung ist für Schülerinnen und Schüler im Allgemeinen sicherlich zu komplex, weshalb sich die Frage aufdrängt, ob sich die Beziehung {7} elementarisieren, d. h. mit Mitteln der Schulmathematik quantitativ begründen lässt.

Da offensichtlich die Whistlerdispersion mit der Länge des Ausbreitungsweges zunimmt, definieren wir hierzu zunächst die wegstreckenunabhängige Größe

$$D^* = \frac{D}{s} = 0,63 \sqrt{\frac{e \cdot k}{M_0}}, \quad \{10\}$$

welche nur noch von Konstanten abhängt sowie die nachfolgende Betrachtung übersichtlicher gestaltet und zu einem eindeutigen Ergebnis führt. Zur quantitativen Erschließung der Beziehung {10} kann man sich (oder gemeinsam) überlegen, von welchen Größen  $D^*$  überhaupt abhängen könnte und kommt schließlich zum Ansatz

$$D^* \propto e^a \mu_0^b N_e^c B^d. \quad \{11\}$$

Die Abhängigkeit von der Elementarladung  $e$ , der magnetischen Feldkonstanten  $\mu_0$ , der Elektronendichte  $N_e$  sowie von der magnetischen Flussdichte  $B$  ist naheliegend, allerdings sind die Exponenten  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , und  $d$  zunächst unbekannt und im weiteren Verlauf mittels Dimensionsanalyse zu ermitteln: Die Einheit von  $D^*$  folgt unmittelbar aus den Definitionen von  $D$  bzw.  $D^*$  und lautet:

$$[D^*] = [t^{1/2} / s] = s^{1/2} \cdot m^{-1} \quad \{12\}$$

Die gesuchten Exponenten müssen nun so gewählt werden, dass sich beim Ansatz {11} für  $D^*$  die gleiche Dimension ergibt. Dies gelingt durch Lösung des nachfolgenden Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} \text{Ampere, A:} & \quad a - b = 0 \\ \text{Volt, V:} & \quad b + d = 0 \\ \text{Sekunden, s:} & \quad a + b + d = 1/2 \\ \text{Meter, m:} & \quad -b - 3c - 2d = -1 \end{aligned}$$

Das Gleichungssystem hat eine eindeutige Lösung und es gilt:  $a = b = c = 1/2$  bzw.  $d = -1/2$ . Einsetzen der ermittelten Exponenten in {11} führt zu

$$D^* \sim \sqrt{\frac{e \mu_0 N_e}{B}} \quad \{13\}$$

und unter Berücksichtigung des Potenzgesetzes {5} für  $N_e$  sowie der Formel für die Flussdichte des Erdmagnetfeldes

$$B(r, \varphi) = \frac{\mu_0 M_0}{4\pi} \sqrt{1 + 3 \sin^2 \varphi} \cdot \frac{1}{r^3} \quad [2] \quad \{14\}$$

erhält man

$$D^* \sim \sqrt{\frac{e \cdot k}{M_0}}. \quad \{15\}$$

Wie ein Vergleich mit der Gleichung {10} zeigt, fehlt zur vollständigen Theorie lediglich ein konstanter Faktor von 0,63! Eine Einheitenbetrachtung liefert also eine quantitative Begründung der Dispersionsformel und ermöglicht so deren Erschließung im Schulunterricht.

### 6. Literatur

- [1] Kertz, W. (1969): Einführung in die Geophysik II. Mannheim: Bibliographisches Institut.
- [2] Liboutry, L. (1999): Quantitative Geophysics and Geology. Heidelberg: Springer.
- [3] Storey, L. R. O. (1953): An investigation of whistling atmospherics. In: Phil. Trans. A 246, 113-141.
- [4] Vogt, P., Müller, A. (2008): Höret! Die Elektronendichte! Messung eines geophysikalischen Parameters mit ungewöhnlichen Mitteln. In: V. Nordmeier, H. Grötzebauch (Hrsg.), CD zur Frühjahrstagung des Fachverbandes Didaktik der Physik in der Deutschen Physikalischen Gesellschaft – Berlin 2008. Berlin: Lehmanns.
- [5] Volland, H. (1968): Die Ausbreitung langer Wellen. Braunschweig: Vieweg.
- [6] Webdownload von Cool Edit Pro: <http://www.download3k.com/Install-Cool-Edit-Pro.html> (Stand 3/2010)
- [7] ESA Requirements and Standards Division (2007): Space Engineering. Space Environment. Verfügbar unter: [http://www.ecss.nl/forums/ecss/dispatch.cgi/home/showFile/100698/d20080421112948/No/E CSS-E-10-04\\_v0.10.pdf](http://www.ecss.nl/forums/ecss/dispatch.cgi/home/showFile/100698/d20080421112948/No/E CSS-E-10-04_v0.10.pdf) [Stand: 10/2010]

- [8] Überarbeitete Abbildung zur Entstehung eines Whistlers; das Original stammt von der VLF-Gruppe der Universität Stanford. Verfügbar unter: [http://www-star.stanford.edu/~vlf/ram/pmwiki/img/whistler\\_mode.jpg](http://www-star.stanford.edu/~vlf/ram/pmwiki/img/whistler_mode.jpg) [Stand: 10/2010]