Pauli-Algebra und Dirac-Algebra

OH-Folien zur Einführung in die Spezielle Relativitätstheorie im Rahmen eines Kurses zur Physik für Mathematiker

Martin Erik Horn
(Email: martinhorn@beuth-hochschule.de)

Stand: 4. Januar 2010
(Vorläufige Fassung)

Übersicht über die OH-Folien

Übersicht über die OH-Folien

Blatt 1	Vorbemerkungen

Diese OH-Folien entstanden parallel zum zweistündigen Physikkurs für Mathematiker des Vertiefungsschwerpunktes „Mathematik und Technik (MuT)“ im Wintersemester 2009/2010 an der Beuth-Hochschule für Technik Berlin, der für Studierende des Bachelor-Studiengangs „Applied and Computational Mathematics“ als Pflichtmodul im 3. Studienplansemester vorgesehen ist.

In dieser seminaristischen Lehrveranstaltung wird gemäß der Lernzielbeschreibung im Modulhandbuch „an ausgewählten Kapiteln ... die Denk- und Vorgehensweise naturwissenschaftlicher Erkenntnisgewinnung und Modellierung exemplarisch nachvollzogen.“

Dabei ist es wichtig, tatsächlich exemplarisch zu arbeiten, da in einem Semester fachliche Inhalte aus nahezu der gesamten Breite der Physik zu behandeln sind. Auch die Inhalte dieser OH-Folien konnten nicht vollständig im Kurs erörtert werden. Sie dienen somit auch dazu, interessierten Studentinnen und Studenten einen weiteren Einblick in die Spezielle Relativitätstheorie zu ermöglichen.

Blatt 2	Grundlagen der GA

Vorrelativistische Physik:

- Wir leben in einem dreidimensionalen Raum.
- Die Zeit wird als absolut und überall gleich aufgefasst.
- Wir konstruieren eine Algebra, die als Objekte die Grundbausteine unserer geometrischen Welt umfasst:

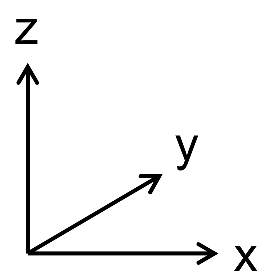
  - Skalare (dimensionslos)
  - Vektoren (eindimensional)
  - Orientierte Flächen, Bivektoren, Pseudovektoren (zweidimensional)
  - Orientierte Volumen, Trivektoren, Pseudoskalare (dreidimensional)

- Diese Algebra wird Geometrische Algebra (GA) bzw. Pauli-Algebra genannt.

σ_x .... räumlicher Basisvektor in x-Richtung

σ_y .... räumlicher Basisvektor in y-Richtung

σ_z .... räumlicher Basisvektor in z-Richtung

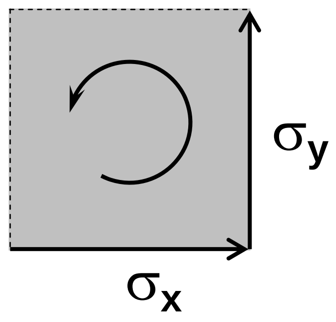


Normierung:

$$\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = 1$$

Blatt 3 | Basisflächen in der GA

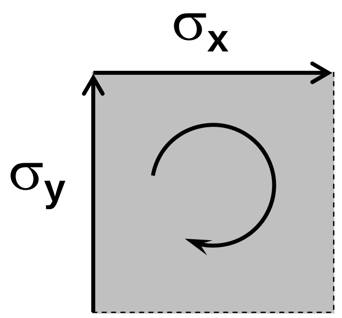
Positiv orientierte Einheitsfläche in der xy-Ebene:



$\sigma_x\sigma_y$

„Zuerst ein Schritt in x-Richtung, dann ein Schritt in y-Richtung."

Negativ orientierte Einheitsfläche in der xy-Ebene:



$\sigma_y\sigma_x$

Umgekehrte Orientierung:

„Zuerst ein Schritt in y-Richtung, dann ein Schritt in x-Richtung."

Anti-Kommutativität:

$$\sigma_x\sigma_y = -\,\sigma_y\sigma_x$$

$$\sigma_y\sigma_z = -\,\sigma_z\sigma_y$$

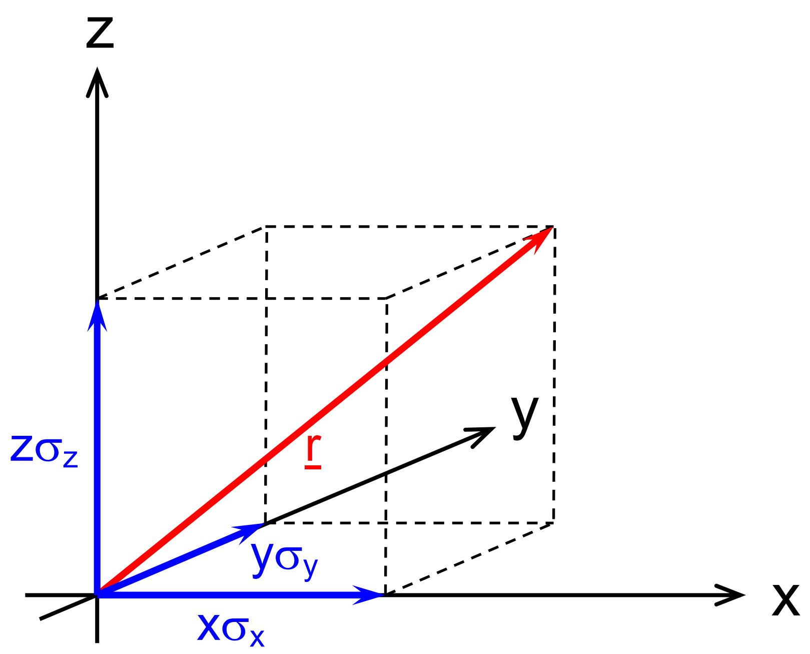
$$\sigma_z\sigma_x = -\,\sigma_x\sigma_z$$

Die Multiplikation ist assoziativ.

Blatt 4	Vektoren in der GA

- Linearkombinationen der Basisvektoren stellen in der Geometrischen Algebra Vektoren dar.
- Die Koeffizienten x, y, z dieser Basisvektoren sind die Koordinaten von Ortsvektoren.
- Sie sind reell: $x, y, z \in \mathbb{R}$
- Zur Unterscheidung zwischen den Vektoren $\vec{r}$ der üblichen Vektoralgebra und den Pauli-Vektoren der Geometrischen Algebra werden die Pauli-Vektoren $\underline{r}$ einfach unterstrichen:

$$\underline{r} = x\sigma_x + y\sigma_y + z\sigma_z$$



Blatt 5	Länge eines Pauli-Vektors

- Länge (Betrag) eines Pauli-Vektors:

$$r = |\underline{r}| = \sqrt{\underline{r}^2}$$

$$= \sqrt{(x\sigma_x + y\sigma_y + z\sigma_z)^2}$$

$$= \sqrt{(x\sigma_x + y\sigma_y + z\sigma_z)(x\sigma_x + y\sigma_y + z\sigma_z)}$$

$$= \sqrt{x^2\underbrace{\sigma_x{}^2}_{1} + xy\sigma_x\sigma_y + xz\underbrace{\sigma_x\sigma_z}_{-\sigma_z\sigma_x} + yx\underbrace{\sigma_y\sigma_x}_{-\sigma_x\sigma_y} + y^2\underbrace{\sigma_y{}^2}_{1} + yz\sigma_y\sigma_z + zx\sigma_z\sigma_x + zy\underbrace{\sigma_z\sigma_y}_{-\sigma_y\sigma_z} + z^2\underbrace{\sigma_z{}^2}_{1}}$$

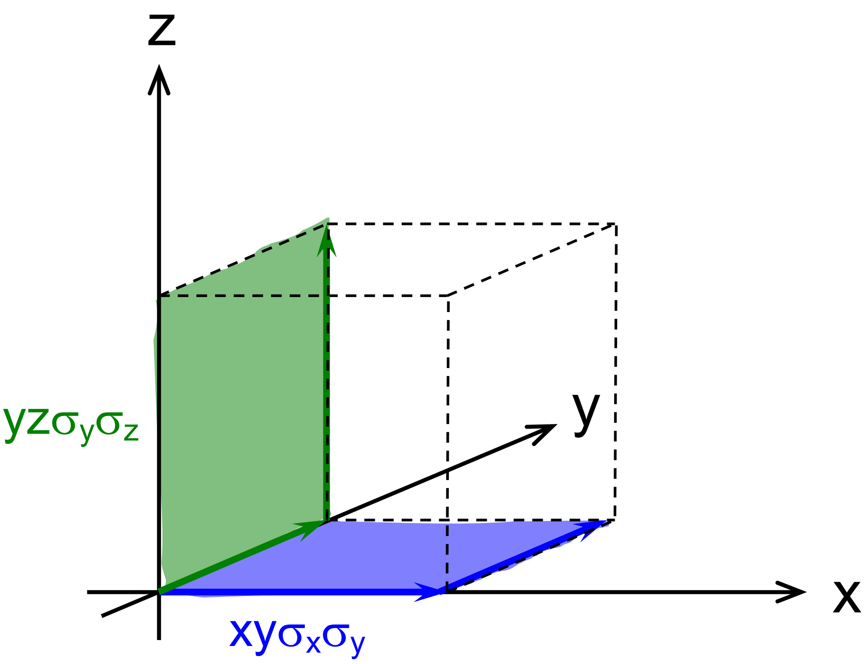
$$= \sqrt{x^2 + xy\sigma_x\sigma_y - zx\sigma_z\sigma_x - xy\sigma_x\sigma_y + y^2 + yz\sigma_y\sigma_z + zx\sigma_z\sigma_x - yz\sigma_y\sigma_z + z^2}$$

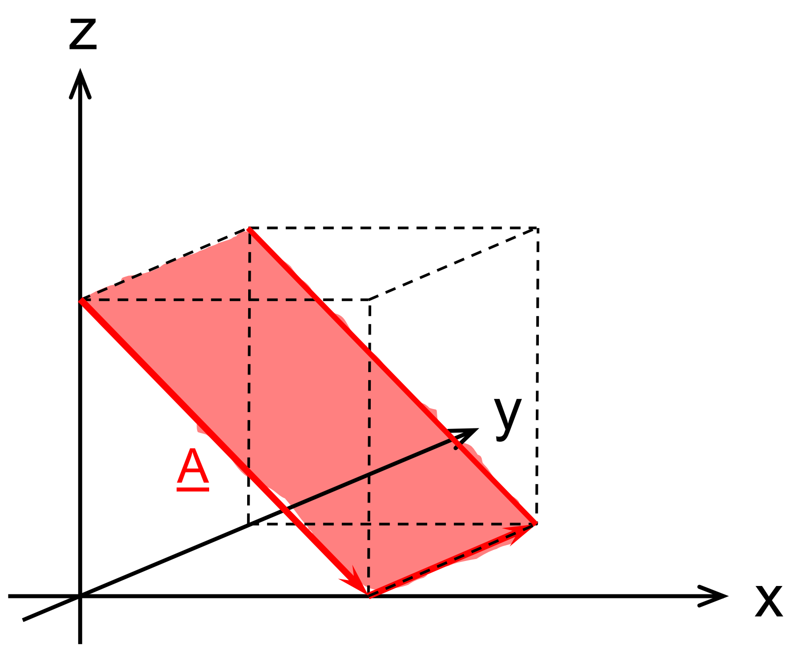
$$= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$\Rightarrow$ Satz des Pythagoras

Blatt 6	Flächen in der GA

- Flächen lassen sich addieren!

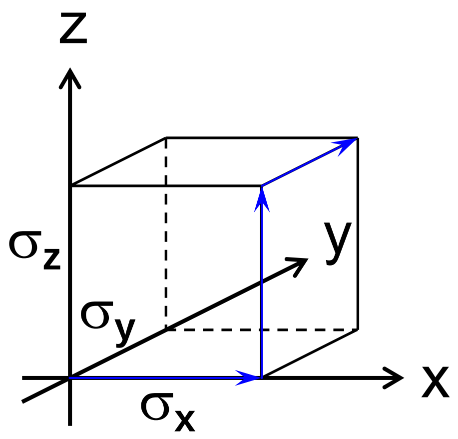




$$\begin{aligned}\underline{A} &= xy\sigma_x\sigma_y + yz\sigma_y\sigma_z\\ &= xy\sigma_x\sigma_y - zy\sigma_z\sigma_y\\ &= (x\sigma_x - z\sigma_z)\,y\sigma_y\end{aligned}$$

Blatt 7	Volumina in der GA

Positiv orientiertes Einheitsvolumen I:



$$I = \sigma_x\sigma_y\sigma_z$$

Zyklische Vertauschung ergibt:

$$I = \sigma_x\sigma_y\sigma_z = \sigma_y\sigma_z\sigma_x = \sigma_z\sigma_x\sigma_y$$

$$-I = \sigma_x\sigma_z\sigma_y = \sigma_z\sigma_y\sigma_x = \sigma_y\sigma_z\sigma_x$$

Pauli-Algebra:

Dualität von Vektoren $\longleftrightarrow$ Bivektoren:

$$\sigma_x \longleftrightarrow I\,\sigma_x = \sigma_x\sigma_y\sigma_z\sigma_x = \sigma_y\sigma_z$$

$$\sigma_y \longleftrightarrow I\,\sigma_y = \sigma_x\sigma_y\sigma_z\sigma_y = \sigma_z\sigma_x$$

$$\sigma_z \longleftrightarrow I\,\sigma_z = \sigma_x\sigma_y\sigma_z\sigma_z = \sigma_x\sigma_y$$

Orientierte Strecken und orientierte Flächen sind dual zueinander.

Blatt 8 | Imaginäre Größen

- Quadrat des Einheitsvolumens:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{I}^2 &= (\sigma_\mathbf{x}\sigma_\mathbf{y}\sigma_\mathbf{z})^2\\
&= \sigma_\mathbf{x}\sigma_\mathbf{y}\sigma_\mathbf{z}\,\sigma_\mathbf{x}\sigma_\mathbf{y}\sigma_\mathbf{z}\\
&= -\,\sigma_\mathbf{x}^{\mathbf{2}}\sigma_\mathbf{y}^{\mathbf{2}}\sigma_\mathbf{z}^{\mathbf{2}}\\
&= -\,1
\end{aligned}
$$

- Quadrate der Einheitsflächen:

$$
\begin{aligned}
(\sigma_\mathbf{x}\sigma_\mathbf{y})^2 &= \sigma_\mathbf{x}\sigma_\mathbf{y}\,\sigma_\mathbf{x}\sigma_\mathbf{y}\\
&= -\,\sigma_\mathbf{x}^{\mathbf{2}}\sigma_\mathbf{y}^{\mathbf{2}}\\
&= -\,1
\end{aligned}
$$

ebenso: $(\sigma_\mathbf{y}\sigma_\mathbf{z})^2 = -\,1$

$(\sigma_\mathbf{z}\sigma_\mathbf{x})^2 = -\,1$

Quaternionen

$(\sigma_x\sigma_y)(-\sigma_y\sigma_z) = (\sigma_z\sigma_x)$

$(-\sigma_y\sigma_z)(\sigma_z\sigma_x) = (\sigma_x\sigma_y)$

$(\sigma_z\sigma_x)(\sigma_x\sigma_y) = (-\sigma_y\sigma_z)$

- Der Raum, in dem wir leben, hat eine komplexe Struktur!
- Die Objekte dieses Raums werden Multivektoren genannt:

$$
\begin{aligned}
\underline{\mathrm{M}} = {} & a + b\sigma_\mathbf{x} + c\sigma_\mathbf{y} + d\sigma_\mathbf{z}\\
& + e\sigma_\mathbf{x}\sigma_\mathbf{y} + f\sigma_\mathbf{y}\sigma_\mathbf{z} + g\sigma_\mathbf{z}\sigma_\mathbf{x} + h\sigma_\mathbf{x}\sigma_\mathbf{y}\sigma_\mathbf{z}
\end{aligned}
$$

- Koeffizienten sind reell: $a, b, c, d, e, f, g, h \in \mathbb{R}$

Blatt 9a	Orthogonalität in der GA

- Zwei Pauli-Vektoren $\underline{a}$ und $\underline{b}$

  $\underline{a} = a_x\sigma_\mathbf{x} + a_y\sigma_\mathbf{y} + a_z\sigma_\mathbf{z}$
  $\underline{b} = b_x\sigma_\mathbf{x} + b_y\sigma_\mathbf{y} + b_z\sigma_\mathbf{z}$

  stehen senkrecht aufeinander, wenn gilt:

  $\langle\underline{a}\,\underline{b}\rangle_0 = 0$

  bzw.: $\langle\underline{a}\,\underline{b}\rangle_2 = \underline{a}\,\underline{b}$

- Das Geometrische Produkt zweier orthogonaler Pauli-Vektoren ist ein reiner Bivektor.

Blatt 9b	Reflexionen in der GA

- Einheitsvektor $\underline{n}$:

  $\underline{n} = n_x\sigma_\mathbf{x} + n_y\sigma_\mathbf{y} + n_z\sigma_\mathbf{z}$

- Eine Reflexion des Ortsvektors $\underline{r}$ an der auf $\underline{n}$ senkrecht stehenden Fläche ergibt den reflektierten Ortsvektor $\underline{r}'$:

  $\underline{r}' = -\,\underline{n}\,\underline{r}\,\underline{n}$

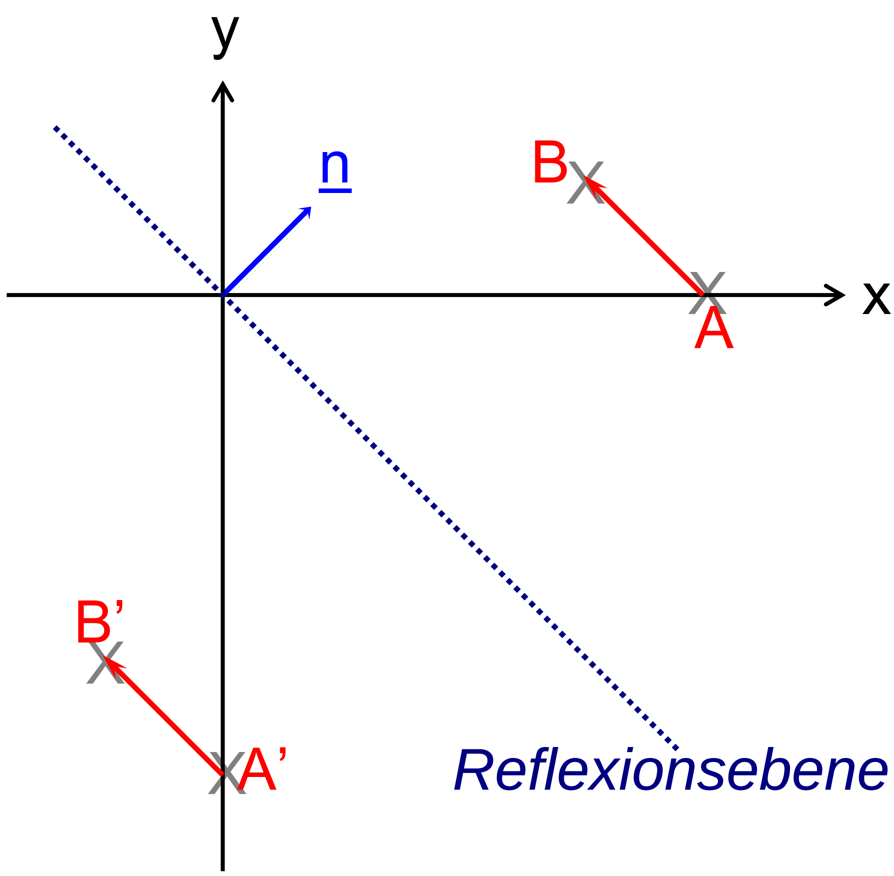
Blatt 10	Beispiel einer Reflexion

- Ortsvektoren: $\underline{r}_A = 5\sigma_x$
  $\underline{r}_B = 4\sigma_x + \sigma_y$
- Reflexionsvektor: $\underline{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_x + \sigma_y)$
- Reflektierte Ortsvektoren:

$$\underline{r}_A' = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_x + \sigma_y)\, 5\sigma_x \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_x + \sigma_y) = -5\sigma_y$$

$$\underline{r}_B' = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_x + \sigma_y)\,(4\sigma_x + \sigma_y)\frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_x + \sigma_y)$$

$$= -\sigma_x - 4\sigma_y$$



Blatt 11	Rotationen in der GA

- Zwei hintereinander ausgeführte Reflexionen ergeben eine Rotation.
- Zweiter Einheitsvektor $\underline{m}$:

$$\underline{m} = m_x\sigma_{\mathbf{x}} + m_y\sigma_{\mathbf{y}} + m_z\sigma_{\mathbf{z}}$$

- Eine zweite Reflexion des bereits einmal reflektierten Ortsvektors $\underline{r}'$ an der auf $\underline{m}$ senkrecht stehenden Fläche ergibt den gedrehten Ortsvektor $\underline{r}_{rot}$:

$$\begin{aligned}\underline{r}_{rot} &= -\,\underline{m}\;\underline{r}'\;\underline{m}\\ &= -\,\underline{m}\;(-\,\underline{n}\;\underline{r}\;\underline{n})\;\underline{m}\\ &= \underbrace{\underline{m}\,\underline{n}}\;\underline{r}\;\underbrace{\underline{n}\,\underline{m}}\end{aligned}$$

$$\underline{r}_{rot} = \;\underline{R}\;\;\underline{r}'\;\;\underline{R}^{\sim}$$

- Das Produkt der beiden Einheitsvektoren $\underline{n}$ und $\underline{m}$ wird als Rotor $\underline{R}$ bezeichnet:

$$\underline{R} = \underline{m}\;\underline{n} \qquad \text{und} \qquad \underline{R}^{\sim} = \underline{n}\;\underline{m}$$

- Eine Tilde zeigt eine Reihenfolgenumkehr an.
- Die Rotation wird in der durch $\underline{n}$ und $\underline{m}$ aufgespannnten Ebene durchgeführt.
- Der Rotationswinkel ist dabei doppelt so groß wie der von $\underline{n}$ und $\underline{m}$ eingeschlossene Winkel.

Blatt 12	Beispiel einer Rotation

- Ortsvektoren: $\underline{r}_A = 5\sigma_x$ | $\underline{r}_A' = -5\sigma_y$

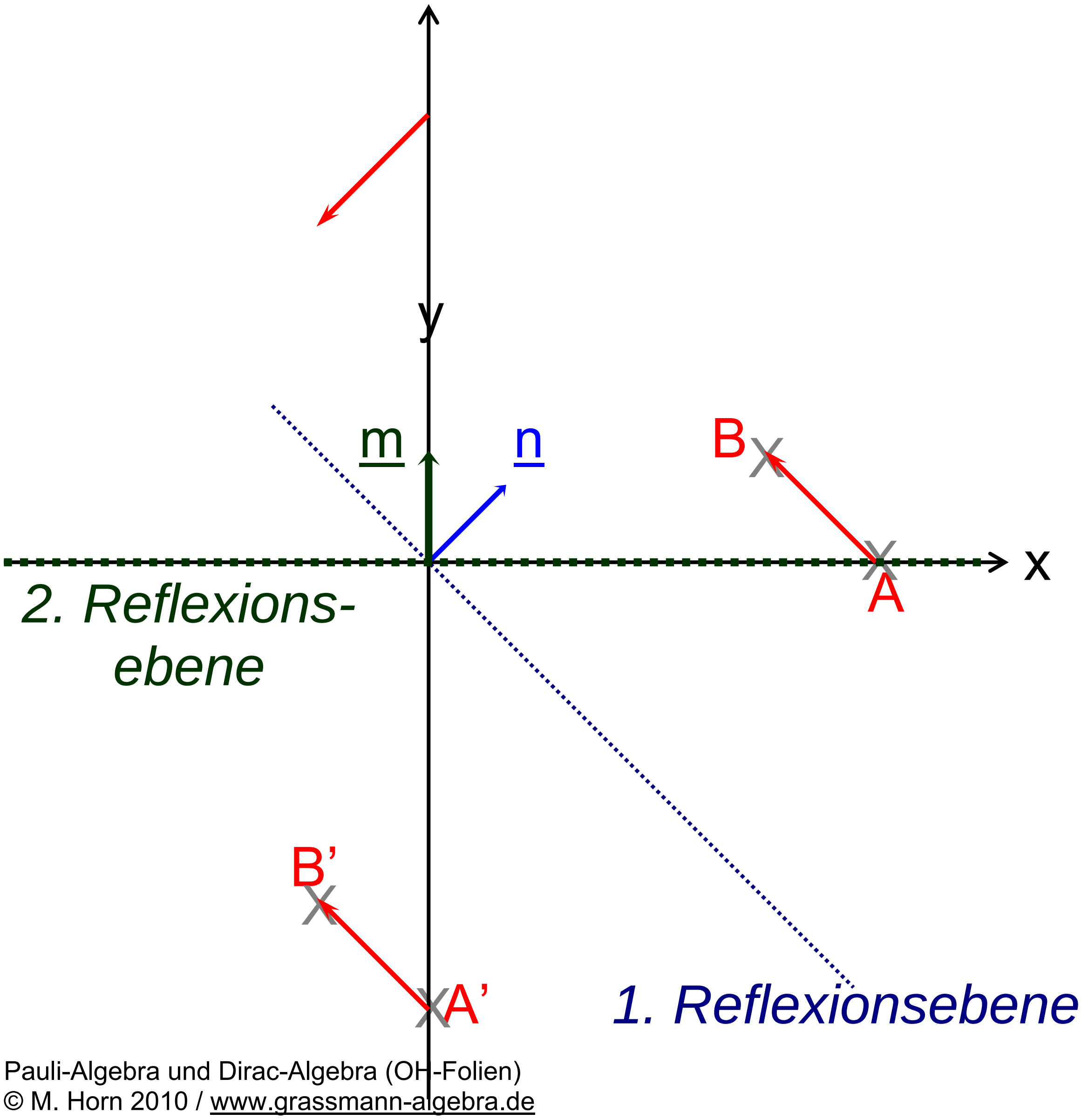
  $\underline{r}_B = 4\sigma_x + \sigma_y$ | $\underline{r}_B' = -\sigma_x - 4\sigma_y$

- Zweiter Reflexionsvektor: $\underline{m} = \sigma_y$

- Reflektierte Ortsvektoren:

  $\underline{r}_{A\mathit{rot}} = -\sigma_y(-5\sigma_y)\sigma_y = 5\sigma_y$

  $\underline{r}_{B\mathit{rot}} = -\sigma_y(-\sigma_x - 4\sigma_y)\sigma_y = -\sigma_x + 4\sigma_y$



Blatt 13	Grundlagen der STA I

Relativistische Physik:

- Wir leben in einer vierdimensionalen Raumzeit mit drei Raum- und einer Zeitdimension.
- Die Zeit ist relativ und beobachterabhängig:

> *Raum kann in Zeit und Zeit kann in Raum umgewandelt werden.*

- Wir konstruieren eine Algebra, die als Objekte die geometrischen Grundbausteine unserer vierdimensionalen Welt umfasst:

  - Skalare (dimensionslos)
  - Vektoren (eindimensional)
  - Orientierte Flächen, Bivektoren, Pseudobivektoren (zweidimensional)
  - Orientierte Volumen, Trivektoren, Pseudovektoren (dreidimensional)
  - Orientierte Hypervolumen, Quadrovektoren, Pseudoskalare (vierdimensional)

- Diese Algebra wird Raumzeit-Algebra (engl. Spacetime Algebra, STA) bzw. Dirac-Algebra genannt.

Blatt 14	Geometrisierung der Zeit

- Damit die Transformation von zwischen Raum und Zeit mathematisch übersichtlicher dargestellt werden kann, ist es sinnvoll, räumliche Entfernungen (Strecken) und zeitliche Entfernungen (Zeitdauern) mit einem gleichen Maßstab, d. h. insbesondere gleichartiger Einheit, zu messen.

  Deshalb werden Zeitmessungen auf Längenmessungen zurückgeführt:

Zeit, die ein Vorgang dauert $\longleftrightarrow$ Länge des Weges, den das Licht während dieser Zeit zurücklegt.

t	ct
1 s	1 Ls = 1 Lichtsekunde $\approx$ 300 000 km
1 d	1 Ld = 1 Lichttag $\approx 2{,}6 \cdot 10^{13}$ m
1 y	1 Lj = 1 Lichtjahr $\approx 9{,}5 \cdot 10^{15}$ m

Diese Umrechnung ist insbesondere deshalb unproblematisch, da die Erfahrung zeigt:

> Licht hat in allen Inertialsystemen die gleiche Geschwindigkeit.

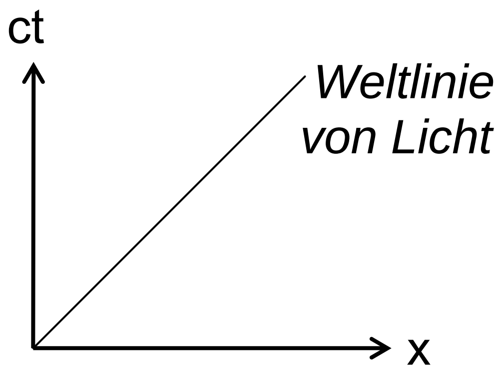
Blatt 15 | Grundlagen der STA II

γ_t .... zeitlicher Basisvektor

γ_x .... räumlicher Basisvektor in x-Richtung
γ_y .... räumlicher Basisvektor in y-Richtung
γ_z .... räumlicher Basisvektor in z-Richtung

Licht legt während der Zeitspanne ct die Strecke x zurück:

Im geometrisierten Koordinatensystem entspricht dies den Winkelhalbierenden.



$$|ct| = |x| \qquad \text{Beträge (keine Vektoren!)}$$
$$\Rightarrow \quad (ct)^2 = x^2$$
$$\Rightarrow \quad +(ct)^2 - x^2 = 0 \qquad \text{Raum-Zeit-Intervall nach Minkowski}$$

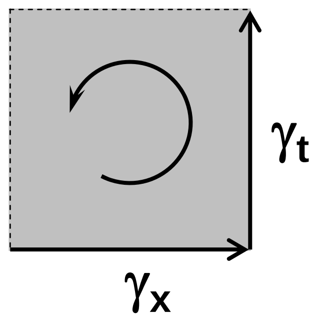
Diese Vorzeichen finden sich in den Basisvektoren wieder.

Normierung:

$$\gamma_t^2 = 1 \qquad \gamma_x^2 = \gamma_y^2 = \gamma_z^2 = -1$$

<table><tr><td>Blatt 16</td><td>Basisflächen in der STA</td></tr></table>

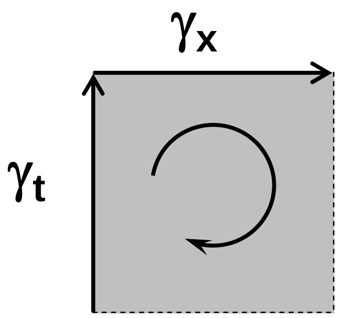
Positiv orientierte Einheitsfläche in der xt-Ebene:



$\gamma_x\gamma_t$

„Zuerst ein Schritt in x-Richtung, dann ein Schritt in die ct-Richtung."

Negativ orientierte Einheitsfläche in der xt-Ebene:



$\gamma_t\gamma_x$

Umgekehrte Orientierung:

„Zuerst ein Schritt in ct-Richtung, dann ein Schritt in x-Richtung."

Anti-Kommutativität:

$\gamma_x\gamma_y = -\gamma_y\gamma_x$	$\gamma_x\gamma_t = -\gamma_t\gamma_x$
$\gamma_y\gamma_z = -\gamma_z\gamma_y$	$\gamma_y\gamma_t = -\gamma_t\gamma_y$
$\gamma_z\gamma_x = -\gamma_x\gamma_z$	$\gamma_z\gamma_t = -\gamma_t\gamma_z$

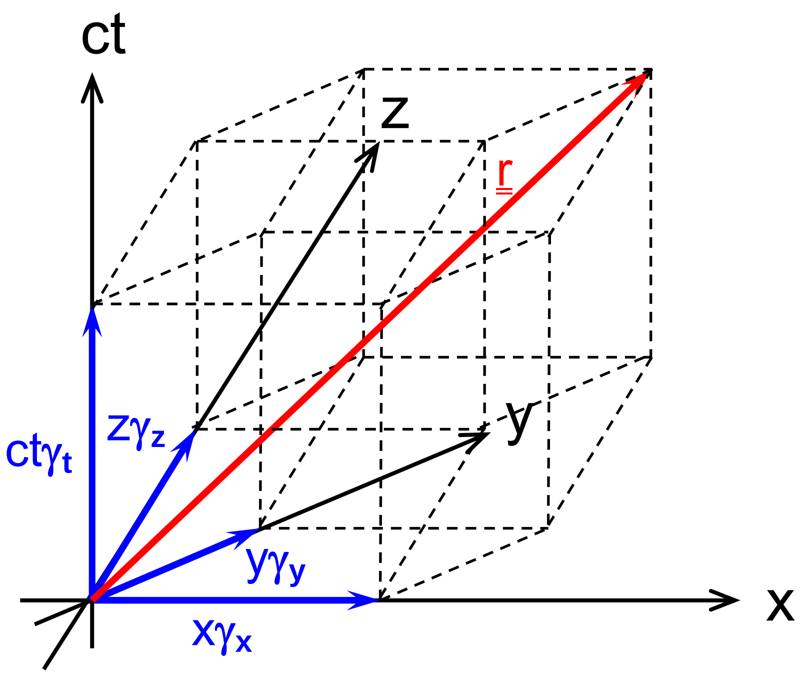
Auch in der Raumzeit-Algebra (STA) ist die Multiplikation assoziativ.

Blatt 17	Vektoren in der STA

- Linearkombinationen der Basisvektoren stellen in der Raumzeit-Algebra Vektoren dar.
- Die Koeffizienten ct, x, y, z dieser Basisvektoren sind die Koordinaten von Ortsvektoren.
- Sie sind reell: $ct, x, y, z \in \mathbb{R}$
- Zur Unterscheidung zwischen den Vektoren $\vec{r}$ der üblichen Vektoralgebra, den Pauli-Vektoren $\underline{r}$ der Geometrischen Algebra und den Dirac-Vektoren der Raumzeit-Algebra werden die Dirac-Vektoren $\underline{\underline{r}}$ doppelt unterstrichen:

$$\underline{\underline{r}} = ct\gamma_t + x\gamma_x + y\gamma_y + z\gamma_z$$

- Die graphische Darstellung allerdings bereitet Probleme :



Blatt 18 | Länge eines Dirac-Vektors

• Länge (Betrag) eines Dirac-Vektors für zeitartige Abstände ($r^2 > 0$):

$$r = |\underline{\underline{r}}| = \sqrt{\underline{\underline{r}}^2}$$

$$= \sqrt{(ct\gamma_t + x\gamma_x + y\gamma_y + z\gamma_z)^2}$$

$$= \sqrt{(ct\gamma_t + x\gamma_x + y\gamma_y + z\gamma_z)(ct\gamma_t + x\gamma_x + y\gamma_y + z\gamma_z)}$$

$$= \Big((ct)^2\underbrace{\gamma_t{}^2}_{1} + ctx\gamma_t\gamma_x + cty\gamma_t\gamma_y + ctz\gamma_t\gamma_z + xct\gamma_x\gamma_t + x^2\gamma_x{}^2 + xy\gamma_x\gamma_y + xz\gamma_x\gamma_z$$

$$+yct\gamma_y\gamma_t + yx\gamma_y\gamma_x + y^2\underbrace{\gamma_y{}^2}_{-1} + yz\gamma_y\gamma_z + zct\gamma_z\gamma_t + zx\gamma_z\gamma_x + zy\underbrace{\gamma_z\gamma_y}_{-\gamma_y\gamma_z} + z^2\underbrace{\gamma_z{}^2}_{-1}\Big)^{1/2}$$

$$= \sqrt{(ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2}$$

$\Rightarrow$ Relativistischer Pythagoras

Blatt 19	Raum-Zeit-Intervall

- Um Vorzeichenprobleme bei raumartigen Abständen ($r^2 < 0$) zu vermeiden, arbeitet man generell mit dem Raum-Zeit-Intervall:

$$r^2 = |\underline{\underline{r}}|^2 = \underline{\underline{r}}^2$$
$$= (ct\gamma_t + x\gamma_\mathbf{x} + y\gamma_\mathbf{y} + z\gamma_\mathbf{z})^2$$
$$= (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

- Zwei Ereignisse, die durch raumartige Abstände ($r^2 < 0$) voneinander getrennt sind, liegen innerhalb des Lichtkegels. Sie sind kausal miteinander verknüpfbar.
- Zwei Ereignisse, die durch lichtartige Abstände ($r^2 = 0$) voneinander getrennt sind, liegen auf dem Lichtkegel. Von dem zeitlich früheren Ereignis ausgesandte Photonen erreichten das zeitlich spätere Ereignis.
- Zwei Ereignisse, die durch zeitartige Abstände ($r^2 > 0$) voneinander getrennt sind, liegen außerhalb des Lichtkegels. Sie sind nicht kausal miteinander verknüpfbar.

Blatt 20	Allgemeine Definition des Raum-Zeit-Intervalls

- Auf Folie 18 ist der Spezialfall eines Raum-Zeit-Intervalls dargestellt, da lediglich das Quadrat des Abstands eines Raumzeit-Punktes vom Ursprung des Koordinatensystems betrachtet wurde.
- Im allgemeinen Fall wird das Raum-Zeit-Intervall jedoch als Quadrat des raumzeitlichen Abstands zweier Punkte P_1 und P_2 aufgefasst:

$$
\begin{aligned}
\Delta\underline{\underline{r}}^2 &= (\underline{\underline{r}}_2 - \underline{\underline{r}}_1)^2 \\
&= \left[ct_2\gamma_t + x_2\gamma_{\mathbf{x}} + y_2\gamma_{\mathbf{y}} + z_2\gamma_{\mathbf{z}} - (ct_1\gamma_t + x\gamma_{\mathbf{x}} + y\gamma_{\mathbf{y}} + z\gamma_{\mathbf{z}})\right]^2 \\
&= \left[(ct_2 - ct_1)\gamma_t + (x_2 - x_1)\gamma_{\mathbf{x}} + (y_2 - y_1)\gamma_{\mathbf{y}} + (z_2 - z_1)\gamma_{\mathbf{z}}\right]^2 \\
&= (ct_2 - ct_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 \\
&= (\Delta ct)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2 = \Delta ct^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2
\end{aligned}
$$

- Zum Vergleich: Allgemeine Definition eines räumlichen Abstands:

$$
\begin{aligned}
\Delta\underline{r}^2 &= (\underline{r}_2 - \underline{r}_1)^2 = \left[(x_2 - x_1)\sigma_{\mathbf{x}} + (y_2 - y_1)\sigma_{\mathbf{y}} + (z_2 - z_1)\sigma_{\mathbf{z}}\right]^2 \\
&= (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2
\end{aligned}
$$

Blatt 21	Hypervolumen in der der STA

- Positiv orientiertes Einheits-Hypervolumen I:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{I} &= \gamma_t\gamma_x\gamma_y\gamma_z = \gamma_t\gamma_y\gamma_z\gamma_x = \gamma_t\gamma_z\gamma_x\gamma_y \\
&= \gamma_x\gamma_y\gamma_t\gamma_z = \gamma_y\gamma_z\gamma_t\gamma_x = \gamma_z\gamma_x\gamma_t\gamma_y \\
&= \gamma_x\gamma_t\gamma_z\gamma_y = \gamma_y\gamma_t\gamma_x\gamma_z = \gamma_z\gamma_t\gamma_y\gamma_x \\
&= \gamma_x\gamma_z\gamma_y\gamma_t = \gamma_y\gamma_x\gamma_z\gamma_t = \gamma_z\gamma_y\gamma_x\gamma_t
\end{aligned}
$$

- Negativ orientiertes Einheits-Hypervolumen $-\mathrm{I}$:

$$
\begin{aligned}
-\mathrm{I} &= \gamma_x\gamma_t\gamma_y\gamma_z = \gamma_y\gamma_t\gamma_z\gamma_x = \gamma_z\gamma_t\gamma_x\gamma_y \\
&= \gamma_y\gamma_x\gamma_t\gamma_z = \gamma_z\gamma_y\gamma_t\gamma_x = \gamma_x\gamma_z\gamma_t\gamma_y \\
&= \gamma_t\gamma_x\gamma_z\gamma_y = \gamma_t\gamma_y\gamma_x\gamma_z = \gamma_t\gamma_z\gamma_y\gamma_x \\
&= \gamma_z\gamma_x\gamma_y\gamma_t = \gamma_x\gamma_y\gamma_z\gamma_t = \gamma_y\gamma_z\gamma_x\gamma_t
\end{aligned}
$$

Dirac-Algebra:

Dualität von Vektoren $\longleftrightarrow$ Trivektoren:

$$
\begin{aligned}
\gamma_t &\longleftrightarrow \mathrm{I}\,\gamma_t = \gamma_t\gamma_x\gamma_y\gamma_z\gamma_t = -\,\gamma_x\gamma_y\gamma_z \\
\gamma_x &\longleftrightarrow \mathrm{I}\,\gamma_x = \gamma_t\gamma_x\gamma_y\gamma_z\gamma_x = -\,\gamma_t\gamma_y\gamma_z \\
\gamma_y &\longleftrightarrow \mathrm{I}\,\gamma_y = \gamma_t\gamma_x\gamma_y\gamma_z\gamma_y = -\,\gamma_t\gamma_z\gamma_x \\
\gamma_z &\longleftrightarrow \mathrm{I}\,\gamma_x = \gamma_t\gamma_x\gamma_y\gamma_z\gamma_z = -\,\gamma_t\gamma_x\gamma_y
\end{aligned}
$$

Orientierte Strecken und orientierte Volumina sind dual zueinander.

Blatt 22	Imaginäre Größen in der STA

- Quadrat des vierdimensionalen Einheits-Hypervolumens:

$$\mathrm{I}^2 = (\gamma_t\gamma_x\gamma_y\gamma_z)^2$$
$$= \gamma_t\gamma_x\gamma_y\gamma_z\,\gamma_t\gamma_x\gamma_y\gamma_z$$
$$= +\,\gamma_t^2\gamma_x^2\gamma_y^2\gamma_z^2$$
$$= -1$$

- Quadrate dreidimensionaler Einheitsvolumina:

$$(\gamma_t\gamma_x\gamma_y)^2 = (\gamma_t\gamma_y\gamma_z)^2 = (\gamma_t\gamma_z\gamma_x)^2 = -1$$
$$(\gamma_x\gamma_y\gamma_z)^2 = 1$$

- Quadrate zweidimensionaler Einheitsflächen:

$$(\gamma_t\gamma_x)^2 = (\gamma_t\gamma_y)^2 = (\gamma_t\gamma_z)^2 = 1$$
$$(\gamma_x\gamma_y)^2 = (\gamma_y\gamma_z)^2 = (\gamma_z\gamma_x)^2 = -1$$

- Der Raum, in dem wir leben, enthält eine komplexe Struktur.

Blatt 23	Multivektoren in der STA

- Die geometrischen Objekte der vierdimensionalen Raumzeit, in der wir leben, werden Multivektoren genannt.
- Multivektoren sind Linearkombinationen des Skalars der Länge eins, der vier Basisvektoren, der sechs Einheitsflächen (Basisbivektoren), der vier Einheitsvolumina (Basistrivektoren) und des Einheits-Hypervolumens.

$$\underline{\underline{M}} = a + b_1\gamma_t + b_2\gamma_x + b_3\gamma_y + b_4\gamma_z$$
$$+ c_1\gamma_t\gamma_x + c_2\gamma_t\gamma_y + c_3\gamma_t\gamma_z$$
$$+ c_4\gamma_x\gamma_y + c_5\gamma_y\gamma_z + c_6\gamma_z\gamma_x$$
$$+ d_1\gamma_t\gamma_x\gamma_y + d_2\gamma_t\gamma_y\gamma_z + d_3\gamma_t\gamma_z\gamma_x + d_4\gamma_x\gamma_y\gamma_z$$
$$+ e\gamma_t\gamma_x\gamma_y\gamma_z$$

- Alle Koeffizienten sind reell: $a, b_i, c_i, d_i, e \in \mathbb{R}$
- Die vierdimensionale Raumzeit wird somit durch insgesamt

$$2^4 = 16$$

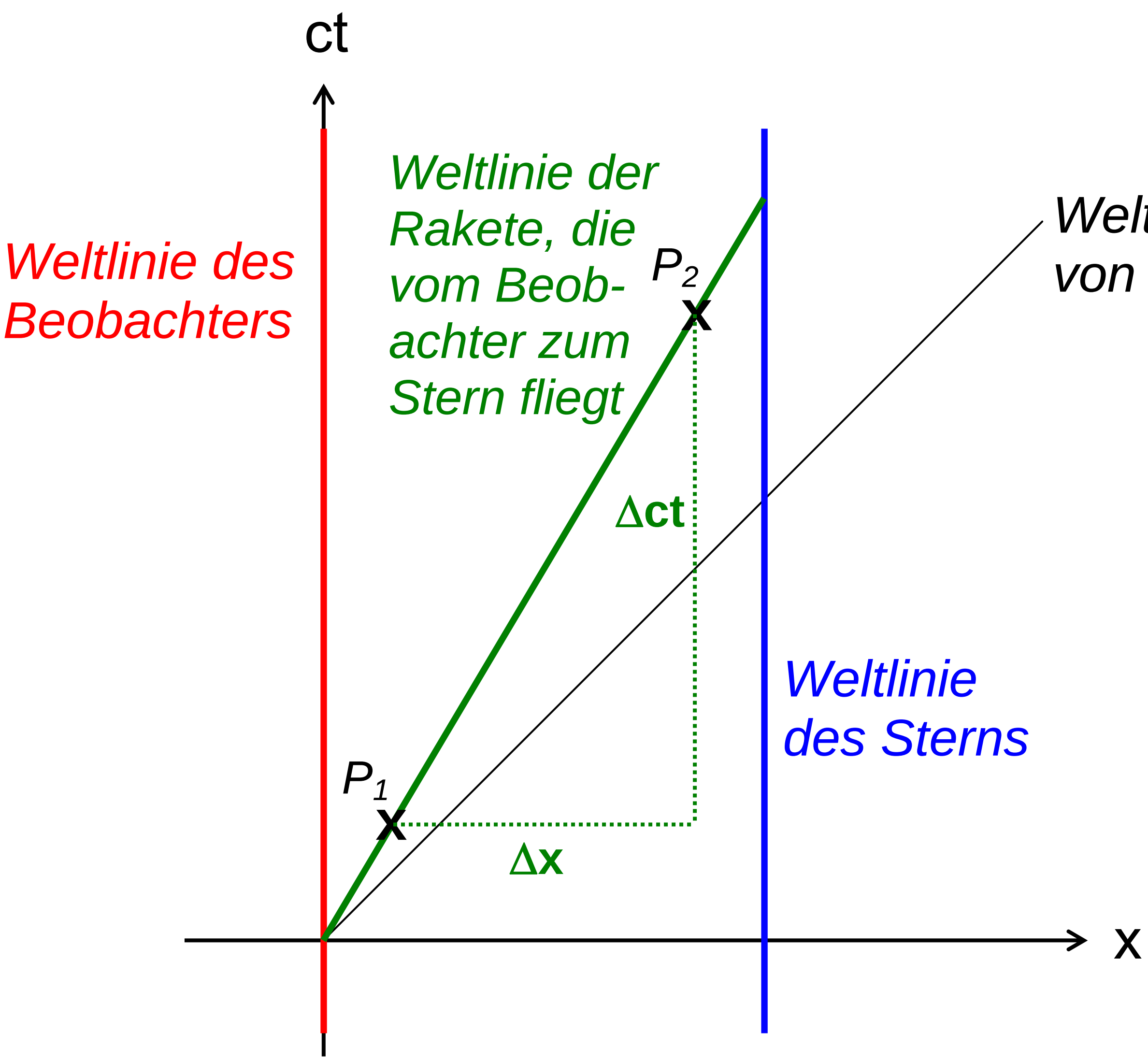
Elemente aufgespannt, während der dreidimensionale Raum nur durch

$$2^3 = 8$$

Elemente aufgespannt wird.

Blatt 24	Weltlinien

- Gegeben sei das Koordinatensystem eines ruhenden Beobachters.
- Die Weltlinie des ruhenden Beobachters in seinem eigenen Koordinatensystem entspricht der zeitlichen ct-Achse, da er sich immer am Ort $x = y = z = 0$ befindet.



Blatt 25	Geschwindigkeiten

- Die Weltlinie eines relativ zum Beobachter ruhenden Körpers (beispielsweise ein entfernter Stern) ist eine Parallele zur Zeitachse des Beobachter-Koordinatensystems, da ein ruhender Körper relativ zum Beobachter immer einen konstanten Abstand (x, y, z = const) hat.
- Die Weltlinie eines relativ zum Beobachter mit einer konstanten Geschwindigkeit bewegten Körpers (beispielsweise einer schnell fliegenden Rakete) ist eine Gerade.
- Ihre Geschwindigkeit berechnet sich mit Hilfe des Steigungsdreiecks zu:

$$v_{\text{Rakete}} = \frac{\Delta x}{\Delta ct}\, c = \frac{x_2 - x_1}{ct_2 - ct_1}\, c$$

- Die Weltlinie eines Photons, das sich in x-Richtung bewegt, ist die Diagonale der ct-x-Fläche. Die Weltlinien von Licht liegen auf dem Lichtkegel, der die Gesamtheit aller Diagonalen bildet.

$$v_{\text{Licht}} = \frac{\Delta x}{\Delta ct}\, c = \frac{x_2 - x_1}{ct_2 - ct_1}\, c = \frac{ct_2 - ct_1}{ct_2 - ct_1}\, c = c$$

Blatt 26 | Invarianz des Raum-Zeit-Intervalls

- Im dreidimensionalen Raum ist der räumliche Abstand (bezüglich Translationen und Rotationen) invariant:

$$\Delta\underline{r}^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 = \text{const}$$

- In der vierdimensionalen Raumzeit ist der raumzeitliche Abstand (bezüglich Translationen und Rotationen) invariant:

$$\Delta\underline{\underline{r}}^2 = \Delta ct^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 = \text{const}$$

- Die Invarianz des Raum-Zeit-Intervalls bildet die axiomatische Grundlage der Speziellen Relativitätstheorie.
- Voraussetzung für deren Gültigkeit ist die Homogenität von Raum und Zeit, die Isotropie des Raumes und die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit.
- Dabei betrachtet man nur unbeschleunigte Koordinatensysteme, die sich mit einer konstanten Relativgeschwindigkeit zueinander bewegen.
- Solche unbeschleunigten Koordinatensysteme werden Inertialsysteme genannt.

Blatt 27	Die Zeitdilatation I

- Aus der Invarianz des Raum-Zeit-Intervalls folgt direkt die Zeitdilatation.
- Bewegt sich ein Objekt im Inertialsystem eines Beobachters (ungestrichenes Koordinatensystem) mit einer konstanten Geschwindigkeit in x-Richtung vom Ursprung zum Punkt $ct\gamma_t + x\gamma_x$, so hat das Objekt im eigenen Inertialsystem (gestrichenes Koordinatensystem) immer die gleiche Ortskoordinate x' = 0.

$$\Rightarrow \qquad \Delta \underline{\underline{r}}^2 = \Delta \underline{\underline{r}}'^2$$

$$(ct\gamma_t + x\gamma_x)^2 = (ct'\gamma_t' + x'\gamma_x')^2$$

$$(ct)^2\gamma_t^2 + x^2\gamma_x^2 = (ct')^2\gamma_t'^2$$

gemischte Terme entfallen

$$(ct)^2 - x^2 = (ct')^2$$

$$t^2\left(1 - \frac{x^2}{c^2t^2}\right) = t'^2$$

da $v = \frac{x}{t}$

$$t\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = t'$$

- Während des Flugs der Rakete vom Ursprung $\underline{\underline{r}}_1 = 0\gamma_t + 0\gamma_x$ zum Punkt $\underline{\underline{r}}_2 = ct\gamma_t + x\gamma_x$ vergeht für die Raketenbesatzung eine kürzere Zeit als für die zurückbleibenden Beobachter.

Blatt 28	Die Zeitdilatation II

- Aus der Invarianz des Raum-Zeit-Intervalls folgt direkt die Zeitdilatation.
- Im allgemeinen Fall bewegt sich ein Objekt im ungestrichenen Inertialsystem
  vom Punkt $\underline{\underline{r}}_1 = ct_1\gamma_t + x_1\gamma_x + y_1\gamma_y + z_1\gamma_z$
  zum Punkt $\underline{\underline{r}}_2 = ct_2\gamma_t + x_2\gamma_x + y_2\gamma_y + z_2\gamma_z$.

$$\Rightarrow \qquad \Delta\underline{\underline{r}}^2 = \Delta\underline{\underline{r}}'^2$$

$$(\Delta ct\gamma_t + \Delta x\gamma_x + \Delta y\gamma_y + \Delta z\gamma_z)^2 = (\Delta ct'\gamma_t' + \overset{0}{\Delta x'}\gamma_x' + \overset{0}{\Delta y'}\gamma_y' + \overset{0}{\Delta z'}\gamma_z')^2$$

$$\Delta ct^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 = \Delta ct'^2$$

$$\Delta t^2\left(1 - \frac{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}{c^2\Delta t^2}\right) = \Delta t'^2 \qquad \textit{da} \quad v = \frac{\Delta\ell}{\Delta t} = \frac{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}}{\Delta t}$$

$$\Delta t\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \Delta t'$$

- Während des Flugs der Rakete vom Punkt $\underline{\underline{r}}_1$ zum Punkt $\underline{\underline{r}}_2$ vergeht für die Raketenbesatzung eine kürzere Zeit als für die zurückbleibenden Beobachter.

Blatt 29	Die Längenkontraktion

- Während des Flugs der Rakete vom Ursprung $\underline{\underline{r}}_1 = 0\gamma_t + 0\gamma_x$ zum Punkt $\underline{\underline{r}}_2 = ct\gamma_t + x\gamma_x$ bewegt sich die Rakete aus Sicht der zurückbleibenden Beobachter mit der Geschwindigkeit $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$.
- Umgekehrt entfernen sich im Inertialsystem der Rakete die zurückbleibenden Beobachter mit der gleichen Geschwindigkeit $v' = \frac{\Delta x'}{\Delta t'}$ in entgegengesetzter Richtung.
- Die Beträge der Relativgeschwindigkeiten sind gleich groß: $v = v'$.

$\Rightarrow$ Da die Raketenbesatzung bei gleicher Geschwindigkeit eine kürzere Zeit misst, muss sie auch einen kürzeren Weg messen!

$$\Delta x' = v'\,\Delta t' = v\,\Delta t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \Delta x\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

- Während des Flugs der Rakete vom Ursprung $\underline{\underline{r}}_1 = 0\gamma_t + 0\gamma_x$ zum Punkt $\underline{\underline{r}}_2 = ct\gamma_t + x\gamma_x$ misst die Raketenbesatzung eine kürzere Wegstrecke $\Delta x'$ als die zurückbleibenden Beobachter, die die längere Wegstrecke $\frac{\Delta x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ messen.

Blatt 30	Relativität I

- Während des Flugs der Rakete im Inertialsystem der zurückbleibenden Beobachter vom Ursprung $\underline{\underline{r}}_1 = 0\gamma_t + 0\gamma_x$ zum Punkt $\underline{\underline{r}}_2 = ct\gamma_t + x\gamma_x$ vergeht für die Raketenbesatzung weniger Zeit als für die zurückbleibenden Beobachter in ihrem Inertialsystem, die sich in ihrem Inertialsystem zum Punkt $\underline{\underline{r}}_3 = ct\gamma_t + 0\gamma_x$ bewegen.
- Der gleiche Flug wird von der Raketenbesatzung in ihrem eigenen Inertialsystem als Flug vom Ursprung $\underline{\underline{r}}'_1 = 0\gamma_t' + 0\gamma_x'$ zum Punkt $\underline{\underline{r}}'_2 = ct'\gamma_t' + 0\gamma_x'$ wahrgenommen, wobei sich die zurückbleibenden Beobachter währenddessen im Inertialsystem der Raketenbesatzung vom Ursprung $\underline{\underline{r}}'_1 = 0\gamma_t' + 0\gamma_x'$ zum Punkt $\underline{\underline{r}}'_3 = ct'\gamma_t' - x'\gamma_x'$ bewegen. Dabei vergeht für die zurückbleibenden Beobachter weniger Zeit als für die Raketenbesatzung, denn es gilt:

$$\Rightarrow \qquad \begin{aligned} \Delta\underline{\underline{r}}^2 &= \Delta\underline{\underline{r}}'^2 \\ (ct\gamma_t + 0\gamma_x)^2 &= (ct'\gamma_t' + x'\gamma_x')^2 \\ (ct)^2 &= (ct')^2 - x'^2 \\ t &= t'\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \end{aligned}$$

Blatt 31	Relativität II

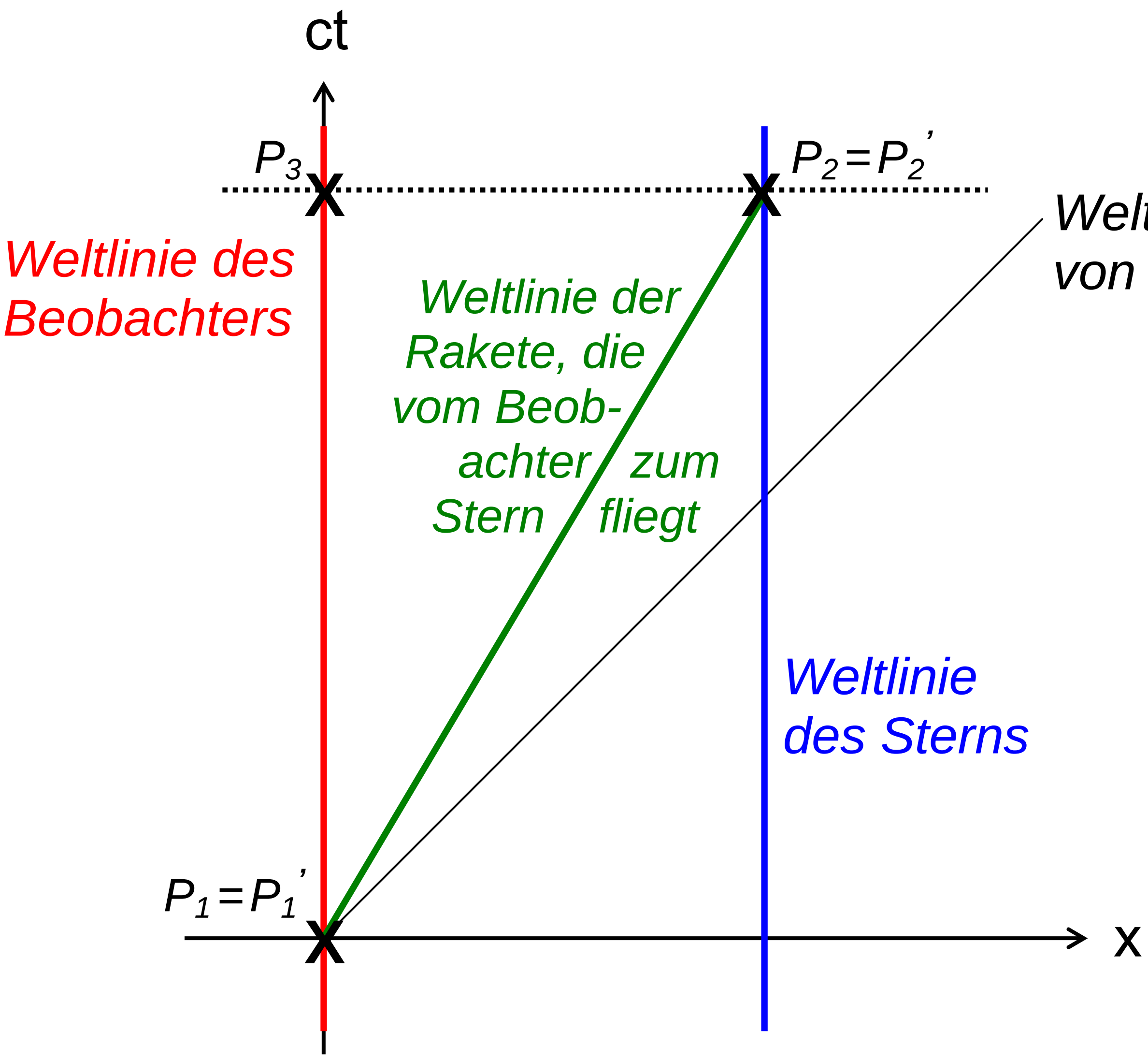
- Die Bewegungsabläufe sind somit in beiden Inertialsystemen gleichermaßen relativ. Es vergeht jeweils für die bewegten Objekte weniger Zeit als für ruhende Objekte.

Im Inertialsystem der Raketenbesatzung vergeht für die zurückbleibenden Beobachter während des Fluges der Rakete weniger Zeit, da sich die zurückbleibenden Beobachter im Inertialsystem der Raketenbesatzung bewegen.
Im Inertialsystem der zurückbleibenden Beobachter vergeht für die Raketenbesatzung während des Fluges der Rakete (also während des gleichen Vorgangs!) weniger Zeit, da sich die Raketenbesatzung im Inertialsystem der zurückbleibenden Beobachter bewegt.

- Dies ist kein Widerspruch. Alle Zeitangaben werden auch so gemessen. Grund für dieses scheinbare Paradoxon ist, dass die beiden Punkte $\underline{\underline{r}}_3$ und $\underline{\underline{r}}'_3$ nicht übereinstimmen.

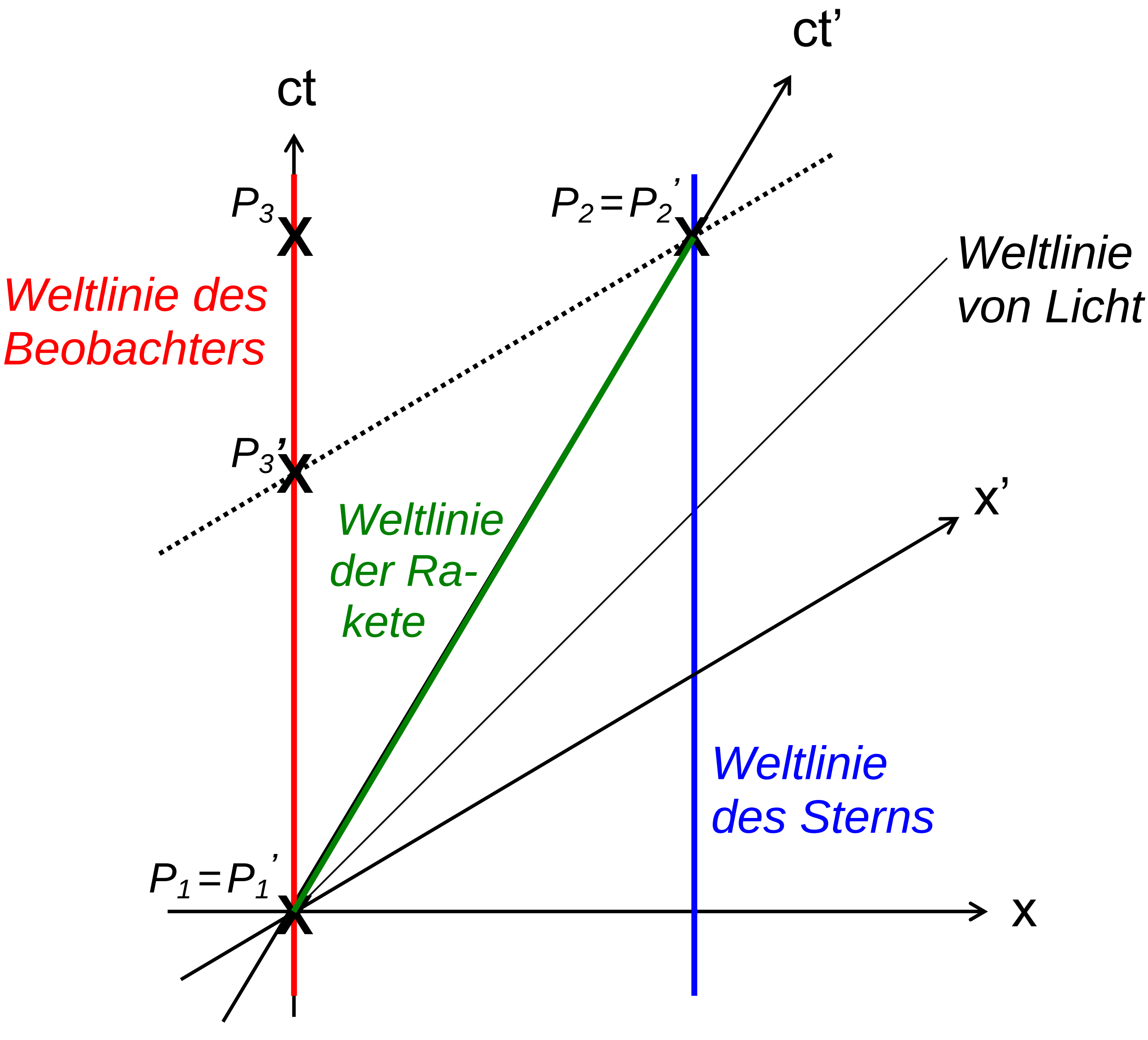
Blatt 32	Gleichzeitigkeit I

- Im Inertialsystem der zurückbleibenden Beobachter sind alle Ereignisse, die auf Parallelen zur x-Achse liegen, gleichzeitig.
- Im Inertialsystem der zurückbleibenden Beobachter finden also die beiden Ereignisse an den Punkten P_2 und P_3 gleichzeitig statt.



Blatt 33	Gleichzeitigkeit II

- Im Inertialsystem der Raketenbesatzung finden die beiden Ereignisse an den Punkten $P_2' = P_2$ und P_3' gleichzeitig statt.



- Die räumliche Koordinatenachse x' des Inertialsystems der Rakete ist zur Weltlinie von Licht hin gekippt.

Blatt 34	Gleichzeitigkeit III

- *Zweidimensionale Formulierung:*
  (Eine räumliche und eine zeitliche Koordinatenachse)
  Im jedem Inertialsystem sind alle Ereignisse, die auf Parallelen zur räumlichen Achse liegen, gleichzeitig.

- *Dreidimensionale Formulierung:*
  (Zwei räumliche und eine zeitliche Koordinatenachse)
  Im jedem Inertialsystem sind alle Ereignisse, die auf einer parallel zu der von den beiden räumlichen Achsen aufgespannten Ebene liegen, gleichzeitig.

- *Allgemeine Formulierung im vierdimensionalen Fall:*
  (Drei räumliche und eine zeitliche Koordinatenachse)
  Im jedem Inertialsystem sind alle Ereignisse, die in einem parallel zu dem von den drei räumlichen Achsen aufgespanntem Raum liegen, gleichzeitig.

- Für die Koordinatenachsen gilt:

$$x = y = z = 0 \quad \Rightarrow \quad ct\text{-Achse}$$
$$t = 0 \text{ und } y = z = 0 \quad \Rightarrow \quad x\text{-Achse}$$
$$t = 0 \text{ und } z = x = 0 \quad \Rightarrow \quad y\text{-Achse}$$
$$t = 0 \text{ und } x = y = 0 \quad \Rightarrow \quad z\text{-Achse}$$

Blatt 35 | Orthogonalität in der STA

- Zwei Dirac-Vektoren $\underline{\underline{a}}$ und $\underline{\underline{b}}$

  $$\underline{\underline{a}} = a_0\gamma_\mathbf{t} + a_1\gamma_\mathbf{x} + a_2\gamma_\mathbf{y} + a_3\gamma_\mathbf{z}$$
  $$\underline{\underline{b}} = b_0\gamma_\mathbf{t} + b_1\gamma_\mathbf{x} + b_2\gamma_\mathbf{y} + b_3\gamma_\mathbf{z}$$

  stehen senkrecht aufeinander, wenn gilt:

  $$\langle\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{b}}\rangle_0 = 0$$

  bzw.: $\langle\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{b}}\rangle_2 = \underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{b}}$

- Das Geometrische Produkt zweier orthogonaler Dirac-Vektoren ist ein reiner Bivektor.

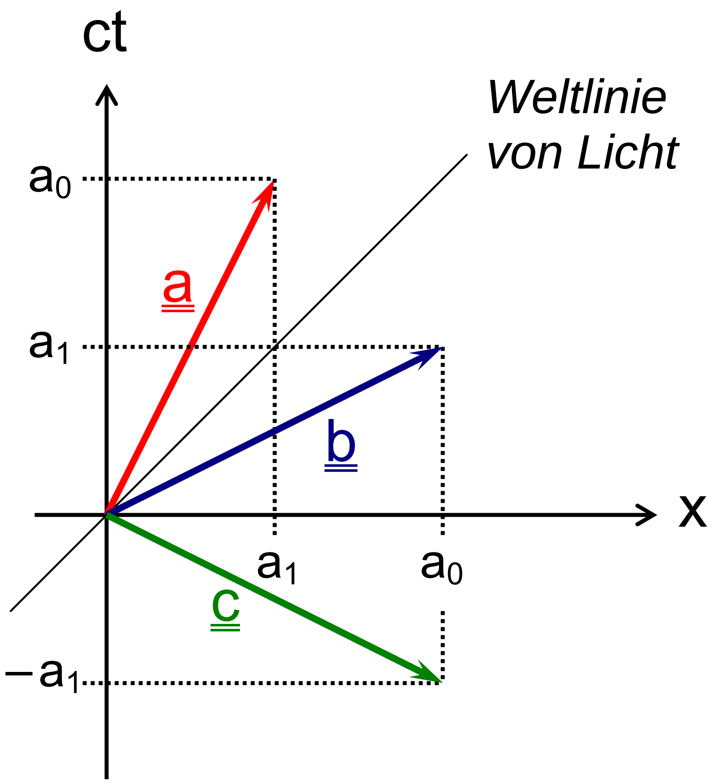
- Achtung: In einer graphischen Darstellung erscheinen orthogonale Dirac-Vektoren symmetrisch zur Weltlinie von Licht gekippt.

- Beispiel: Welche der folgenden Dirac-Vektoren

  $$\underline{\underline{a}} = a_0\gamma_\mathbf{t} + a_1\gamma_\mathbf{x}$$
  $$\underline{\underline{b}} = a_1\gamma_\mathbf{t} + a_0\gamma_\mathbf{x}$$
  $$\underline{\underline{c}} = -a_1\gamma_\mathbf{t} + a_0\gamma_\mathbf{x}$$

  stehen senkrecht aufeinander?

Blatt 36	Beispiel orthogonaler Vektoren I



- Rechnerische Überprüfung der Orthogonalität:

$$
\begin{aligned}
\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{c}} &= (a_0\gamma_t + a_1\gamma_x)(-a_1\gamma_t + a_0\gamma_x) \\
&= -a_0a_1\gamma_t^{\,2} + a_0^{\,2}\gamma_t\gamma_x - a_1^{\,2}\gamma_x\gamma_t + a_1a_0\gamma_x^{\,2} \\
&= -a_0a_1 + a_0^{\,2}\gamma_t\gamma_x + a_1^{\,2}\gamma_t\gamma_x - a_1a_0 \\
&= -2a_0a_1 + (a_0^{\,2} + a_1^{\,2})\,\gamma_t\gamma_x
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ $\langle\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{c}}\rangle_0 = -2a_0a_1 \neq 0$

bzw.: $\langle\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{c}}\rangle_2 = (a_0^{\,2} + a_1^{\,2})\,\gamma_t\gamma_x \neq \underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{c}}$

- Die Dirac-Vektoren $\underline{\underline{a}}$ und $\underline{\underline{c}}$ stehen nicht senkrecht aufeinander!

Blatt 37	Beispiel orthogonaler Vektoren II

- Fortsetzung der rechnerischen Überprüfung der Orthogonalität:

$$\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{b}} = (a_0\gamma_t + a_1\gamma_x)(a_1\gamma_t + a_0\gamma_x)$$
$$= a_0a_1\gamma_t^2 + a_0^2\gamma_t\gamma_x + a_1^2\gamma_x\gamma_t + a_1a_0\gamma_x^2$$
$$= a_0a_1 + a_0^2\gamma_t\gamma_x - a_1^2\gamma_t\gamma_x - a_1a_0$$
$$= (a_0^2 - a_1^2)\,\gamma_t\gamma_x$$

$\Rightarrow$ $\qquad \langle\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{b}}\rangle_0 = 0$

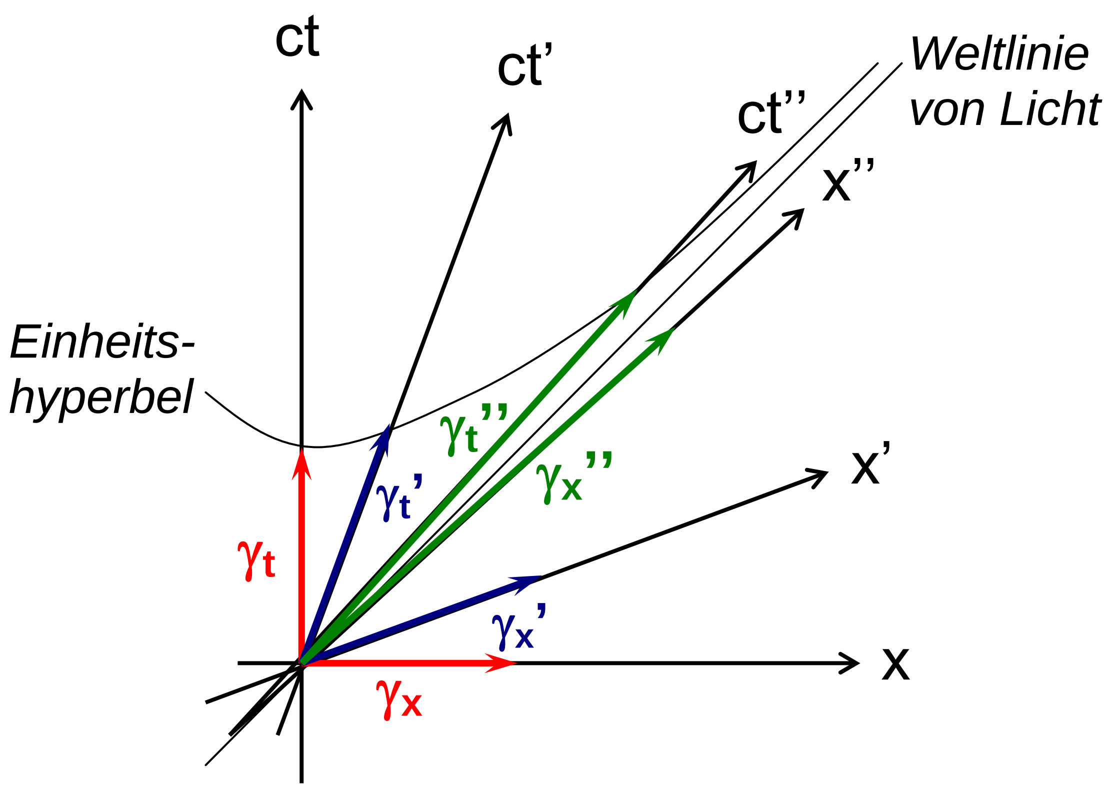
bzw.: $\qquad \langle\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{b}}\rangle_2 = (a_0^2 - a_1^2)\,\gamma_t\gamma_x = \underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{b}}$

- Das Geometrische Produkt der beiden Dirac-Vektoren $\underline{\underline{a}}$ und $\underline{\underline{b}}$ ist ein reiner Bivektor! Der skalare Anteil dieses Produktes ist Null.
- Obwohl in der Zeichnung der rote Dirac-Vektor $\underline{\underline{a}}$ und der grüne Dirac-Vektor $\underline{\underline{c}}$ den Anschein vermitteln, orthogonal zueinander zu stehen, zeigt die rechnerische Überprüfung, dass der rote Dirac-Vektor $\underline{\underline{a}}$ und der blaue Dirac-Vektor $\underline{\underline{b}}$ senkrecht aufeinander stehen.

Blatt 38	Basisvektoren in der STA

- Vier orthogonal zueinander stehende Dirac-Einheitsvektoren können eine Basis der Raumzeit bilden.
- Üblicherweise wählt man dafür einen zeitartigen und drei raumartige Dirac-Einheitsvektoren.

  Drei unterschiedliche Basen der Raumzeit sind im folgenden Diagramm farblich unterschiedlich markiert.



- Punkte gleicher Entfernung vom Ursprung (hier: Einheitsradius mit r = 1) liegen nicht auf einem **Kreis**, sondern auf einer **Hyperbel**.

Blatt 39	Normierung der Basisvektoren

- Da sich das gestrichene Inertialsystem in Bezug auf das ungestrichenen Inertialsystem mit der Relativgeschwindigkeit v bewegt, lauten die Koordinaten beliebiger Dirac-Vektoren, die parallel zu den gestrichenen Basisvektoren liegen:

$$\underline{\underline{r'}}_t = ct\boldsymbol{\gamma_t} + vt\boldsymbol{\gamma_x}$$

$$\underline{\underline{r'}}_x = vt\boldsymbol{\gamma_t} + ct\boldsymbol{\gamma_x}$$

- Beträge dieser Richtungsvektoren:

$$r'_i = \left|\underline{\underline{r'}}_i\right| = \sqrt{(ct)^2 - (vt)^2} = ct\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

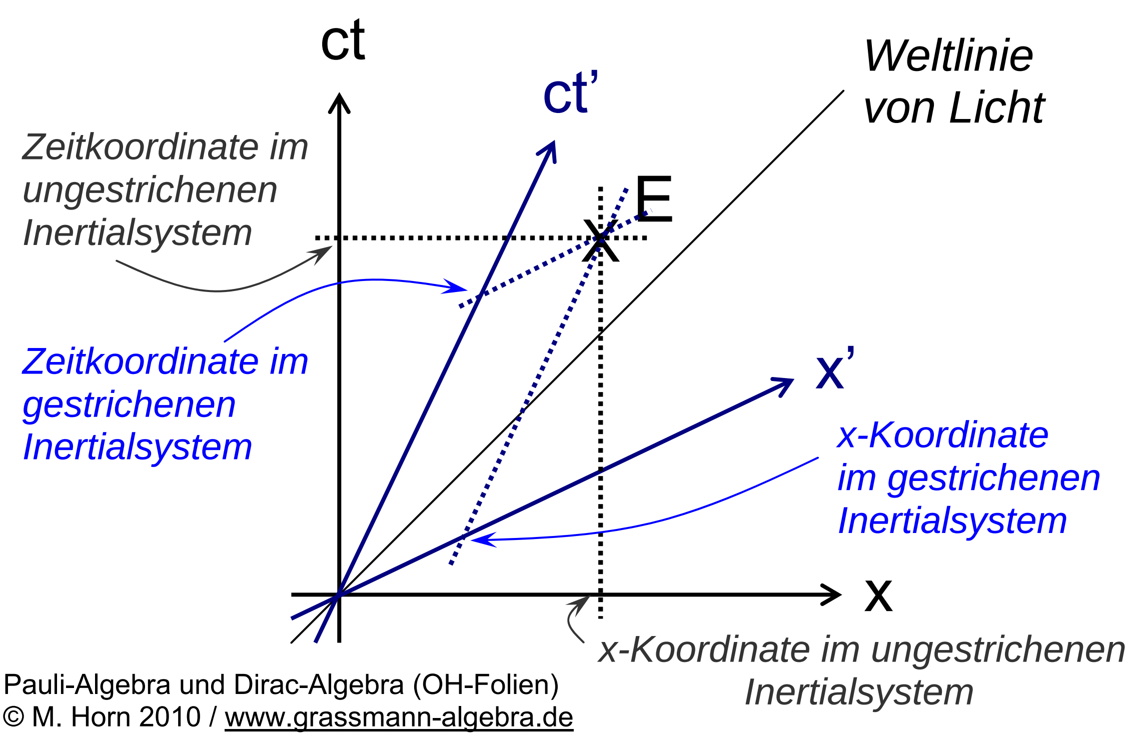
- Aufgrund der Normierung zu $\boldsymbol{\gamma_t}'^2 = 1$ und $\boldsymbol{\gamma_x}'^2 = -1$ erhält man die Basisvektoren, indem man die Richtungsvektoren durch ihre Länge dividiert:

$$\boldsymbol{\gamma_t}' = \frac{\gamma_t + \frac{v}{c}\gamma_x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad \boldsymbol{\gamma_x}' = \frac{\frac{v}{c}\gamma_t + \gamma_x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

- Diese Normierung wird auch **hyperbolische** Normierung genannt.

Blatt 40	Ereignisse in der Raumzeit

- Unsere Welt wird geometrisch durch die vierdimensionale Raumzeit determiniert. Diese Raumzeit ist die Bühne, auf der sich (im Rahmen der Speziellen Relativitätstheorie) alles abspielt.
- Physikalisch wird unsere Welt durch Ereignisse determiniert (z.B.: Ein Elementarteilchen zerfällt; ein Photon wird absorbiert; eine Supernova leuchtet auf; etc...). Diese Ereignisse sind absolut und (sobald sie einmal passiert sind) unabänderlich.
- Relativ ist jedoch unser Blick auf diese Ereignisse. Wir können sie in unterschiedlichen Koordinatensystemen beschreiben:



Blatt 41	Koordinatentransformationen in der STA

- Das Ereignis E hat den Dirac-Ortsvektor $\underline{\underline{r}}$ im ungestrichenen Inertialsystem und den Dirac-Ortsvektor $\underline{\underline{r'}}$ im gestrichenen Inertialsystem.
- Da die Inertialsysteme so gewählt wurden, dass ihr Ursprung zusammenfällt, sind diese Dirac-Ortsvektoren identisch: $\underline{\underline{r}} = \underline{\underline{r'}}$
- Damit lässt sich die Transformation zwischen den beiden Inertialsystemen ermitteln. Sie wird Lorentz-Transformation genannt.

- Man unterscheidet aktive und passive Transformationen.
- Bei einer aktiven Transformation wird ein Ereignis innerhalb eines einzigen Koordinatensystems von einer Ausgangsposition auf eine Endposition transformiert.
- Bei einer passiven Transformation wird dagegen das Koordinatensystem transformiert.
- Die Herleitung auf der folgenden Folie ist somit eine passive Transformation. In den später folgenden Folien wird dann die aktive Transformation (in Form einer Rotation) behandelt.

Blatt 42	Herleitung der Lorentz-Transformation

- Dirac-Ortsvektor des Ereignisses E im gestrichenen Inertialsystem:

  $\underline{\underline{r}}' = ct'\gamma_t' + x'\gamma_x'$

  $$= ct' \frac{\gamma_t + \frac{v}{c}\gamma_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + x' \frac{\frac{v}{c}\gamma_t + \gamma_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

  $$= \underbrace{\frac{ct' + \frac{x'v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}_{ct} \gamma_t + \underbrace{\frac{x' + vt'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}_{x} \gamma_x$$

- Der Vergleich mit dem Dirac-Ortsvektor des Ereignisses E im ungestrichenen Inertialsystem

  $\underline{\underline{r}} = ct\,\gamma_t + x\,\gamma_x$

  führt auf die Lorentz-Transformation:

$$t = \frac{t' + \frac{x'v}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Blatt 43	Reflexionen in der STA

- Einheitsvektor $\underline{\underline{n}}$:

  $\underline{\underline{n}} = n_t\gamma_\mathbf{t} + n_x\gamma_\mathbf{x} + n_y\gamma_\mathbf{y} + n_z\gamma_\mathbf{z}$

- Eine Reflexion des Dirac-Vektors $\underline{\underline{r}}$ am auf $\underline{\underline{n}}$ senkrecht stehenden Volumen ergibt den reflektierten Dirac-Vektor $\underline{\underline{r}}'$:

$\underline{\underline{r}}' = -\,\underline{\underline{n}}\ \underline{\underline{r}}\ \underline{\underline{n}}$	bei zeitartigen Einheitsvektoren mit $\underline{\underline{n}}^2 = 1$
$\underline{\underline{r}}' = +\,\underline{\underline{n}}\ \underline{\underline{r}}\ \underline{\underline{n}}$	bei raumartigen Einheitsvektoren mit $\underline{\underline{n}}^2 = -1$

Blatt 44	Beispiel einer räumlichen Reflexion I

- Dirac-Ortsvektoren: $\underline{\underline{r}}_A = 5\gamma_y + 4\gamma_z$

  $\underline{\underline{r}}_B = 4\gamma_y + 4\gamma_z$

- Reflexionsvektor: $\underline{\underline{n}} = \frac{1}{\sqrt{10}}(3\gamma_y + 1\gamma_z)$

  ($\underline{\underline{n}}^2 = -1 \Rightarrow$ raumartig)

- Reflektierte Dirac-Ortsvektoren:

$$\underline{\underline{r}}_A' = \frac{1}{\sqrt{10}}(3\gamma_y + \gamma_z)(5\gamma_y + 4\gamma_z)\frac{1}{\sqrt{10}}(3\gamma_y + \gamma_z)$$

$$= \frac{1}{10}(-19 + 7\gamma_y\gamma_z)(3\gamma_y + \gamma_z)$$

$$= \frac{1}{10}(-64\gamma_y + 2\gamma_z) = -6{,}4\gamma_y + 0{,}2\gamma_z$$

$$\underline{\underline{r}}_B' = \frac{1}{\sqrt{10}}(3\gamma_y + \gamma_z)(4\gamma_y + 4\gamma_z)\frac{1}{\sqrt{10}}(3\gamma_y + \gamma_z)$$

$$= \frac{1}{10}(-16 + 8\gamma_y\gamma_z)(3\gamma_y + \gamma_z)$$

$$= \frac{1}{10}(-56\gamma_y + 8\gamma_z) = -5{,}6\gamma_y + 0{,}8\gamma_z$$

- Probe: $(5\gamma_y + 4\gamma_z)^2 = (-6{,}4\gamma_y + 0{,}2\gamma_z)^2 = -41$

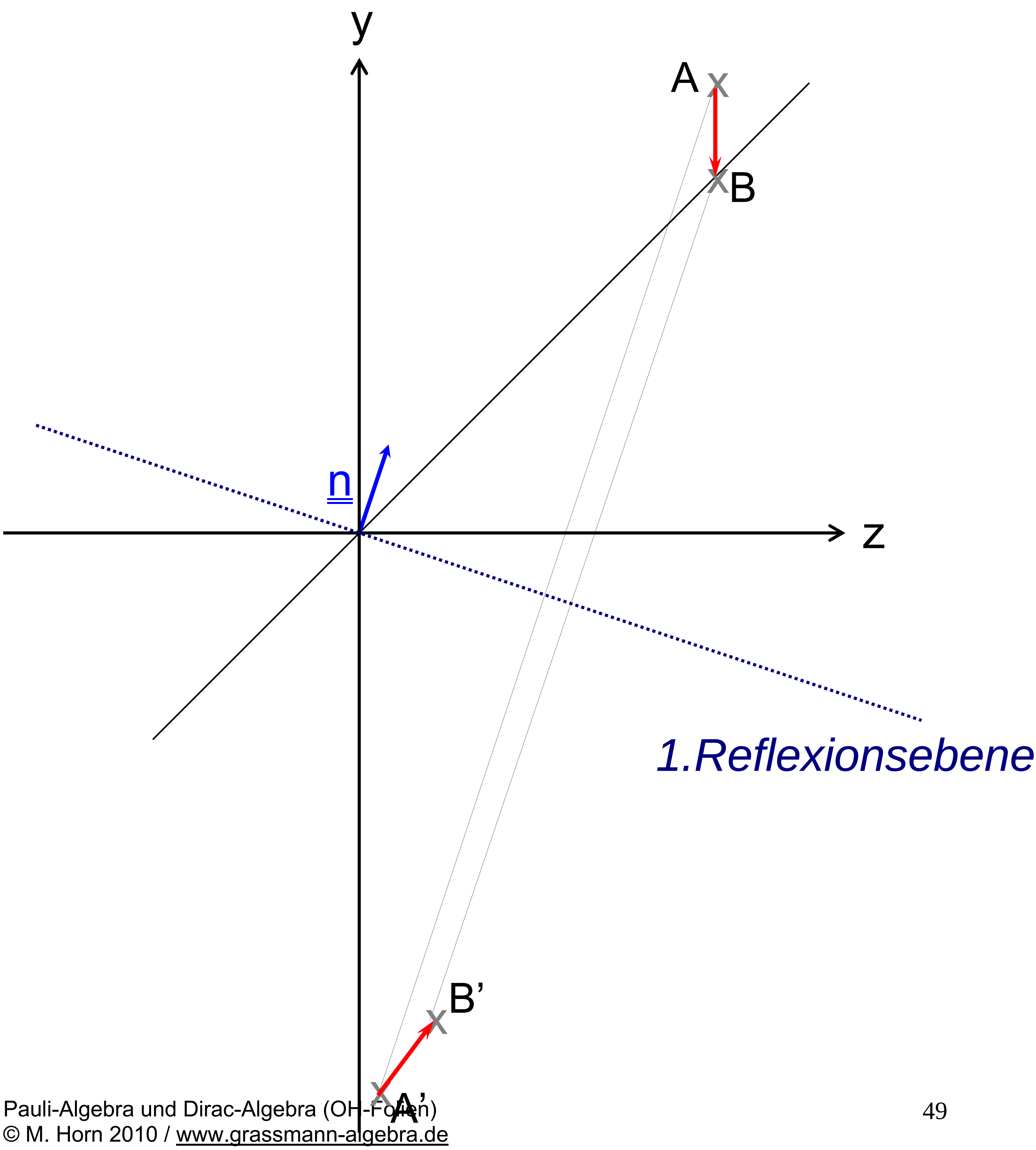
  $(4\gamma_y + 4\gamma_z)^2 = (-5{,}6\gamma_y + 0{,}8\gamma_z)^2 = -32$

Blatt 45	Beispiel einer räumlichen Reflexion II

$$\underline{\underline{r}}_A = 5\gamma_y + 4\gamma_z \qquad \longrightarrow \qquad \underline{\underline{r}}'_A = -6{,}4\gamma_y + 0{,}2\gamma_z$$

$$\underline{\underline{r}}_B = 4\gamma_y + 4\gamma_z \qquad \qquad \underline{\underline{r}}'_B = -5{,}6\gamma_y + 0{,}8\gamma_z$$

$$\boxed{\underline{\underline{n}} = \frac{1}{\sqrt{10}}(3\gamma_y + \gamma_z)}$$



Blatt 46	Beispiel einer raumzeitlichen Reflexion I

- Dirac-Ortsvektoren: $\underline{\underline{r}}_A = 5\gamma_t + 4\gamma_x$

  $\underline{\underline{r}}_B = 4\gamma_t + 4\gamma_x$

- Reflexionsvektor: $\underline{\underline{n}} = \frac{1}{\sqrt{8}}(3\gamma_t + 1\gamma_x)$

  ($\underline{\underline{n}}^2 = +1 \Rightarrow$ zeitartig)

- Reflektierte Dirac-Ortsvektoren:

$$\underline{\underline{r}}_A' = -\frac{1}{\sqrt{8}}(3\gamma_t + \gamma_x)(5\gamma_t + 4\gamma_x)\frac{1}{\sqrt{8}}(3\gamma_t + \gamma_x)$$

$$= -\frac{1}{8}(11 + 7\gamma_t\gamma_x)(3\gamma_t + \gamma_x)$$

$$= \frac{1}{8}(-26\gamma_t + 10\gamma_x) = -3{,}25\gamma_t + 1{,}25\gamma_x$$

$$\underline{\underline{r}}_B' = -\frac{1}{\sqrt{8}}(3\gamma_t + \gamma_x)(4\gamma_t + 4\gamma_x)\frac{1}{\sqrt{8}}(3\gamma_t + \gamma_x)$$

$$= -\frac{1}{8}(8 + 8\gamma_t\gamma_x)(3\gamma_t + \gamma_x)$$

$$= \frac{1}{8}(-16\gamma_t + 16\gamma_x) = -2\gamma_t + 2\gamma_x$$

- Probe: $(5\gamma_t + 4\gamma_x)^2 = (-3{,}25\gamma_t + 1{,}25\gamma_x)^2 = 9$

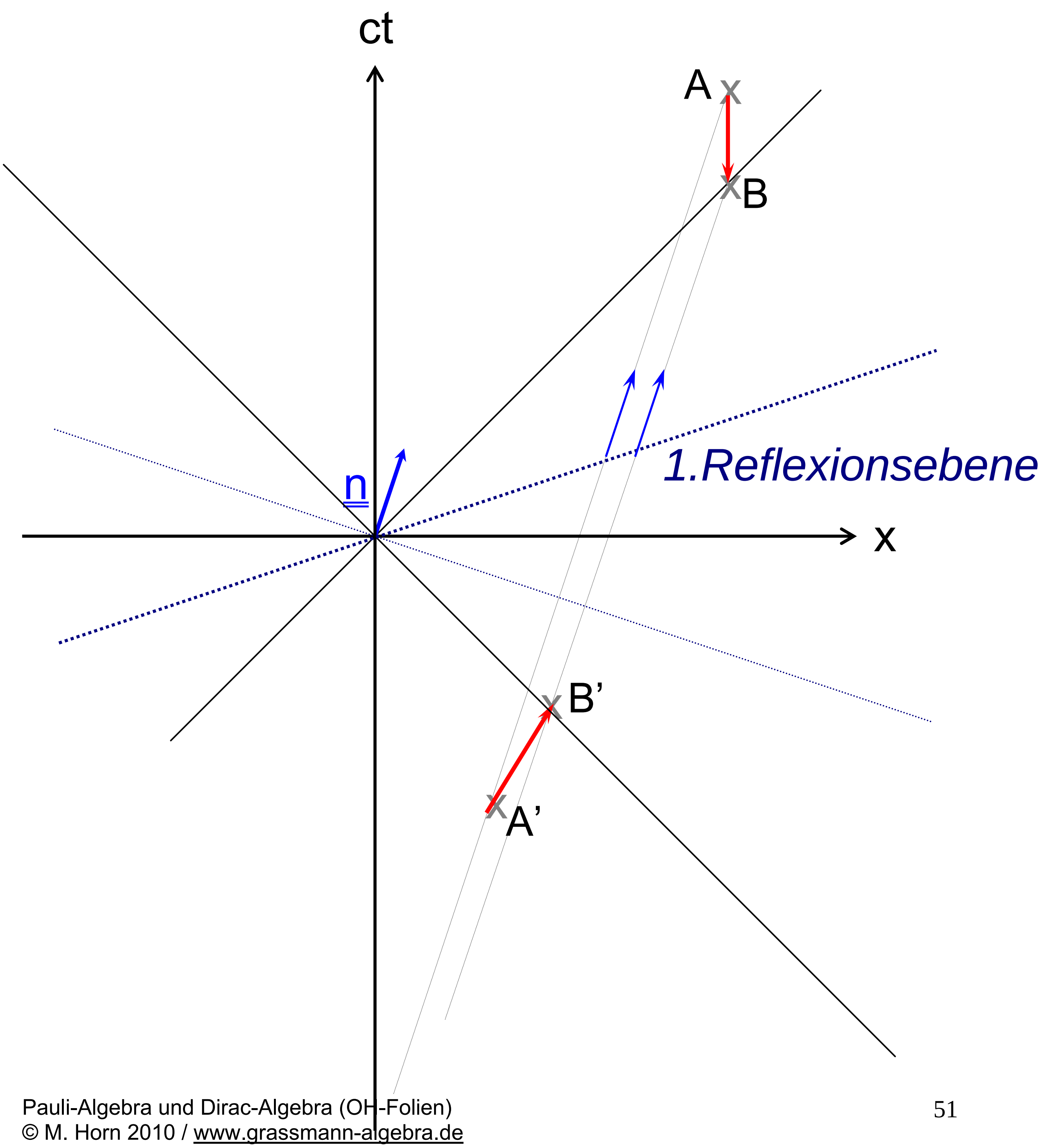
  $(4\gamma_t + 4\gamma_x)^2 = (-2\gamma_t + 2\gamma_x)^2 = 0$

Blatt 47	Beispiel einer raumzeitlichen Reflexion II

$$\underline{\underline{r}}_A = 5\gamma_t + 4\gamma_x \qquad \underline{\underline{r}}'_A = -3{,}25\gamma_t + 1{,}25\gamma_x$$

$$\underline{\underline{r}}_B = 4\gamma_t + 4\gamma_x \longrightarrow \underline{\underline{r}}'_B = -2\gamma_t + 2\gamma_x$$

$$\boxed{\underline{\underline{n}} = \frac{1}{\sqrt{8}}(3\gamma_t + \gamma_x)}$$



Blatt 48	Rotationen in der STA

- Zwei hintereinander ausgeführte Reflexionen ergeben eine Rotation.
- Zweiter Einheitsvektor $\underline{\underline{\underline{m}}}$:

$$\underline{\underline{\underline{m}}} = m_t\gamma_\mathbf{t} + m_x\gamma_\mathbf{x} + m_y\gamma_\mathbf{y} + m_z\gamma_\mathbf{z}$$

- Eine zweite Reflexion des bereits einmal reflektierten Dirac-Vektors $\underline{\underline{r}}'$ am auf $\underline{\underline{\underline{m}}}$ senkrecht stehenden Volumen ergibt den gedrehten Dirac-Vektor $\underline{\underline{r}}_{rot}$:

$$\underline{\underline{r}}_{rot} = -\,\underline{\underline{\underline{m}}}\;\underline{\underline{r}}'\;\underline{\underline{\underline{m}}}$$ bei zeitartigen Einheitsvektoren mit $\underline{\underline{\underline{m}}}^2 = 1$

$$\underline{\underline{r}}_{rot} = +\,\underline{\underline{\underline{m}}}\;\underline{\underline{r}}'\;\underline{\underline{\underline{m}}}$$ bei raumartigen Einheitsvektoren mit $\underline{\underline{\underline{m}}}^2 = -1$

- Damit ergibt sich als Rotorgleichung:

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{r}}_{rot} &= -\,\underline{\underline{\underline{m}}}\;\underline{\underline{r}}'\;\underline{\underline{\underline{m}}} \\
&= -\,\underline{\underline{\underline{m}}}\,(-\,\underline{\underline{\underline{n}}}\;\underline{r}\;\underline{\underline{\underline{n}}})\,\underline{\underline{\underline{m}}} \\
&= \underbrace{\underline{\underline{\underline{m}}}\,\underline{\underline{\underline{n}}}}\;\underline{r}\;\underbrace{\underline{\underline{\underline{n}}}\,\underline{\underline{\underline{m}}}} \\
\underline{\underline{r}}_{rot} &= \;\underline{\underline{\underline{R}}}\;\;\underline{\underline{r}}'\;\;\underline{\underline{\underline{R}}}^{\sim}
\end{aligned}$$

wenn $\underline{\underline{\underline{m}}}$ und $\underline{\underline{\underline{n}}}$ beide raumartig oder beide zeitartig

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{r}}_{rot} &= -\,\underline{\underline{\underline{m}}}\,\underline{\underline{\underline{n}}}\;\underline{r}\;\underline{\underline{\underline{n}}}\,\underline{\underline{\underline{m}}} \\
\underline{\underline{r}}_{rot} &= -\;\underline{\underline{\underline{R}}}\;\;\underline{\underline{r}}'\;\;\underline{\underline{\underline{R}}}^{\sim}
\end{aligned}$$

wenn $\underline{\underline{\underline{m}}}$ raumartig und $\underline{\underline{\underline{n}}}$ zeitartig oder umgekehrt

Blatt 49	Beispiel einer räumlichen Rotation I

- Dirac-Orts-vektoren: $\underline{\underline{r}}_A = 5\gamma_y + 4\gamma_z$, $\underline{\underline{r}}_B = 4\gamma_y + 4\gamma_z$ | $\underline{\underline{r}}'_A = -6{,}4\gamma_y + 0{,}2\gamma_z$, $\underline{\underline{r}}'_B = -5{,}6\gamma_y + 0{,}8\gamma_z$
- Zweiter Reflexionsvektor: $\underline{\underline{m}} = \gamma_y$
  ($\underline{\underline{m}}^2 = -1 \Rightarrow$ raumartig)
- Zweifach reflektierte Dirac-Ortsvektoren:

$$\underline{\underline{r}}_{Arot} = \frac{1}{10}\,\gamma_y\,(-64\gamma_y + 2\gamma_z)\,\gamma_y$$

$$= \frac{1}{10}\,(64 + 2\gamma_y\gamma_z)\,\gamma_y$$

$$= \frac{1}{10}\,(64\gamma_y + 2\gamma_z) = 6{,}4\gamma_y + 0{,}2\gamma_z$$

$$\underline{\underline{r}}_{Brot} = \frac{1}{10}\,\gamma_y\,(-56\gamma_y + 8\gamma_z)\,\gamma_y$$

$$= \frac{1}{10}\,(56 + 8\gamma_y\gamma_z)\,\gamma_y$$

$$= \frac{1}{10}\,(56\gamma_y + 8\gamma_z) = 5{,}6\gamma_y + 0{,}8\gamma_z$$

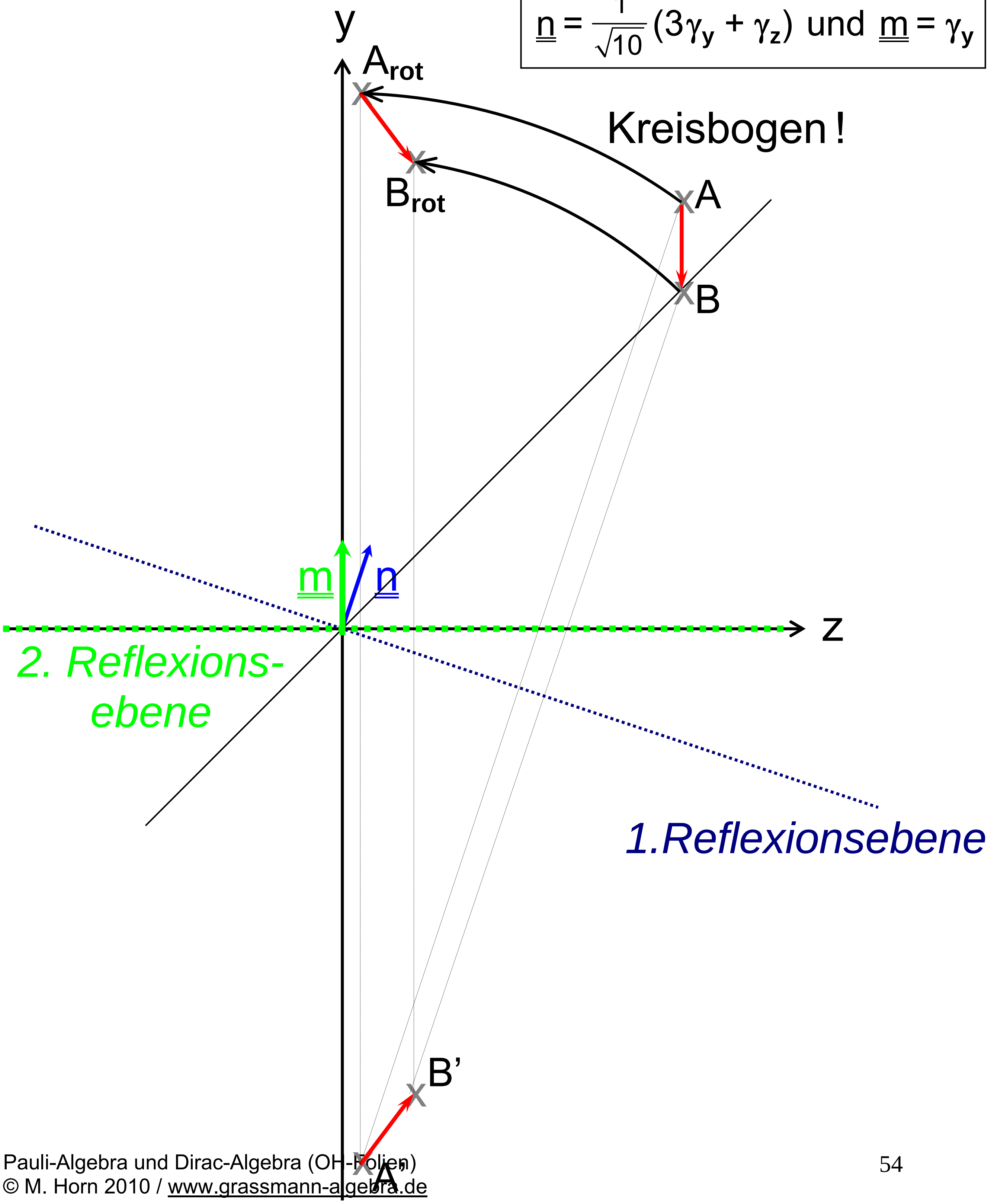
- Probe: $(5\gamma_y + 4\gamma_z)^2 = (6{,}4\gamma_y + 0{,}2\gamma_z)^2 = -41$
  $(4\gamma_y + 4\gamma_z)^2 = (5{,}6\gamma_y + 0{,}8\gamma_z)^2 = -32$

Blatt 50	Beispiel einer räumlichen Rotation II

$$\underline{\underline{r}}_A = 5\gamma_y + 4\gamma_z \qquad \longrightarrow \qquad \underline{\underline{r}}_{Arot} = 6{,}4\gamma_y + 0{,}2\gamma_z$$

$$\underline{\underline{r}}_B = 4\gamma_y + 4\gamma_z \qquad\qquad \underline{\underline{r}}_{Brot} = 5{,}6\gamma_y + 0{,}8\gamma_z$$

$$\boxed{\underline{\underline{n}} = \frac{1}{\sqrt{10}}(3\gamma_y + \gamma_z) \text{ und } \underline{\underline{m}} = \gamma_y}$$



Blatt 51 | Beispiel einer raumzeitlichen Rotation I

- Dirac-Orts-vektoren: $\underline{\underline{r}}_A = 5\gamma_t + 4\gamma_x$, $\underline{\underline{r}}_B = 4\gamma_t + 4\gamma_x$ | $\underline{\underline{r}}'_A = -3{,}25\gamma_t + 1{,}25\gamma_x$, $\underline{\underline{r}}'_B = -2\gamma_t + 2\gamma_x$

- Zweiter Reflexionsvektor: $\underline{\underline{m}} = \gamma_t$
  ($\underline{\underline{m}}^2 = +1 \Rightarrow$ zeitartig)

- Zweifach reflektierte Dirac-Ortsvektoren:

$$\underline{\underline{r}}_{Arot} = -\frac{1}{8}\,\gamma_t\,(-26\gamma_t + 10\gamma_x)\,\gamma_t$$

$$= -\frac{1}{8}\,(-26 + 10\gamma_t\gamma_x)\,\gamma_t$$

$$= \frac{1}{8}\,(26\gamma_t + 10\gamma_x) = 3{,}25\gamma_t + 1{,}25\gamma_x$$

$$\underline{\underline{r}}_{Brot} = -\gamma_t\,(-2\gamma_t + 2\gamma_x)\,\gamma_t$$

$$= (2 - 2\gamma_t\gamma_x)\,\gamma_t$$

$$= 2\gamma_t + 2\gamma_x$$

- Probe: $(5\gamma_t + 4\gamma_x)^2 = (3{,}25\gamma_t + 1{,}25\gamma_x)^2 = 9$
  $(4\gamma_t + 4\gamma_x)^2 = (2\gamma_t + 2\gamma_x)^2 = 0$

Blatt 52	Beispiel einer raumzeitlichen Rotation II

$\underline{\underline{r}}_A = 5\gamma_t + 4\gamma_x$

$\underline{\underline{r}}_B = 4\gamma_t + 4\gamma_x$

$\longrightarrow$

$\underline{\underline{r}}_{Arot} = 3{,}25\gamma_t + 1{,}25\gamma_x$

$\underline{\underline{r}}_{Brot} = 2\gamma_t + 2\gamma_x$

$$\boxed{\underline{\underline{n}} = \frac{1}{\sqrt{8}}(3\gamma_t + \gamma_x) \text{ und } \underline{\underline{m}} = \gamma_t}$$