

Die Spezielle Relativitätstheorie in der Mathematiker Ausbildung

Martin Erik Horn*

*Beuth-Hochschule für Technik Berlin, Fachbereich 2 (Mathematik – Physik – Chemie),
Luxemburger Str. 10, D – 13353 Berlin (Wintersemester 2009/2010)
Email: martinhorn@beuth-hochschule.de

Kurzfassung

Die Spezielle Relativitätstheorie lässt sich in zahlreichen, sehr unterschiedlichen mathematischen Darstellungen behandeln. Als eine didaktisch tragfähige und mathematisch äußerst anschauliche Herangehensweise hat sich die Nutzung von Dirac-Matrizen als Basisvektoren der vierdimensionalen Raumzeit gezeigt.

Im Rahmen einer seminaristischen Lehrveranstaltung zur Physik für Mathematiker an der Beuth-Hochschule Berlin wurde dieser Ansatz gewählt, um in die relativistische Mechanik einzuführen. Es zeigt sich, dass durch diesen Ansatz bei den Studierenden ein übergreifendes Verständnis der Eigenschaften des dreidimensionalen Raumes im Vergleich zu denen der vierdimensionalen Raumzeit entwickelt werden kann.

Darüber hinaus wird insbesondere auch das Ziel dieser Lehrveranstaltung, mit den Studentinnen und Studenten die Denk- und Vorgehensweisen naturwissenschaftlicher Erkenntnisgewinnung und Modellierung exemplarisch nachzuvollziehen, bei diesem Weg in die Spezielle Relativitätstheorie in einer für die Lernenden überzeugenden Art und Weise erreicht.

Inhaltsübersicht

1. Einführung
2. Die Geometrische Algebra in der Hochschullehre
3. Zentraler Ansatz der Geometrischen Algebra
4. Operationen in der Geometrischen Algebra
5. Rotationen in der Geometrischen Algebra
6. Reflexionen und Rotationen in der Raumzeit
7. Relativitätstheorie in Schule und Hochschule
8. Ausblick
9. Literatur

1. Einführung

Die Spezielle Relativitätstheorie verknüpft Raum und Zeit in subtiler und gleichzeitig faszinierender Art und Weise. Je nach Blickwinkel bzw. Relativgeschwindigkeit erscheinen die unsere Welt aufspannenden und damit konstituierenden Größen einmal als Raum, ein anderes Mal als Zeit.

Wie bei einer Rotation kann Raum in Zeit und Zeit in Raum transformiert werden, ist eine der möglichen Sprechweisen. Doch die Zusammenhänge sind bei weiterer Analyse noch ausgefeilter. Bei einer Kreisbewegung nimmt die erste Koordinatengröße $|x|$ betragsmäßig ab, während die andere Koordinatengröße $|y|$ betragsmäßig zunimmt: Bei einer räumlichen Rotationsbewegung sind die Koordinaten x und y um 90° phasenverschoben.

Die Verknüpfung aber zwischen Raum- und Zeitdimensionen ist in unserer Welt (und deshalb sinn-

vollerweise auch in der unsere Welt beschreibenden Speziellen Relativitätstheorie) nicht euklidisch: Raum wird nicht in Zeit transformiert, sondern Raum wird in noch mehr Raum und zusätzliche Zeit transformiert. Bei einer Lorentztransformation nimmt sowohl der Betrag der räumlichen Koordinate $|x|$ und gleichzeitig der Betrag der zeitlichen Koordinate $|t|$ zu. Oder beide nehmen gleichzeitig ab. Je nach Blickwinkel bzw. Relativgeschwindigkeit „haben“, „sehen“, „spüren“ oder messen wir viel Raum und viel Zeit oder wenig Raum und wenig Zeit (siehe Abbildung 1).

Diese Beziehungen und das gesamte Gedankengebäude der Speziellen Relativitätstheorie lassen sich jedoch in zahlreichen, sehr unterschiedlichen und vor allem unterschiedliche Schwerpunkte setzenden mathematischen Darstellungen behandeln. In diesem Beitrag wird die Mathematik der Geometrischen Algebra G_3 (und das heißt gleichzeitig der Pauli-Algebra, der Clifford-Algebra $Cl_{3,0}$, der Biquaternionen algebra bzw. der Algebra der komplexen Quaternionen)¹ zur Beschreibung des dreidimensionalen Raumes und die Mathematik der Raumzeit-Algebra als vierdimensional erweiterte Geometrische Algebra G_4 (und damit gleichzeitig der Dirac-Algebra bzw. der Clifford-Algebra $Cl_{1,3}$)² zur Beschreibung der

¹ Diese Algebren sind mathematisch isomorph und damit hinsichtlich physikalischer Anwendungsmöglichkeiten identisch nutzbar, siehe [2].

² Auch diese Algebren sind mathematisch isomorph und damit hinsichtlich physikalischer Anwendungsmöglichkeiten identisch nutzbar, siehe ebenfalls [2].

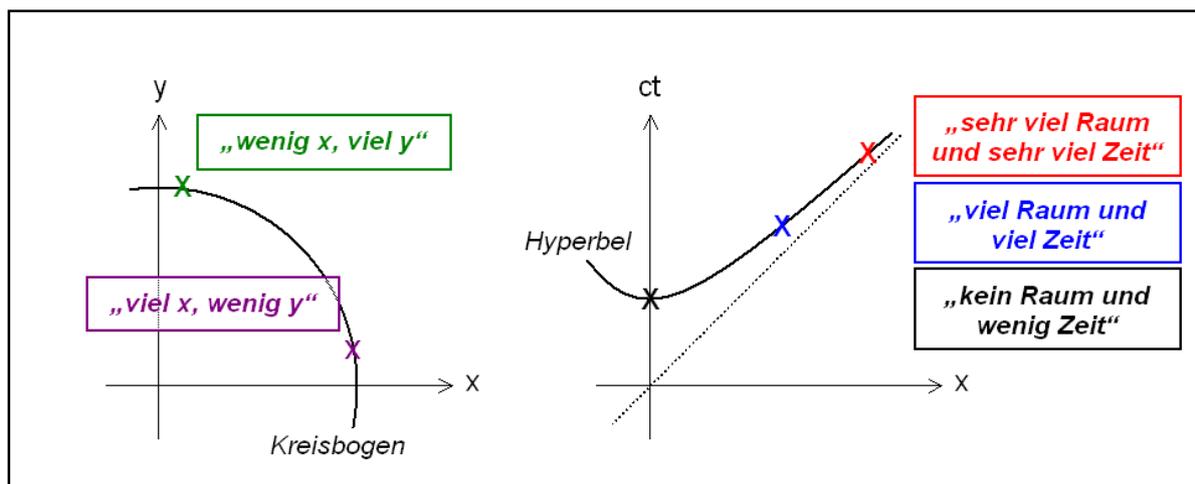


Abb.1: Rein räumliche Rotation (links) und raumzeitliche Rotation (rechts) im Vergleich. (Die wenig fachsprachliche und naiv umgangssprachliche, aber hoffentlich eingängliche Beschriftung bittet der Autor als schulalltagsangemessen zu entschuldigen.)

vierdimensionalen Raumzeit herangezogen. Der Grund ist simpel: Schon 1966 hat David Hestenes gezeigt [10], dass die Interpretation und Nutzung von Pauli-Matrizen als Basisvektoren des dreidimensionalen Raumes [11] und die Interpretation und Nutzung von Dirac-Matrizen [12] als Basisvektoren der vierdimensionalen Raumzeit eine didaktisch ausgesprochen tragfähige, mathematisch einsichtige und anschauliche Herangehensweise darstellt.

Die ursprüngliche Formulierung der Geometrischen Algebra geht jedoch auf Hermann Graßmann [7] und William Kingdon Clifford zurück [4], die erstmals konkrete, nicht-kommutative Größen zur Beschreibung des physikalischen Raumes heranzogen.

2. Die Geometrische Algebra in der Hochschullehre

Schon Graßmann formulierte seine Überzeugung, dass seine Ideen und damit die Geometrische Algebra einerseits einen wesentlichen Beitrag zu einer konsistenten mathematischen Darstellung physikalischer Sachverhalte liefern können und andererseits diese in Schul- und Hochschullehre mit einzubinden seien. So schrieb er im Vorwort der 1844 veröffentlichten Ausdehnungslehre [7, S. xv]: „Durch diese Anwendungen auf die Physik glaubte ich besonders die Wichtigkeit, ja die Unentbehrlichkeit der neuen Wissenschaft und der in ihr gebotenen Analyse dargethan zu haben. Dass dieselbe in ihrer konkreten Gestalt (...) einen vortrefflichen Unterrichtsgegenstand liefern würde, welcher einer durchaus elementaren Behandlung fähig ist, hoffe ich gelegentlich einmal nachweisen zu können ...“

Leider konnte Graßmann seine Ideen nie im universitären Rahmen umsetzen, doch griffen andere die Geometrische Algebra in der Hochschullehre und insbesondere in der Mathematiker Ausbildung auf. Einer dieser Mathematiker war W. E. Hyde, der in

einem seiner Lehrbücher schreibt: „The author, though formerly an enthusiastic admirer of Hamilton’s Quaternions, has been brought, by study and experience in teaching both, to a firm belief in the great practical as well as theoretical, superiority of Grassmann’s system“ [18, S. iv].

Zwar mag uns aus heutiger Sicht die Unterscheidung zwischen Hamiltons Quaternionen und Graßmanns Ansätzen überflüssig erscheinen, zeigte doch schon Graßmann [8] und darauf aufbauend Clifford [4], wie die Struktur der Quaternionen in das Graßmannsche Gedankengebäude einzufügen sind. Biquaternionenalgebra und Geometrische Algebra G_3 sind isomorph und dementsprechend hinsichtlich Ihrer physikalischen Anwendungsmächtigkeit und Interpretationsmöglichkeiten nicht nur gleichwertig, sondern identisch.

Doch beeindruckend an Hydes Werk ist gerade auch die beständige Vertiefung und jahrzehntelange universitäre Lehre der Ideen Graßmanns.

Aktuell wird die Geometrische Algebra vor allem von Physikern (etwa in Arizona [11], Cambridge [6], Utrecht [28], Windsor (Ontario) [2], Fukui (Japan) [14], Barcelona [22], Puebla (Mexiko) [26] oder Decorah (Iowa) [19]) und von Informatikern (etwa in Kiel [25], Darmstadt [13] oder Bournemouth (Südenland) [27]) im akademischen Bereich gelehrt. Dabei wird im Allgemeinen ein top-down-Ansatz umgesetzt: Aus der Forschung und von konkreten fachlichen Anwendungen abgeleitet – also gewissermaßen von „oben“ kommend – wird die Geometrische Algebra didaktisch in die universitäre Lehre eingeführt und entsprechend ausgerichtet didaktisch gestaltet.

Hier in diesem Beitrag wird dagegen ein bottom-up-Ansatz verwirklicht. Grundlage des hier vorgestellten Konzeptes ist eine schulisch erprobte Unter-

richtseinheit zur Raumzeit-Algebra (siehe [15], [16] bzw. [17]), auf die aufgebaut und die didaktisch erweitert wird. Damit steht für den Einsatz im Fachhochschulbereich ein im schulischen Kontext – also salopp gesprochen „unten“ – verwurzelter Ansatz zur Verfügung.

3. Zentraler Ansatz der Geometrischen Algebra

Der wesentliche Beitrag Graßmanns besteht darin, die konstituierenden geometrischen Bausteine unseres dreidimensionalen Raumes, also Strecken, Flächenstücke und Volumina, algebraisch umzusetzen, diese algebraisch zu interpretieren und damit direkt mit diesen Bausteinen zu rechnen.

Umgekehrt können bei dieser Herangehensweise algebraische Ausdrücke und somit die Ergebnisse von Rechnungen direkt geometrisch interpretiert und in unseren dreidimensionalen Raum eingebettet werden.

Seit Élie Cartan und damit seit nunmehr fast 80 Jahren wissen wir zudem, dass Pauli-Matrizen die Basisvektoren unseres dreidimensionalen Raums, in dem wir vor Einstein lebten, darstellen [3]. Die Pauli-Matrizen entsprechen somit den Graßmannschen Bausteinen, aus denen unser Raum aufgebaut ist.

Die explizite Wahl von (2 x 2)-Matrizen ist jedoch willkürlich, irrelevant und vor allem verwirrend abstrakt. Deshalb ist es sinnvoll, Lernanfängern im schulischen Bereich nicht und im hochschulischen Bereich nicht unbedingt sofort mit (2 x 2)-Matrizen zu konfrontieren, sondern lediglich die die Matrizen konstituierende Pauli-Algebra zu nutzen. Entsprechend konsequent wird von Pauli-Vektoren, Pauli-Bivektoren und Pauli-Trivektoren gesprochen die sich – wenn man gerade nicht mit (2 x 2)-Matrizen arbeitet – sehr gut an der Faktorenanzahl an Basisvektoren erkennen kann.

Pauli-Basisvektoren (orientierte Strecken):

- Basisvektor in x-Richtung: σ_x {1}
- Basisvektor in y-Richtung: σ_y {2}
- Basisvektor in z-Richtung: σ_z {3}

Pauli-Basisbivektoren (orientierte Flächenstücke):

- Basis-Bivektor der xy-Ebene: $\sigma_x \sigma_y$ {4}
- Basis-Bivektor der yz-Ebene: $\sigma_y \sigma_z$ {5}
- Basis-Bivektor der zx-Ebene: $\sigma_z \sigma_x$ {6}

Pauli-Basistrivektor (orientiertes Volumen):

- Basis-Trivektor des xyz-Raums: $\sigma_x \sigma_y \sigma_z$ {7}

Die Basisvektoren der vierdimensionalen Raumzeit werden entsprechend durch Dirac-Matrizen gegeben [12]. „We have now reached the point which is liable to cause the greatest intellectual shock“, schrieben Gull, Lasenby und Doran [9], als sie in einem sehr prägnanten und erfreulich provokanten Beitrag diesen Sachverhalt darlegten. Und noch heute, mehr

als 40 Jahre nach Neuformulierung der Geometrischen Algebra durch David Hestenes und fast 20 Jahre nach dem Beitrag von Gull und seinen Kollegen des Cavendish Laboratory Cambridge kann man manche Physiker und Physikdidaktiker mit diesem Sachverhalt durchaus schrecken³.

4. Operationen in der Geometrischen Algebra

Ein wesentliches Strukturmerkmal der Geometrischen Algebra stellt das Wechselspiel von Koordinatenperspektive und Operatorenperspektive dar. Ein beliebiger Pauli-Vektor des dreidimensionalen Raums wird in der Geometrischen Algebra durch die Linearkombination

$$\underline{r} = x \sigma_x + y \sigma_y + z \sigma_z \quad \{8\}$$

dargestellt. Dieser Ausdruck zeigt klar die Koordinatenperspektive. Multipliziert man diesen Vektor rechts- und linksseitig mit der Basis-Einheit σ_x , so wechselt man in die ursprünglich von Pauli [23] und Dirac [5] präsentierte Operatorenperspektive, die sie im drei- und vierdimensionalen Fall quantenmechanisch implementierten. Im klassischen Fall ergibt sich

$$\begin{aligned} \underline{r}' &= \sigma_x (x \sigma_x + y \sigma_y + z \sigma_z) \sigma_x \\ &= x \sigma_x - y \sigma_y - z \sigma_z \end{aligned} \quad \{9\}$$

simpel der an der x-Achse gespiegelte Vektor \underline{r}' . Dabei ändern die y- und z-Koordinaten ihr Vorzeichen, während die x-Koordinate unverändert bleibt. Damit erhält man folgende, {1} bis {3} ergänzende Zuordnungen.

Pauli-Reflexionen I:

- Basisreflexion an der x-Achse: σ_x {10}
- Basisreflexion an der y-Achse: σ_y {11}
- Basisreflexion an der z-Achse: σ_z {12}

(siehe auch [24, S. 208 – 211]).

Die große Stärke und überzeugende Wirkungsmächtigkeit der Geometrischen Algebra wird unter anderem dadurch verursacht, dass geometrisch begründete Operationen algebraisch strukturell fast intuitiv, auf jeden Fall aber in konsequenter Schärfe geschrieben werden können. Die {4} bis {6} entsprechenden Operationen erhält man bei rechts- und linksseitiger Multiplikation eines beliebigen Pauli-Vektors \underline{r} mit Basis-Bivektoren. Beispielsweise ist

$$\begin{aligned} \underline{r}'' &= \sigma_x \sigma_y (x \sigma_x + y \sigma_y + z \sigma_z) \sigma_x \sigma_y \\ &= x \sigma_x + y \sigma_y - z \sigma_z \end{aligned} \quad \{13\}$$

simpel der an der xy-Ebene gespiegelte Vektor \underline{r}'' .

³ Manche Wissenschaftler erschrecken dann allerdings auch über ihre bisherige Unwissenheit – so wie beispielsweise der Fields-Preisträger Michael Atiyah, der in [1, S. 116] schreibt: „When Singer and I were investigating these questions we ‚rediscovered‘ for ourselves the Dirac operator. Had we been better educated in physics, or had there been the kind of dialogue with physicists (...), we would have got there much sooner.“

Dabei ändert sich lediglich das Vorzeichen der z-Koordinate, während die x- und y-Koordinaten unverändert bleiben. Damit erhält man die im Folgenden aufgeführten Zuordnungen.

Pauli-Reflexionen II:

Basisreflexion an der xy-Ebene: $\sigma_x \sigma_y$ {14}

Basisreflexion an der yz-Ebene: $\sigma_y \sigma_z$ {15}

Basisreflexion an der zx-Ebene: $\sigma_z \sigma_x$ {16}

Nicht nur Vektoren, sondern jedes geometrische Objekt kann mit Hilfe dieser Basis-Reflexionen reflektiert werden (siehe Abbildung 2). Beispielsweise ergibt die Reflexion eines beliebigen orientierten Flächenstücks und Pauli-Bivektors

$$\underline{A} = a_1 \sigma_x \sigma_y + a_2 \sigma_y \sigma_z + a_3 \sigma_z \sigma_x \quad \{19\}$$

an der x-Achse σ_x

$$\begin{aligned} \underline{A}' &= \sigma_x (a_1 \sigma_x \sigma_y + a_2 \sigma_y \sigma_z + a_3 \sigma_z \sigma_x) \sigma_x \\ &= -a_1 \sigma_x \sigma_y + a_2 \sigma_y \sigma_z - a_3 \sigma_z \sigma_x \end{aligned} \quad \{20\}$$

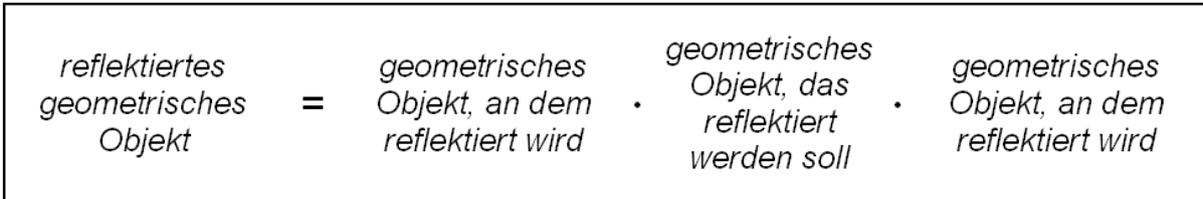


Abb.2: Reflexion im dreidimensionalen Raum der Geometrischen Algebra. (Die Multiplikation wird als geometrische Multiplikation aufgefasst und umfasst automatisch inneres und äußeres Produkt.)

Konsequenterweise ist eine Reflexion eines Vektors am gesamten xyz-Raum nur unter Berücksichtigung eines zusätzlichen negativen Vorzeichens darstellbar,

$$\begin{aligned} \underline{1}''' &= -\sigma_x \sigma_y \sigma_z (x \sigma_x + y \sigma_y + z \sigma_z) \sigma_x \sigma_y \sigma_z \\ &= x \sigma_x + y \sigma_y + z \sigma_z \end{aligned} \quad \{17\}$$

da dann alle Koordinaten ihr ursprüngliches Vorzeichen beibehalten. Damit erhält diese Operation eine Modifikation, die im Rahmen der vierdimensionalen raumzeitlichen Reflexion bei Unterscheidung von raum- und zeitartigen Vektoren noch ausführlicher zu besprechen sein wird.

Pauli-Reflexion III:

Basisreflexion am xyz-Raum: $\sigma_x \sigma_y \sigma_z$ {18}

Dieser Zusatzfaktor von -1 spielt auch bei der Genese der Punktspiegelung eine Rolle, die als Reflexion an einem null-dimensionalen Objekt, dem Basis-Skalar 1, beschrieben werden kann.

ein Flächenstück \underline{A}' , das den Orientierungssinn bezüglich der in der xy-Ebene und der in der zx-Ebene liegenden Teil-Flächenstücke ändert, jedoch den Orientierungssinn bezüglich des sich in der yz-Ebene befindlichen Teil-Flächenstückes beibehält (siehe Abbildung 3).

5. Rotationen in der Geometrischen Algebra

Da die Lorentz-Transformation keine Reflexion, sondern eine Rotation darstellt, muss ein Übergang von der Reflexion zur Rotation geschaffen werden. Dieser gelingt durch die Hintereinanderausführung von zwei Reflexionen, denn jede Rotation kann aus zwei aufeinander folgenden Reflexionen zusammengesetzt gedacht werden (siehe zum Beispiel [21, S. 1135 ff – Kapitel 41.1].

Eine Reflexion an der x-Achse σ_x und sodann an der y-Achse σ_y wird durch die Operation

$$\underline{1}_{rot} = \sigma_y [\sigma_x (x \sigma_x + y \sigma_y + z \sigma_z) \sigma_x] \sigma_y$$

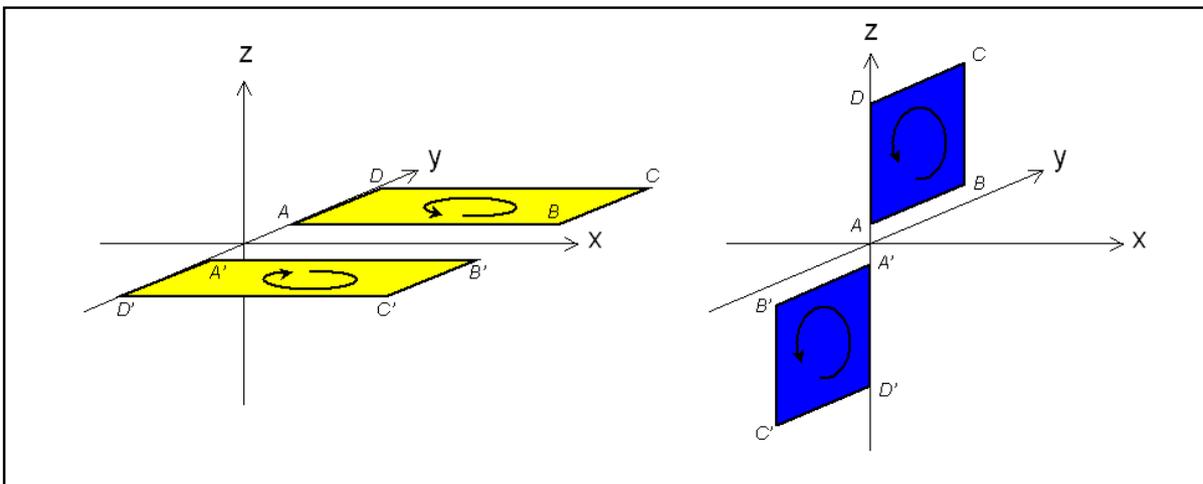


Abb.3: Reflexion eines in der xy-Ebene befindlichen Flächenstücks und Pauli-Bivektors $\sigma_x \sigma_y$ (links) und eines in der yz-Ebene befindlichen Flächenstücks und Pauli-Bivektors $\sigma_y \sigma_z$ (rechts) an der x-Achse σ_x .

$$\begin{aligned} \underline{r}_{\text{rot}} &= \sigma_y \sigma_x (x \sigma_x + y \sigma_y + z \sigma_z) \sigma_x \sigma_y \\ &= -x \sigma_x - y \sigma_y + z \sigma_z \end{aligned} \quad \{21\}$$

beschrieben und stellt eine Rotation um die zur xy-Ebene senkrechte z-Achse um einen Rotationswinkel von $\pi = 180^\circ$ dar. Ein Vergleich der Formeln {13} und {21} zeigt, dass sich Reflexion und Rotation strukturell lediglich durch eine teilweise Reihenfolgenumkehr der diese Operationen determinierenden Basisgrößen unterscheiden.

Darüber hinaus ist bemerkenswert, dass sich Rotationen immer aus einer doppelten (oder vierfachen, achtfachen, auf jeden Fall aber geradzahligem) Anzahl an Reflexionen zusammensetzen und damit eine geradzahlige Unter algebra CC_{30}^+ der Geometrischen Algebra G_3 konstituieren, sofern geradzahlige Objekte rotiert werden. Diese positive Unter algebra entspricht gerade der Quaternionenalgebra H , so dass Quaternionen immer als Produkt zweier Pauli-Matrizen gedeutet werden können [6, S. 34].

6. Reflexionen und Rotationen in der Raumzeit

In der vierdimensionalen Raumzeit tritt neben die drei Raumdimensionen x, y und z die Zeit als vierte Dimension t . Die Dirac-Matrizen stellen die Basisvektoren dieser vierdreidimensionalen Raumzeit, in dem wir seit Einstein leben, dar [10], [11]. Sie entsprechen somit den Graßmannschen Bausteinen, aus denen die gesamte Raumzeit strukturell aufgebaut ist.

Dirac-Basisvektoren (orientierte Strecken):

Zeitlicher Basisvektor: γ_t {22}

Räumlicher Basisvektor in x-Richtung: γ_x {23}

Räumlicher Basisvektor in y-Richtung: γ_y {24}

Räumlicher Basisvektor in z-Richtung: γ_z {25}

Zur Unterscheidung zwischen Pauli-Vektoren des dreidimensionalen Raums und den Dirac-Vektoren

der vierdimensionalen Raumzeit werden letztere doppelt unterstrichen:

$$\underline{r} = ct \gamma_t + x \gamma_x + y \gamma_y + z \gamma_z \quad \{26\}$$

Das mathematische Verhalten der Basisvektoren lässt sich in einem einzigen Satz fassen: „The only rule to remember is that different orthogonal generating units (vectors) anticommute and that their square is +1, -1 (or 0).“ [21]. Zeitliche Dirac-Basisvektoren weisen ein positives Quadrat auf, während räumliche Basisvektoren sich strukturell imaginär verhalten und sich negativ quadrieren:

$$\gamma_t^2 = 1 \quad \gamma_x^2 = \gamma_y^2 = \gamma_z^2 = -1 \quad \{27\}$$

Physikalisch wird diese mathematische Struktur durch das unbestreitbar unterschiedliche Verhalten räumlicher und zeitlicher Größen (das wir unter anderem alle experimentell beim immer-älter-aber-niemals-jünger-Werden beobachten) motiviert.

Beim Wechsel von der Koordinaten- zur Operatorperspektive fällt auf, dass die Basis-Reflexionen unterschiedliche Wirkungen auf den Raumzeit-Vektor \underline{r} entfalten. Eine durch γ_t vermittelte Transformation ergibt

$$\begin{aligned} \underline{r}' &= \gamma_t (ct \gamma_t + x \gamma_x + y \gamma_y + z \gamma_z) \gamma_t \\ &= ct \gamma_t - x \gamma_x - y \gamma_y - z \gamma_z \end{aligned} \quad \{28\}$$

das erwartete Verhalten einer Reflexion an der Zeitachse t , wobei die räumlichen Koordinaten alle ihre Vorzeichen ändern.

Die durch γ_x vermittelte Transformation ergibt mit

$$\begin{aligned} \underline{r}' &= \gamma_x (ct \gamma_t + x \gamma_x + y \gamma_y + z \gamma_z) \gamma_x \\ &= ct \gamma_t - x \gamma_x + y \gamma_y + z \gamma_z \end{aligned} \quad \{29\}$$

jedoch keine Reflexion an der x-Achse, sondern eine Reflexion am tyz -Raum, der senkrecht zur x-Achse aufgespannt ist, wie die Analyse der Vorzeichen der einzelnen Koordinaten zeigt. Um das korrekte Reflexionsverhalten an einer raumartigen Achse zu erhal-

$\text{reflektierter Dirac-Vektor} = \pm \text{Dirac-Einheitsvektor in Richtung der Reflexionsachse} \cdot \text{Dirac-Vektor, der reflektiert werden soll} \cdot \text{Dirac-Einheitsvektor in Richtung der Reflexionsachse}$

raumzeitliche Signatur des Reflexionsvektors

Die Reflexion eines Dirac-Vektors \underline{r} an einer Reflexionsachse, die in Richtung des Dirac-Einheitsvektors $\underline{n} = n_t \gamma_t + n_x \gamma_x + n_y \gamma_y + n_z \gamma_z$ zeigt, wird vermittelt durch

$$\begin{aligned} \underline{r}' &= + \underline{n} \underline{r} \underline{n} && \text{bei zeitartigem Reflexionsvektor mit } \underline{n}^2 = 1 \\ \underline{r}' &= - \underline{n} \underline{r} \underline{n} && \text{bei raumartigem Reflexionsvektor mit } \underline{n}^2 = -1 \end{aligned}$$

Abb.4: Reflexion von Dirac-Vektoren an zeit- und raumartigen Reflexionsachsen in der vierdimensionalen Raumzeit.

ten, muss das negative Vorzeichen des Quadrats des Reflexionsvektors \underline{n} kompensiert werden (siehe Abbildung 4):

$$\begin{aligned}\underline{r}' &= -\gamma_x (ct \gamma_t + x \gamma_x + y \gamma_y + z \gamma_z) \gamma_x \\ &= -ct \gamma_t + x \gamma_x - y \gamma_y - z \gamma_z\end{aligned}\quad \{30\}$$

Eine raumzeitliche Rotation kann wieder durch die Hintereinanderausführung zweier raumzeitlicher Reflexionen generiert werden. Werden diese beiden raumzeitlichen Reflexionen an zwei raumartigen Reflexionsachsen durchgeführt, heben sich die beiden negativen Vorzeichen gegenseitig auf.

Nach diesen Vorarbeiten sind wir in der Lage, die in Abbildung 1 naiv beschriebene hyperbolische Rotation einer Lorentz-Transformation im Rahmen der Raumzeit-Algebra nachzuvollziehen. Dies geschieht hier anschaulich anhand eines Beispiels. Dabei sollen die Dirac-Ortsvektoren

$$\underline{r}_A = 5 \gamma_t + 4 \gamma_x \quad \{31\}$$

$$\underline{r}_B = 4 \gamma_t + 4 \gamma_x \quad \{32\}$$

im ersten Schritt an der zeitartigen Reflexionsachse in Richtung

$$\underline{n} = \frac{1}{\sqrt{8}} (3 \gamma_t + 1 \gamma_x) \quad \{33\}$$

reflektiert werden. Die graphische Darstellung dieser raumzeitlichen Reflexion ist in Abbildung 5 gegeben.

flexionsvektor \underline{n} , da aufgrund der hyperbolischen Geometrie orthogonale Vektoren in Minkowski-Diagrammen symmetrisch zur Weltlinie von Licht und damit symmetrisch zur Winkelhalbierenden liegen.

Darüber hinaus ist die Entfernung der ursprünglichen Punkte A und B zum Schnittpunkt der Hilfslinien mit der Reflexionsachse genauso groß wie die Entfernung dieser Schnittpunkte zu den gespiegelten Punkten A' und B'. Man beachte, dass lichtartige Ortsvektoren (hier \underline{r}_B) wieder als lichtartige Vektoren auf der Weltlinie von Licht (hier \underline{r}_B') abgebildet werden.

Die reflektierten Dirac-Ortsvektoren berechnen sich dann zu

$$\begin{aligned}\underline{r}_A' &= \frac{1}{\sqrt{8}} (3 \gamma_t + 1 \gamma_x) (5 \gamma_t + 4 \gamma_x) \frac{1}{\sqrt{8}} (3 \gamma_t + 1 \gamma_x) \\ &= \frac{1}{8} (11 + 7 \gamma_t \gamma_x) (3 \gamma_t + 1 \gamma_x) \\ &= \frac{1}{8} (26 \gamma_t - 10 \gamma_x) = 3,25 \gamma_t - 1,25 \gamma_x\end{aligned}\quad \{34\}$$

$$\begin{aligned}\underline{r}_B' &= \frac{1}{\sqrt{8}} (3 \gamma_t + 1 \gamma_x) (4 \gamma_t + 4 \gamma_x) \frac{1}{\sqrt{8}} (3 \gamma_t + 1 \gamma_x) \\ &= \frac{1}{8} (8 + 8 \gamma_t \gamma_x) (3 \gamma_t + 1 \gamma_x) \\ &= \frac{1}{8} (16 \gamma_t - 16 \gamma_x) = 2 \gamma_t - 2 \gamma_x,\end{aligned}\quad \{35\}$$

was ein Vergleich von graphisch und rechnerisch er-

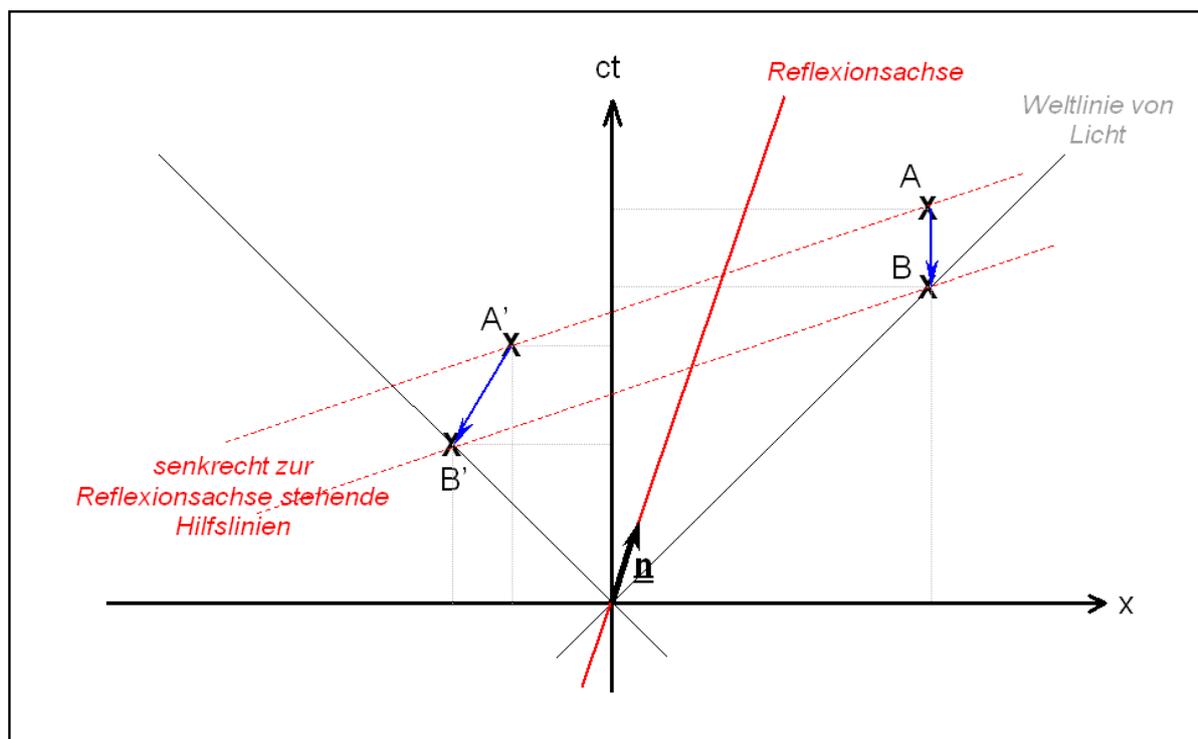


Abb.5: Raumzeitliche Reflexion der beiden Punkte A und B an der rot eingezeichneten zeitartigen Reflexionsachse.

Die an der Reflexionsachse gespiegelten Punkte A' und B' können mit Hilfe der auf der Reflexionsachse senkrecht stehenden und in Abbildung 5 rot gestrichelt eingezeichneten Hilfslinien leicht konstruiert werden. Diese Hilfslinien stehen orthogonal zum Re-

mittelten Werten bestätigt.

Im zweiten Schritt werden die reflektierten Dirac-Ortsvektoren {34} und {35} einer zweiten raumzeitlichen Reflexion an der zeitartigen Reflexionsachse in Richtung von

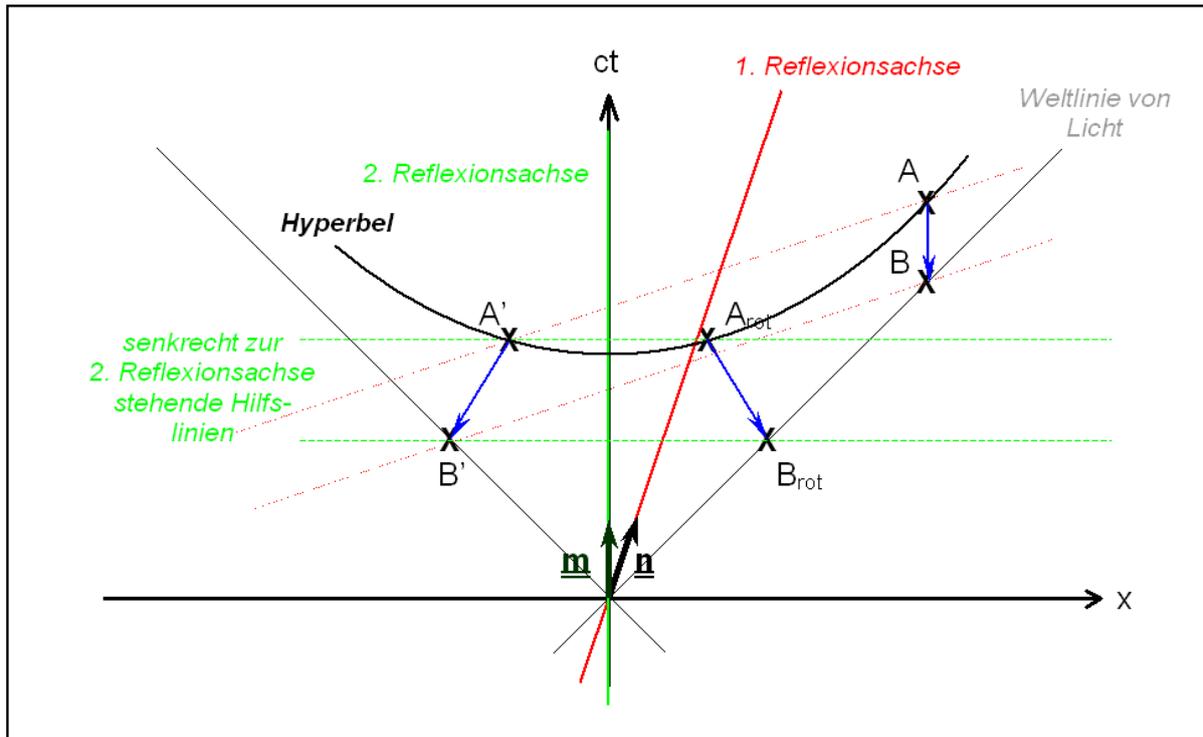


Abb.6: Konstruktion einer raumzeitlichen Rotation der beiden Punkte A und B (Lorentz-Transformation) durch sukzessive Reflexion an den rot und grün eingezeichneten zeitartigen Reflexionsachsen.

$$\underline{m} = \gamma_t \quad \{36\}$$

und damit insgesamt einer raumzeitlichen Rotation unterworfen. Diese zweite Reflexion kann wieder graphisch konstruiert werden (siehe Abbildung 6). Deutlich zu erkennen ist, dass die Bildpunkte A, A' und A_{rot} auf einer Hyperbel und nicht auf einem Kreisbogen liegen, so dass das in Abschnitt 1 und in Abbildung 1 diskutierte Verhalten tatsächlich angemessen modelliert wird. Ein Vergleich mit den rechnerisch ermittelten Werten (siehe Ergebnisse {37} und {38}) bestätigt diesen Sachverhalt.

Bemerkenswert ist im Kontext der Raumzeit-Algebra insbesondere, wie einfach die reflektierten Dirac-Ortsvektoren berechnet werden können:

$$\begin{aligned} \underline{A}_{rot} &= \gamma_t (3,25 \gamma_t - 1,25 \gamma_x) \gamma_t \\ &= (3,25 - 1,25 \gamma_t \gamma_x) \gamma_t \\ &= 3,25 \gamma_t + 1,25 \gamma_x \end{aligned} \quad \{37\}$$

$$\begin{aligned} \underline{B}_{rot} &= \gamma_t (2 \gamma_t - 2 \gamma_x) \gamma_t \\ &= (2 - 2 \gamma_t \gamma_x) \gamma_t \\ &= 2 \gamma_t + 2 \gamma_x \end{aligned} \quad \{38\}$$

Bei den Rechnungen {31} bis {38} handelt es sich um einfache Multiplikationen, die unter Ausnutzung der Nicht-Kommutativität der Dirac-Basisvektoren direkt ausgewertet werden können. Es ist hier kein abstrakter, auf Rotationsmatrizen aufbauender und oft schwer zu durchschauender Formelapparat notwendig.

Diese Eleganz und direkte mathematische Zugänglichkeit durch simple Multiplikationen ist einer der

entscheidenden didaktischen Vorteile der Umsetzung von Lorentz-Transformationen im Rahmen der Raumzeit-Algebra.

7. Relativitätstheorie in Schule und Hochschule

Anlehnend an eine für den Schulbereich entwickelte Unterrichtseinheit zur Speziellen Relativitätstheorie, die im Kontext der Raumzeit-Algebra mathematisch gestaltet wurde, wurde eine über sechs Vorlesungsstunden gehende Einführung in die Geometrische Algebra, die Raumzeit-Algebra und die Spezielle Relativitätstheorie entworfen und im Wintersemester 2009/2010 im Rahmen einer Vorlesung zur Physik für Mathematiker an der Beuth-Hochschule für Technik Berlin erprobt.

Zwischen der Unterrichts- und Lernsituation im schulischen und fachhochschulischen Kontext gab es bezüglich einiger Aspekte deutliche Unterschiede:

- **Zielgruppe**

Zielgruppe im Schulbereich waren die Teilnehmer eines Leistungskurses Physik, die sich in der 13. Jahrgangsstufe und damit kurz vor dem Abitur befanden. Die meisten Leistungskurschüler hatten nicht Mathematik, sondern andere Fächer als zweites Leistungskursfach gewählt und brachten infolgedessen nur geringe mathematische Vorkenntnisse zur Vektorrechnung mit.

Die Zielgruppe im Fachhochschulbereich bestand aus Studentinnen und Studenten des Bachelor-Studiengangs „Applied and Computational Mathematics“ des 3. Studienplansemesters. Sie brachten dem-

entsprechend elaborierte Mathematik-Vorkenntnisse mit.

Als Lehrbeauftragter dieses Kurses ging ich zu Beginn davon aus, dass die Studierenden besser als oder zumindest gleich gut wie die Leistungskurschüler mit Pauli- und Dirac-Algebra zurechtkommen würden – eine Hypothese, die so nicht vollständig zutrifft, da entsprechende Umlernprozesse ein zielgerichtetes Arbeiten (siehe unten) deutlich beeinträchtigen und Lernfortschritte verlangsamen.

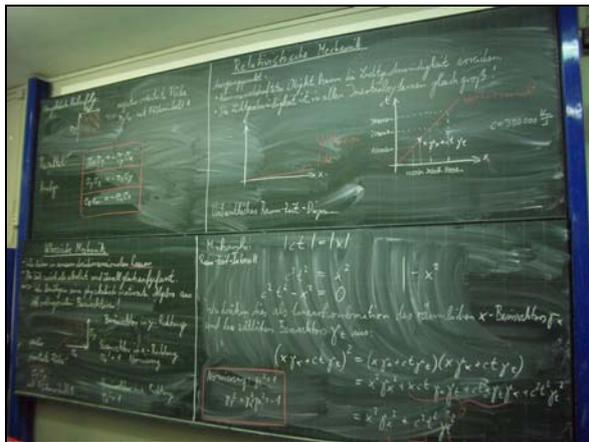


Abb.7: Tafelbild des Einstiegs in die Geometrische Algebra des dreidimensionalen Raumes (links) und der vierdimensionalen Raumzeit (rechts).

• Zeitlicher Rahmen

Im Leistungskurs Physik standen 25 Unterrichtsstunden zur Verfügung, so dass die Lerninhalte bei Bedarf auch recht kleinschrittig, immer unter Einbezug ausgedehnter Diskussions- und Erörterungsphasen und unter Bearbeitung zahlreicher Übungs- und Vertiefungsaufgaben (veröffentlicht in [17]) durch die Schüler erarbeitet werden konnten.

Im Fachhochschulkurs dagegen waren in einem Semester Inhalte aus nahezu der gesamten Breite der Physik zu vermitteln, so dass zur Behandlung der Speziellen Relativitätstheorie (als Teil der Mechanik, siehe Modul T1 in [20]) nur 6 Vorlesungsstunden zur Verfügung standen.

Dies hatte zur Folge, dass nicht immer ein konsequent seminaristischer, diskutierend hinterfragender Ansatz verfolgt werden konnte, sondern Teile der Speziellen Relativitätstheorie relativ dicht und kompakt erörtert werden mussten.

• Metakonzeptuelle Zielrichtung

Im Unterschied zum schulischen Vorgehen, bei dem der Schwerpunkt auf den Koordinatenaspekt gelegt wurde, war geplant, im Fachhochschulkurs die Verknüpfung zwischen Operatoren- und Koordinatenperspektive in den Vordergrund zu stellen. Dies gelang nicht ganz so umfassend wie ursprünglich vorgesehen, da die zeitlichen Vorgaben letztendlich nur eine sehr knappe Umsetzung dieser Planung ermöglichen.

Eine vollständige und gleichzeitig dem Lerntempo der Studierenden angemessene Gestaltung der Lerneinheit muss noch gefunden und dann in einem erneuten Durchgang erprobt werden.

• Inhaltliche Gestaltung

Die im schulischen Kontext gewählte Darstellung mit fast ausschließlicher Erörterung des Koordinatenaspektes der Geometrischen Algebra und der Raumzeit-Algebra wurde in den letzten Jahren von zahlreichen Autoren aufgearbeitet und wird in den Lehrbüchern relativ einheitlich dargestellt.

Anders verhält es sich mit der Operatorenperspektive, die von unterschiedlichen Autoren unterschiedlich präsentiert wird. Bei der Planung des Kurses und Entwurf der Materialien (siehe [29]) folgte ich hier dem Ansatz des Buches von Doran und Lasenby [6, S. 40 – 42], die eine durch den Vektor \underline{n} vermittelte Reflexion in dualer Perspektive als eine Reflexion an der zu \underline{n} senkrecht stehenden Hyper-Ebene definieren. Dies führt zu einem zusätzlichen negativen Vorzeichen, wie es in den entwickelten OH-Folien (beispielsweise Blatt 9b in [29]) zu finden ist.

Dieser Umweg über die Dualitätsoperation in Form einer zusätzlichen Multiplikation mit dem Pseudoskalar kann jedoch vermieden und die konzeptuelle Gestaltung der Reflexion dadurch vereinfacht werden, wie die Darstellung in diesem Beitrag in Abschnitt 4 zeigt. Aufgrund der an der Beuth-Hochschule gemachten Unterrichtserfahrungen kann klar geschlussfolgert werden, dass Reflexionen unter Bezug auf duale Räume verwirren und zu unnötigen didaktischen Komplikationen führen.

Deshalb sind die beigelegten und an der Beuth-Hochschule verwendeten Materialien – die noch dem zuerst gewählten Reflexionsbegriff folgen – nur eine vorläufige Version und bei zukünftigen Kursdurchführungen noch einmal hinsichtlich der Reflexion zu überarbeiten. Die Diskrepanz der beiden Darstellungen zeigt sich gerade auch bei Diskussion der Lorentz-Transformation und wird bei Vergleich

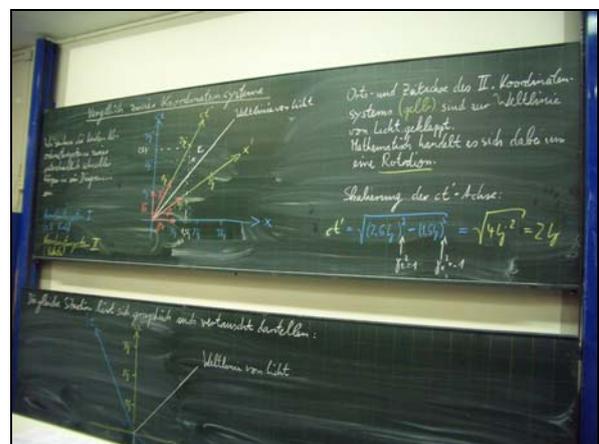


Abb.8: Tafelbild zur Diskussion von Dirac-Basisvektoren unterschiedlicher Koordinatensysteme.

von Blatt 47 in [29] und Abbildung 5 dieses Textes auch graphisch ersichtlich.

Das bedeutet aber nicht, dass die Diskussion der Dualität gänzlich unterlassen werden sollte. Es ist jedoch sinnvoller, diese Diskussion unabhängig von der Reflexion zu einem späteren Zeitpunkt einzuplanen und erst dann eine Verknüpfung zu Reflexionen und Rotationen zu problematisieren.

- **Naturwissenschaftliche Erkenntnisgewinnung**

Durch die Lerneinheit zur Speziellen Relativitätstheorie gelang es, die Denk- und Vorgehensweisen naturwissenschaftlicher Erkenntnisgewinnung und Modellierung sowohl mit den Schülern des Leistungskurses wie auch mit den Studentinnen und Studenten der Beuth-Hochschule nachzuvollziehen und exemplarisch zu verfolgen. Dies zeigen die Diskussionsprozesse, die sich sowohl in Schule wie auch Hochschule intensiv bei der Erörterung speziell-relativistischen Paradoxa ausbildeten.

Auch zeigen diese Diskussionsprozesse und zahlreiche Interaktionen zwischen Schülern bzw. zwischen den Studierenden, dass ein übergreifendes Verständnis der Eigenschaften des dreidimensionalen Raumes im Vergleich zu denen der vierdimensionalen Raumzeit von den Lernenden entwickelt werden konnte. Aufgrund der höheren kommunikativen Kompetenz waren die Studierenden den Leistungskurschülern – ohne dies empirisch belegen zu können – offenkundig etwas überlegen.

- **Umlernprozesse**

Weder der unterrichtete Leistungskurs noch der Kurs an der Beuth-Hochschule kann aufgrund der kleinen Lerngruppen empirisch belastbare Vergleichsdaten über den Erfolg der Lerneinheit zur Speziellen Relativitätstheorie liefern. Dennoch hat es den Anschein, dass die Leistungskurschüler weit weniger Probleme bei der rechnerischen Umsetzung von Pauli- und Dirac-Algebra hatten als die Studierenden. Dies überrascht zunächst, zumal es sich ja um Mathematikstudenten mit einiger Vorerfahrung handelt.

Zwar mögen die zeitliche Knappheit und die daraus resultierende hohe Lerndichte des Fachhochschulkurses auch Teilgründe dafür darstellen, dass die Studierenden offenkundig nicht besser mit der mathematischen Strukturierung der Speziellen Relativitätstheorie zurechtkommen als die im Rückblick doch sehr erfolgreichen Leistungskurschüler.

Doch der wesentliche Grund für das subjektiv empfundene schlechtere Handling der nicht-kommutativen Algebren durch die Studierenden mag gerade in ihren Vorkenntnisse liegen. Sie sind offenkundig schon so stark durch Routinen der Vektorrechnung und der üblichen Darstellungen der Linearen Algebra geprägt, dass diese Prägungen eine Öffnung hinsichtlich Pauli- und Dirac-Algebra deutlich erschweren.

Auch hier zeigt sich prägnant, dass Umlernen deutlich schwieriger ist als Neulernen. Der für die Leis-

tungskurschüler neue Themenbereich der Pauli- und Dirac-Algebra ist ohne die Hürden einer Vorprägung leichter zugänglich als für bereits andersweitig erfahrene und vorgeprägte studentisch Lernende.

Es stellt sich damit die Frage, ob ein Erlernen der Geometrischen Algebra zumindest im dreidimensionalen Fall des klassischen Raumes nicht zeitlich früher erfolgen sollte. Nicht-kommutative Strukturen stellen ein so wesentliches konstituierendes Element unserer physikalisch-mathematischen Welt dar, dass ein Neulernen von Anfang an der effektivere Weg zu einer angemessenen Weltbeschreibung darstellen könnte.

Eine Schlussfolgerung scheint deshalb, den Vorschlag Parra Serras [22], die Geometrische Algebra möglichst früh auch im Mittelstufenunterricht⁴ zu behandeln, ernst zu nehmen und entsprechende Ansätze auch curricular umzusetzen.

8. Ausblick

Der nächste Schritt in der hochschulischen Aufarbeitung und didaktischen Rekonstruktion von Geometrischer Algebra und Raumzeit-Algebra stellt die Verknüpfung von Räumen unterschiedlicher Dimensionen dar. Dies zielt auf die didaktische Interpretation der tiefgründigen Beziehungen („deep relationship“ [26, S. 1292])

$$\sigma_k = \gamma_k \gamma_0 \quad \{39\}$$

ab, die die Konstituenten des dreidimensionalen Raumes (Pauli-Vektoren) und der vierdimensionalen Raumzeit (Dirac-Vektoren) sowohl auf Koordinaten- wie auch auf Operatorebene verblüffend effektiv verknüpfen.

Diese Beziehung, die mit Hilfe von (2 x 2)-Pauli-Matrizen und (4 x 4)-Dirac-Matrizen nicht fassbar ist, stellt einen weiteren deutlichen konzeptuellen Vorteil der Geometrischen Algebra gegenüber der heute vorwiegend genutzten Vektoralgebra dar.

Die weitere inhaltliche und didaktische Aufarbeitung dieses Themenbereichs lohnt also auf jeden Fall – und zwar in Schule und Hochschule. Entsprechende Unterrichtsreihen und Lernszenarien gelingen und bieten eine Horizonterweiterung, die gerade auch durch die Verknüpfung mathematischer und physikalischer Strukturen, Ideen und Phänomene so wertvoll wird.

„...Concrete geometrical and physical examples should be interspersed among the teaching of mathematics, in order to form almost a continuum”,

⁴ Parra Serra schreibt in seinem Beitrag: “Even at the most elementary level the generality of the geometric algebra should be emphasized (...) As for the best age to perform this introduction I will not set lower limits. It can (should) be done shortly after the introduction of the Cartesian coordinates as labels for locating points in the plane, defining the geometric unit vectors as translation operators” [22, S. 823/824]. Die Geometrische Algebra sollte somit nach Auffassung von Parra Serra kurz nach Einführung der Kartesischen Koordinaten schulisch aufgegriffen werden.

schreibt Parra Serra [22, S., 825]. Ähnliches gilt auch für den Physikunterricht. Physik ohne geometrische Einbettung ist Physik ohne Raum, auf Zahlen reduzierte Physik. Doch unsere Welt ist ausgedehnt und damit dimensionsbehaftet. Sie ist und bleibt geometrisch, und das spüren wir jeden Tag.

9. Literatur

- [1] Atiyah, Michael F. (1998): The Dirac equation and geometry. In: Peter Goddard (Hrsg.): Paul Dirac – The Man and His Work, p. 108 – 124, Cambridge University Press, Cambridge 1998.
- [2] Baylis, William E. (2003): Applications of Clifford Algebras in Physics. In: Rafal Ablamowicz, Garret Sobczyk (Hrsg.): Lectures on Clifford (Geometric) Algebras and Applications. Kapitel 4, Birkhäuser Verlag, Boston.
- [3] Cartan, Élie (1981): The Theory of Spinors, unveränderter Wiederabdruck der englischen Übersetzung (im Original erschienen 1937 unter dem Titel ‚Leçons sur la théorie des spineurs‘), Dover Publications, New York.
- [4] Clifford, William Kingdom (1878): Applications of Grassmann’s Extensive Algebra. In: American Journal of Mathematics, Vol. 1, No. 4, S. 350 – 358.
- [5] Dirac, Paul A. M. (1928): The Quantum Theory of the Electron. In: Proceedings of the Royal Society A, Vol. 117, S. 610 – 624.
- [6] Doran, Chris; Lasenby, Anthony (2003): Geometric Algebra for Physicists, Cambridge University Press, Cambridge.
- [7] Graßmann, Hermann Günther (1844): Die Wissenschaft der extensiven Größen oder die Ausdehnungslehre, eine neue mathematische Disciplin. Ersther Theil, die lineale Ausdehnungslehre enthaltend., Verlag Otto Wigand, Leipzig.
- [8] Graßmann, Hermann Günther (1877): Über den Ort der Hamilton’schen Quaternionen in der Ausdehnungslehre. In: Mathematische Annalen, Vol. 12, S. 375 – 386.
- [9] Gull, Stephan; Lasenby, Anthony; Doran, Chris (1993): Imaginary Numbers are not Real – The Geometric Algebra of Spacetime, In: Foundations of Physics Vol. 23, No. 9, S. 1175 – 1196.
- [10] Hestenes, David (1966): Space-Time Algebra, Gordon & Breach Science Publishers, New York.
- [11] Hestenes, David (2003): Reforming the Mathematical Language of Physics, Oersted Medal Lecture. In: American Journal of Physics, Vol. 71, No. 2 (2003), S. 104 – 121.
- [12] Hestenes, David (2003): Spacetime Physics with Geometric Algebra. In: American Journal of Physics, Vol. 71, No. 7 (2003), S. 691 – 714.
- [13] Hildenbrand, Dietmar (2006): Geometric Computing in Computer Graphics and Robotics using Conformal Geometric Algebra, Dissertation D17, Universität Darmstadt, Fachbereich Informatik.
- [14] Hitzer, Eckhard (2005): Relativistic Physics as Application of Geometric Algebra. In: K. Adhav (Hrsg.): Proceedings of the International Conference of Relativity – ICR 2005, University of Amravati, India.
- [15] Horn, Martin Erik (2009): Vom Raum zur Raumzeit. In: Dietmar Höttecke (Hrsg.): Chemie- und Physikdidaktik für die Lehramtsausbildung, Beiträge zur Jahrestagung der GDCP in Schwäbisch Gmünd, Band 29, S. 455 – 457, LIT-Verlag Dr. W. Hopf Berlin.
- [16] Horn, Martin Erik (2009): Die Spezielle Relativitätstheorie im Kontext der Raumzeit-Algebra. In: Volkhard Nordmeier, Helmuth Grötzebach (Hrsg.): Didaktik der Physik, Beiträge zur Frühjahrstagung in Bochum, Tagungs-CD des Fachverbands Didaktik der Physik der Deutschen Physikalischen Gesellschaft, Beitrag 30.40, LOB – Lehmanns Media Berlin.
- [17] Horn, Martin Erik (2009): Arbeitsbögen zur Geometrischen Algebra und zur Raumzeit-Algebra, veröffentlicht als Anlage des Beitrags [16]. In: Volkhard Nordmeier, Helmuth Grötzebach (Hrsg.): Didaktik der Physik, Beiträge zur Frühjahrstagung in Bochum, Tagungs-CD des Fachverbands Didaktik der Physik der Deutschen Physikalischen Gesellschaft, Beitrag 30.40, LOB – Lehmanns Media Berlin.
- [18] Hyde, Edward W. (1890): The Directional Calculus, based upon the Methods of Hermann Grassmann, Ginn & Company, Boston.
- [19] Macdonald, Alan (2009): A Survey of Geometric Algebra and Geometric Calculus, Luther College, Decorah. Iowa. <http://faculty.luther.edu/~macdonal/GA&GC.pdf> (Stand: 26. Mai 2010).
- [20] Meister, Reinhard (Koord.) (2006): Modulhandbuch Bachelor-Studiengang Mathematik, Applied and Computational Mathematics, Beuth-Hochschule für Technik Berlin, vormals TFH Berlin, Stand: 19. Juli 2006.
- [21] Misner, Charles W.; Thorne, Kip S.; Wheeler, John A. (1995): Gravitation, 19. Auflage, W. H. Freeman and Company, New York.
- [22] Parra Serra, Josep Manel (2009): Clifford Algebra and the Didactics of Mathematics. In: Advances of Applied Clifford Algebras, Vol. 19, S. 819 – 834.
- [23] Pauli, Wolfgang (1927): Zur Quantenmechanik des magnetischen Elektrons. In: Zeitschrift für Physik, Vol. 43, Nr. 9/10, S. 601 – 623.
- [24] Penrose, Roger (2005): The Road to Reality. A Complete Guide to the Laws of the Universe. Vintage Books, London.
- [25] Perwass, Christian (2009): Geometric Algebra with Applications in Engineering, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.
- [26] Sobczyk, Garret (1993): David Hestenes – The Early Years. In: Foundations of Physics, Vol. 23, No. 10, S. 1290 – 1293.

- [27] Vince, John (2008): Geometric Algebra for Computer Graphics, Springer-Verlag London.
- [28] Witte, F. M. C. (2007): Lecture Notes in Modern Electrodynamics, Universität Utrecht, Science Department, 23. April 2007.
http://www.wepapers.com/Papers/61744/Lecture_notes_in_Modern_Electrodynamics
(Stand: 16. August 2010)

Dem Beitrag beigefügte Medien:

- [29] Horn, Martin Erik (2010): Pauli-Algebra und Dirac-Algebra. OH-Folien zur Einführung in die Spezielle Relativitätstheorie im Rahmen eines Kurses zur Physik für Mathematiker. Beuth-Hochschule für Technik, Berlin. Stand: 4. Januar 2010.